

MENELUSURI KESULITAN MAHASISWA DALAM PEMBUKTIAN MATEMATIS PADA PERKULIAHAN PENGANTAR ANALISIS REAL

Dewi Murni^{*1}, Yerizon¹, Ahmad Fauzan¹, Elita Zusti Jamaan¹, I Made Arnawa², Helma¹

¹Universitas Negeri Padang, Padang, Indonesia

²Universitas Andalas, Padang, Indonesia

*Penulis Korespondensi (dewimurni_mat@fmipa.unp.ac.id)

DOI: <http://dx.doi.org/10.20527/edumat.v13i2.22776>

Received : 9 Juni 2025 Accepted : 9 Oktober 2025 Published : 31 Oktober 2025

Abstrak: Pembuktian matematis merupakan elemen kunci dalam pendidikan matematika tingkat lanjut dan menjadi fokus utama dalam perkuliahan Pengantar Analisis Real. Namun, banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam memahami konsep dasar, menghubungkan definisi dengan teorema, serta menyusun pembuktian secara runtut, sehingga memengaruhi penguasaan mereka terhadap mata kuliah ini. Penelitian ini bertujuan menelusuri kesulitan mahasiswa dalam memahami soal pembuktian, melaksanakan proses pembuktian, dan menarik kesimpulan dari hasil pembuktian. Jenis penelitian yang digunakan adalah metode campuran (*mixed methods*), yang menggabungkan pendekatan kuantitatif dan kualitatif. Subjek penelitian adalah satu kelas mahasiswa Jurusan Matematika, Program Studi Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Padang yang menempuh mata kuliah Pengantar Analisis Real pada semester Januari–Juni 2024, dengan jumlah 35 mahasiswa. Dari jumlah tersebut, enam orang mahasiswa dipilih sebagai responden wawancara. Instrumen yang digunakan adalah tes soal pembuktian dan lembar wawancara. Data tes (rentang 1-100) dikategorikan dengan nilai 1 sampai dengan 4 berdasarkan rubrik penilaian yang terdapat dalam standar operasional prosedur penilaian UNP. Data wawancara dianalisis menggunakan analisis deskriptif. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada proses pembuktian diperoleh kesulitan mahasiswa: dalam memahami soal pembuktian sebanyak 44,83%, dalam melaksanakan pembuktian sebanyak 52,49%, dan dalam membuat kesimpulan hasil pembuktian sebanyak 65,52%. Analisis jawaban mahasiswa menunjukkan bahwa kesulitan utama terletak pada: kesalahan memahami premis soal, penggunaan definisi irisan yang tidak benar, penyusunan argumen pembuktian yang tidak sistematis, serta penarikan kesimpulan yang tidak didasarkan pada langkah-langkah yang benar.

Kata kunci: pembuktian matematis, analisis real, kesulitan mahasiswa.

Abstract: Mathematical proof is a key element in advanced mathematics education and is the main focus of the Introduction to Real Analysis course. However, many students experience difficulties in understanding basic concepts, connecting definitions to theorems, and constructing proofs coherently, thus affecting their mastery of this course. This study aims to explore students' difficulties in understanding proof problems, carrying out the proof process, and drawing conclusions from the proof results. The type of research used is a mixed methods study, combining quantitative and qualitative approaches. The subjects were a class

of 35 students from the Mathematics Department, Mathematics Education Study Program, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Padang State University, who took the Introduction to Real Analysis course in the January–June 2024 semester. Of these, six students were selected as interview respondents. The instruments used were a proof test and an interview sheet. Test data (range 1–100) were categorized with a score of 1 to 4 based on the assessment rubric contained in the UNP assessment standard operating procedures. Interview data were analyzed using descriptive analysis. The results of the study showed that in the proof process, students found difficulties: in understanding the proof questions as much as 44.83%, in carrying out the proof as much as 52.49%, and in drawing conclusions from the proof results as much as 65.52%. Analysis of student answers showed that the main difficulties lay in: misunderstanding the question premise, using incorrect intersection definitions, compiling unsystematic proof arguments, and drawing conclusions that were not based on correct steps.

Keywords: *mathematical proff; real analysis; student struggles; proof construction*

PENDAHULUAN

Pembuktian Matematis merupakan suatu proses yang mengasah analisis berpikir logis dan sistematis mahasiswa. Hal ini sangat dibutuhkan pada era kemajuan sekarang ini. Pembuktian matematis adalah elemen kunci dalam pendidikan matematika tingkat lanjut dan menjadi fokus utama dalam perkuliahan Pengantar Analisis Real. Bartle (2011) menyatakan "*The study of real analysis is indispensable for a prospective graduate student of pure or applied mathematics*". Yang artinya kajian Analisis Real sangat diperlukan oleh mahasiswa matematika murni maupun matematika terapan. Pembuktian ini bukan hanya tentang mengikuti langkah-langkah logis, tetapi juga memahami dan menerapkan konsep-konsep fundamental matematika (Radiusman, 2020) dengan ketelitian dan keakuratan (Firmasari et al., 2022).

Bukti merupakan penjelasan yang logis mengapa pernyataan itu menjadi benar (Altıparmak, K., & Öziş, 2005), (Halpern & Pucella, 2006). Hanna (2000) dan Nance (1988) menyatakan bahwa bukti terbaik tidak hanya mengatakan pernyataan itu benar tetapi dengan menjelaskan mengapa

pernyataan itu benar. Pembuktian merupakan dasar dari matematika (CadwalladerOlsker, 2011; Susanna, 2020). Tiga struktur pembuktian matematis yang berbeda yaitu 1) *A hierarchical structure in which we attend to subproofs and subconstructions.* 2) *A construction path, that is, a linear path describing one ordering of the steps through which a proof could have been constructed by an idealized prover, who never erred or followed false leads and who wrote each step as soon as possible.* 3) *A division of proofs into what we call the formal rhetorical part and the problem centered part* (Selden, A., & Selden, 2008). Berdasarkan pendapat tersebut dapat disimpulkan bahwa pembuktian merupakan serangkaian deduksi dari asumsi (premis atau aksioma) dan hasil-hasil matematika yang sudah ada (lemma atau teorema) untuk memperoleh hasil-hasil penting dari suatu persoalan matematik.

Pada kenyataannya, banyak mahasiswa kesulitan memahami dan menerapkan metode pembuktian (Edwards & Ward, 2008; Utomo & Huda, 2020), yang memengaruhi kemampuan mereka untuk menguasai mata kuliah ini secara keseluruhan. Hal ini juga tampak dari pengamatan penulis dalam

perkuliahan Pengantar Analisis Real, dimana mahasiswa sering kebingungan menentukan definisi dan teorema yang akan digunakan, serta mengalami kesulitan menyusun alur pembuktian secara runtut. Menurut Moore (1990), mahasiswa sarjana matematika sering menghadapi berbagai kesulitan dalam memahami dan membangun pembuktian matematis. Penelitian terdahulu juga menunjukkan bahwa mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam melakukan pembuktian (Sabri & Minggi, 2014; Isnani et al., 2022). Misalnya, mahasiswa pendidikan matematika UNS mengalami kesulitan dalam melakukan pembuktian langsung, tidak langsung, dan induksi matematika (Putri, 2015). Data lain juga menunjukkan bahwa 79,54% mahasiswa semester VI program studi pendidikan matematika FKIP Unsika tahun ajaran 2013–2014 belum mampu menyusun bukti kebenaran suatu pernyataan berdasarkan definisi, prinsip, dan teorema (K. E. Lestari, 2015). Kesulitan serupa dialami mahasiswa jurusan matematika di IAIN Padang Sidempuan, terutama dalam memahami konsep pernyataan atau simbol matematika, serta menyusun bukti kebenaran secara matematis (Siregar, 2019).

Kesulitan dalam pembuktian umumnya ditemukan dalam hal memahami bukti dari teorema, *lemma*, *corollary*, ataupun dalam hal menyelesaikan soal-soal pembuktian (Utomo & Huda, 2020). Adapun penyebab kesulitan tersebut antara lain: (1) kurangnya pemahaman mahasiswa terhadap konsep yang akan dibuktikan, (2) kurangnya pemahaman tentang metode-metode pembuktian yang akan digunakan, (3) kurangnya kemampuan dalam memanipulasi fakta-fakta yang diketahui dan menkaikannya dengan yang akan dibuktikan serta (4) kurangnya kemampuan dalam menyusun alur/sistematika bukti tersebut (Minggi et al., 2016; Salsabila et al., 2015).

Berdasarkan pengalaman penulis dalam mengajar mata kuliah Analisis Real di Departemen Matematika FMIPA UNP, banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam menstrukturkan pola pikir mereka secara logis saat melakukan penalaran pembuktian. Mereka kesulitan melihat hubungan antara definisi dan teorema, serta urutan hierarkisnya. Selain itu, mereka sering kali tidak dapat menyatakan alasan untuk setiap pernyataan yang mereka buat. Meskipun mereka memahami prosedur pembuktian, mereka sering tidak memahami setiap langkah dalam prosedur tersebut. Mahasiswa juga kesulitan menghubungkan pernyataan yang diberikan dengan alasan logis yang mendasarinya.

Sejumlah penelitian sebelumnya telah dilakukan untuk mengkaji perkuliahan Analisis Real, antara lain: (1) *The effect of using flow proof in conducting preliminary analysis in real analysis courses to improve mathematics problem solving* (Murni and Helma, 2023), dan (2) *Factors affecting students' capabilities in analyzing by using flow proof in real analysis lectures* (Helma and Murni, 2020). Hasil penelitian tersebut menunjukkan adanya peningkatan penguasaan mahasiswa, namun capaian yang diperoleh belum optimal. Oleh karena itu, perlu dilakukan penelitian lebih lanjut yang berfokus pada analisis kesulitan mahasiswa dalam melakukan pembuktian matematis serta mengukur tingkat kesulitan yang mereka alami. Penelitian ini bertujuan untuk menelusuri tingkat kesulitan mahasiswa dalam memahami soal pembuktian, melakukan proses pembuktian, dan membuat kesimpulan pada materi Pengantar Analisis Real.

METODE

Penelitian ini menggunakan metode campuran (*mixed methods*) (Rofiqoh & Zulhawati, 2020) dengan desain *explanatory sequential* (Creswell & Creswell, 2010). Desain ini diawali dengan pengumpulan data kuantitatif melalui tes soal untuk mengukur tingkat kesulitan mahasiswa, kemudian dilanjutkan dengan pengumpulan data kualitatif melalui wawancara mendalam guna menjelaskan hasil temuan kuantitatif secara lebih mendalam.

Subjek penelitian adalah satu kelas mahasiswa Jurusan Matematika, Program Studi Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Padang yang menempuh mata kuliah Pengantar Analisis Real pada semester Januari–Juni 2024, dengan jumlah 35 mahasiswa. Dari jumlah tersebut, enam orang mahasiswa dipilih sebagai responden wawancara. Alat pengumpul data yang

digunakan adalah tes soal pembuktian dan lembar wawancara. Tes berbentuk essay. Tes essay yang diberikan terdiri dari tiga buah soal dengan sub materi: himpunan, sifat terurut bilangan real dan supremum. Sebelum digunakan, kedua instrumen tersebut telah divalidasi oleh dua dosen ahli bidang Analisis Real dan metodologi penelitian untuk menilai kesesuaian isi serta kejelasan butir pertanyaan. Hasil validasi menunjukkan bahwa instrumen dinyatakan layak dan valid secara isi setelah dilakukan revisi sesuai dengan saran para validator. Penggunaan Tes essay bertujuan untuk dapat melihat bagaimana proses pembuktian matematis yang dilakukan mahasiswa dengan indikator (1) Memahami soal, (2) melaksanakan proses pembuktian, (3) membuat kesimpulan. Sedangkan panduan wawancara disusun berdasarkan empat indikator yang bisa dilihat pada Tabel 1 berikut ini.

Tabel 1 Indikator Pedoman Wawancara

Nomor	Indikator Pedoman Wawancara	Nomor Soal
1	Penguasaan materi prasyarat	1, 2
2	Penguasaan teori logika matematika	3, 4, 5, 7
3	Penguasaan materi	6, 9
4	Cara belajar	8, 10

Keempat indikator pada pedoman wawancara dijabarkan menjadi 10 pertanyaan. Wawancara dilakukan kepada lima orang mahasiswa yang mengikuti perkuliahan Pengantar Analisis Real semester Januari–Juni 2024. Pemilihan subjek dilakukan dengan teknik purposive sampling, yakni penentuan informan secara sengaja berdasarkan kriteria tertentu yang relevan dengan tujuan penelitian (Rofiqoh & Zulhawati, 2020), yaitu: mahasiswa aktif yang telah mengikuti minimal 80% perkuliahan, memiliki variasi hasil tes (kategori rendah, sedang, tinggi), serta bersedia memberikan informasi secara

terbuka. Jumlah lima informan dipilih karena dianggap memadai untuk mencapai kedalaman data yang dibutuhkan dalam penelitian kualitatif, serta telah mewakili spektrum tingkat kesulitan yang ditemukan dalam hasil kuantitatif. Dalam pendekatan kualitatif, fokus utama bukan pada jumlah informan, tetapi pada kecukupan informasi (*data saturation*) yang relevan dan bermakna (Creswell & Creswell, 2010).

Hasil tes belajar dinilai dengan skor 0-100, kemudian dikategorikan menjadi gagal dengan simbol 1, cukup dengan simbol 2, baik dengan simbol 3 dan sangat baik dengan

simbol 4. Adapun rincian kategori penilaian terhadap hasil belajar mengikuti Penilaian Acuan Patokan (PAP) yang berlaku di Universitas Negeri Padang sebagai berikut.

- (i) Gagal, diberikan jika kebenaran jawaban dibawah 40% ($HB < 40\%$).
- (ii) Cukup, diberikan jika kebenaran jawaban antara 40% dan 60% ($40 \leq HB < 60\%$).
- (iii) Baik, diberikan jika kebenaran jawaban dari 60% sampai 80%, ($60 \leq HB < 80\%$).
- (iv) Sangat Baik, diberikan jika kebenaran jawaban diatas 80% ($HB \geq 80\%$).

Selanjutnya, skor kategori (1–4) dari setiap mahasiswa dihitung frekuensinya untuk masing-masing sub indikator, kemudian dikonversi menjadi persentase dengan rumus:

$$\text{Persentase skor} = \frac{\text{Jumlah skor}}{\text{Jumlah mahasiswa}} \times 100\%$$

Persentase tersebut digunakan untuk menggambarkan distribusi tingkat kesulitan mahasiswa pada setiap sub indikator pembuktian matematis. Untuk data hasil wawancara, akan dianalisis menggunakan analisis deskriptif, yaitu data disajikan atau dinarasikan apa adanya (Martias, 2021).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Tes

Hasil tes mahasiswa dianalisis per-tahap pembuktian yaitu: (i) Memahami, (ii) Proses Pembuktian, (iii) Membuat kesimpulan.

Memahami Soal (Indikator Pertama)

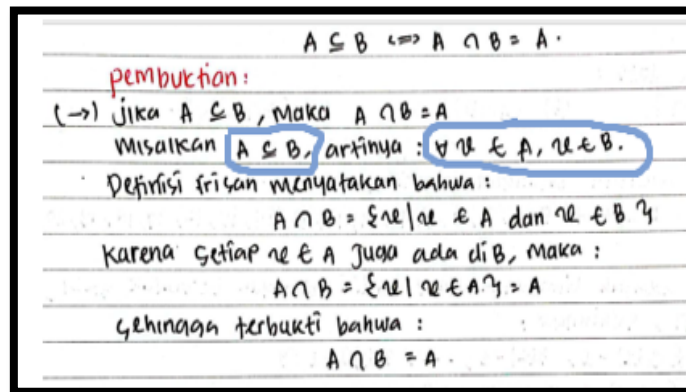
Pada tahap ini mahasiswa diminta memahami soal dengan baik, termasuk mengidentifikasi premis dan kesimpulan yang akan dibuktikan. Persentase hasil belajar mahasiswa pada setiap sub indikator dalam kategori 1, 2, 3, dan 4 tercantum dalam Tabel 2.

Tabel 2 Persentase Jawaban Mahasiswa pada Soal Pertama

Sub Indikator	Soal	Persentase Mahasiswa pada Skor ke-			
		1	2	3	4
Menuliskan premis soal	Soal pertama	37.9	27.6	6.9	27.6
	Soal kedua	13.8	20.7	31.0	34.5
	Soal ketiga	17.2	20.7	34.5	27.6
	Rata-rata	23.0	23.0	24.1	29.9
Menuliskan hal yang akan dibuktikan	Soal Pertama	17.2	20.7	34.5	27.6
	Soal kedua	13.8	20.7	37.9	27.6
	Soal ketiga	17.2	20.7	34.5	27.6
	Rata-rata	16.1	20.7	35.6	27.6

Berdasarkan Tabel 2, sebanyak 46% mahasiswa memperoleh skor 1 dan 2 pada sub indikator menuliskan premis soal, yang menunjukkan bahwa hampir separuh mahasiswa belum mampu memahami dan menuliskan informasi yang diketahui secara tepat untuk menuju pembuktian. Kesalahan

ini tampak pada beberapa jawaban mahasiswa, misalnya ketika $A \subseteq B$ yang seharusnya ditafsirkan sebagai $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$, justru dipahami hanya sebagai $x \in A$ dan $x \in B$. Contoh kesalahan tersebut ditunjukkan pada Gambar 1.

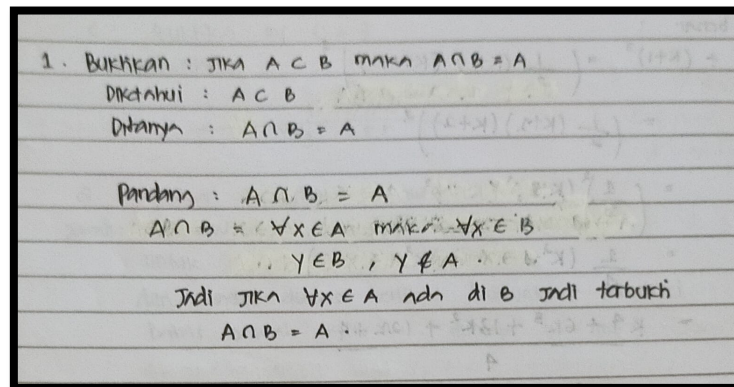


Gambar 1 Kesalahan Memahami Premis

Pada gambar terlihat bahwa mahasiswa tidak dapat menggunakan premis tersebut dalam pembuktian. Sejalan dengan temuan Weber (2001), yang menyatakan bahwa mahasiswa sering kali mampu mengidentifikasi pernyataan formal, tetapi mereka gagal memahaminya secara mendalam untuk digunakan dalam pembuktian logis. Temuan ini juga mendukung teori beban kognitif, di mana mahasiswa mengalami beban kognitif intrinsik yang tinggi karena harus memproses hubungan logis antara himpunan, simbol, dan implikasi secara bersamaan. Ketika kapasitas kerja memori mereka terbatas, proses integrasi informasi formal dan konseptual menjadi terhambat, sehingga menyebabkan kesalahan dalam memahami premis.

Dalam konteks Analisis Real yang bersifat sangat abstrak, kondisi ini memperlihatkan bahwa ketidakmampuan memahami premis merupakan manifestasi konkret dari kegagalan mengelola beban kognitif, bukan semata kesalahan prosedural. Hal ini menunjukkan bahwa pemahaman mahasiswa terhadap hal-hal yang diketahui masih rendah. Hanya sekitar 54% mahasiswa yang mendapat skor 3 dan 4 (kategori baik dan sangat baik).

Pada sub indikator “Menuliskan hal yang akan dibuktikan”, 36,8% mahasiswa mendapat skor 1 dan 2, menunjukkan bahwa sepertiga mahasiswa masih kesulitan memahami secara tepat apa yang perlu dibuktikan. Sebagian mahasiswa cenderung menyalin soal dan tidak memilah secara tepat antara hal yang diketahui dan yang harus dibuktikan. Fenomena ini seringkali diakibatkan oleh kesulitan dalam menghubungkan teori dengan aplikasinya dalam pembuktian matematika (Uyen et al., 2021). Beberapa mahasiswa menuliskan apa yang akan dibuktikan tetapi tidak memahami langkah yang diperlukan, seperti dalam kasus membuktikan kesamaan dua himpunan melalui analisis saling subhimpunan, yang tidak dilakukan dengan benar (Harel, 2024; Inglis & Mejía-ramos, 2021). Salah satu contoh jawaban pada Indikator ini dapat dilihat pada jawaban mahasiswa pada Gambar 2, yaitu menuliskan hal yang akan dibuktikan tetapi tidak mengerti kesamaan $A \cap B = A$ yang akan dibuktikan. Dimana seharusnya yang akan dituju ($A \cap B$) $\subseteq A$ dan $A \subseteq (A \cap B)$. Sedangkan sekitar 63,2% mahasiswa memperoleh skor 3 dan 4, yang berarti sudah sebagian besar dapat menuliskan hal diketahui dengan baik.



Gambar 2 Jawaban pada Soal Pembuktian Kesamaan Himpunan

Pelaksanaan Pembuktian (Indikator Kedua)

Pada tahap ini mahasiswa melakukan pembuktian dengan memanfaatkan logika matematika dan teori-teori sebagai dasar

pembuktian. Persentase hasil belajar mahasiswa pada setiap sub indikator dengan kategori 1, 2, 3 dan 4, dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3 Persentase Jawaban Mahasiswa pada Indikator Kedua

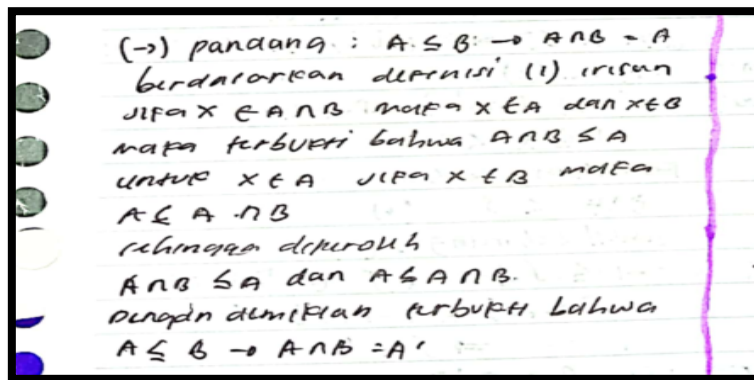
Sub Indikator	Soal	Persentase Mahasiswa pada Skor ke-			
		1	2	3	4
Menuliskan bentuk awal pembuktian	Soal Pertama	51,7	27,6	13,8	6,9
	Soal kedua	27,6	24,1	27,6	20,7
	Soal ketiga	31,8	19,9	34,7	13,6
	Rata-rata	37,0	23,9	25,4	13,7
Memberi alasan pembuktian sesuai aturan logika matematika	Soal Pertama	65,5	20,7	6,9	6,9
	Soal kedua	24,1	24,1	37,9	13,8
	Soal ketiga	37,9	31,0	20,7	10,3
	Rata-rata	42,5	25,3	21,8	10,3
Menggunakan teori yang cocok untuk pembuktian	Soal Pertama	69,0	17,2	10,3	3,4
	Soal kedua	20,7	34,5	27,6	17,2
	Soal ketiga	34,5	37,9	17,2	10,3
	Rata-rata	41,4	29,9	18,4	10,3

Dari Tabel 3, dapat dilihat pada sub indikator "Menuliskan bentuk awal pembuktian" sebagian besar mahasiswa (60,9%) berada pada kategori 1 dan 2 (gagal dan cukup). Tahap ini adalah tahap penting karena jika awal pembuktian sudah salah tentu akan mengakibatkan kesalahan pada tahap berikutnya. Sebagai contoh pada Gambar 1, seharusnya pembuktian dimulai

dengan premis atau premis tambahan tetapi malah dimulai yang akan dibuktikan $A \cap B = A$. Sehingga langkah selanjutnya menjadi tidak sesuai. Menurut (García-garcía & Dolores-flores, 2020), mahasiswa cenderung memiliki kesalahpahaman dalam konsep dasar pembuktian, yang sering kali membuat mereka memulai dengan langkah yang salah atau tidak relevan. Penelitian tersebut juga

menekankan pentingnya memberikan contoh-contoh nyata dari berbagai jenis pembuktian untuk meningkatkan pemahaman mahasiswa. Hal ini tercermin dalam data, bahwa hanya 39,1% mahasiswa yang memperoleh skor 3 dan 4, yang berarti kurang dari separuh jumlah mahasiswa yang dapat memulai pembuktian dengan baik dan sangat baik. Dari kelompok ini, hanya 13,4% yang benar-benar mampu membuat awal pembuktian dengan tepat.

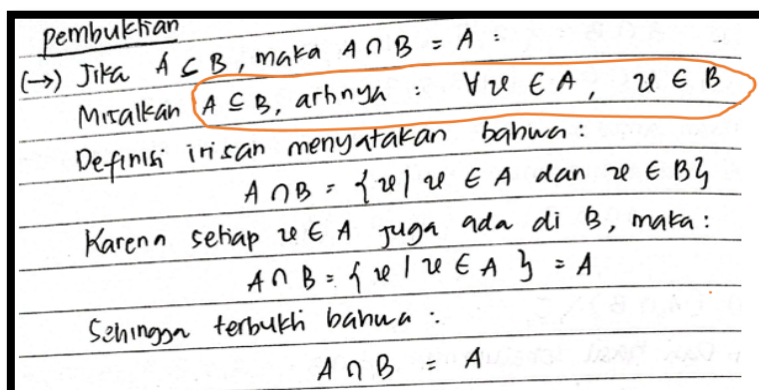
Pada sub indikator Memberi alasan pembuktian sesuai aturan logika matematika, terlihat bahwa banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam memahami aturan logika yang benar, terutama ketika membuktikan kesamaan dua himpunan. Kesalahan ini dapat ditemukan pada beberapa jawaban mahasiswa, misalnya dalam membuktikan $A \subseteq B \rightarrow (A \cap B) = A$. Contoh kesalahan tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3 Jawaban Mahasiswa

Pada gambar 3 terlihat mahasiswa tidak memahami aturan logika “simplifikasi” untuk bisa menarik kesimpulan dari x anggota A dan x anggota B menjadi x anggota A , untuk membuktikan himpunan $A \cap B \subseteq A$. Kesalahan lain yang banyak muncul adalah

ketidakpahaman mahasiswa terhadap konsep, misalnya konsep himpunan bagian dan konsep irisan dua himpunan. Contoh kesalahan tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4 Kesalahan Konsep tentang Himpunan Bagian

Pada Gambar 4, bagian yang dilingkari menunjukkan kesalahan mahasiswa dalam mengartikan konsep himpunan bagian. Meskipun mahasiswa dapat menuliskan

definisi, mereka kesulitan menerapkannya dalam pembuktian. Seharusnya proses pembuktian yang dilakukan untuk $(A \cap B) = A$ seperti dalam tabel 4 berikut.

Tabel 4 Jawaban yang Benar

Soal	Logika pembuktian
Jika $A \subseteq B$, Buktikan $(A \cap B) = A$,	Untuk membuktikan kesamaan himpunan ini perlu membuktikan dua tahap: 1. $(A \cap B) \subseteq A$ 2. $A \subseteq (A \cap B)$ 1. Akan dibuktikan $(A \cap B) \subseteq A$. Misalkan $x \in (A \cap B)$. Berdasarkan definisi maka $x \in A$ dan $x \in B$. Dengan aturan "simplifikasi" maka $x \in A$. Karena x sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa $\forall x, x \in (A \cap B) \rightarrow x \in A$, yang berarti $(A \cap B) \subseteq A$. 2. Akan dibuktikan $A \subseteq (A \cap B)$ Misalkan $y \in A$. Karena $A \subseteq B$, maka $y \in B$. Oleh karena itu, $y \in A$ dan $y \in B$, yang berarti $y \in (A \cap B)$. Karena y sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa $\forall y, y \in A \rightarrow y \in (A \cap B)$, yang berarti $A \subseteq (A \cap B)$. Kesimpulan: Karena telah dibuktikan $(A \cap B) \subseteq A$ dan $A \subseteq (A \cap B)$, maka $(A \cap B) = A$

Terlihat bahwa mahasiswa belum menerapkan aturan logika matematika dengan benar. Pembuktian seharusnya dilakukan dengan menunjukkan bahwa himpunan di sisi kiri merupakan bagian dari himpunan di sisi kanan, dan sebaliknya, seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4. Selain itu, mahasiswa tidak memberikan alasan dalam setiap langkah pembuktian, serta penyusunannya tidak sistematis. Hanya 31,0% mahasiswa yang mampu menyusun pembuktian dengan logika yang benar (skor 3 dan 4). Rendahnya pemahaman dasar logika matematika memengaruhi kemampuan analisis mahasiswa (Isnani et al., 2023), sehingga menyebabkan kesalahan dalam pembuktian. Hal ini sejalan dengan penelitian yang menyebutkan bahwa kesulitan dalam logika matematika secara langsung memengaruhi interaksi dalam pembelajaran, keterampilan berpikir kritis dan kemampuan pemecahan masalah (Ndahawali et al., 2020). Pembelajaran yang tidak interaktif dapat

menghambat perkembangan keterampilan penting, seperti berpikir kritis dan analitis, yang sangat dibutuhkan dalam konteks akademis (Mulyanti et al., 2020).

Pada sub indikator "Menggunakan teori yang cocok untuk pembuktian" menunjukkan bahwa 71,3% mahasiswa memperoleh skor 1 dan 2, menandakan bahwa sebagian besar mahasiswa tidak dapat menggunakan teori yang tepat untuk dasar pembuktian. Banyak mahasiswa tidak memahami atau menguasai keterkaitan antar teori, sehingga langkah-langkah yang mereka buat kurang jelas dan tidak didukung oleh konsep yang memadai.

Penarikan Kesimpulan (Indikator Ketiga)

Pada tahap ini mahasiswa melakukan penarikan kesimpulan dari proses pembuktian yang telah dilakukan serta melakukan pengecekan. Persentase mahasiswa pada indikator dengan kategori 1, 2, 3 dan 4, dapat dilihat pada Tabel 5.

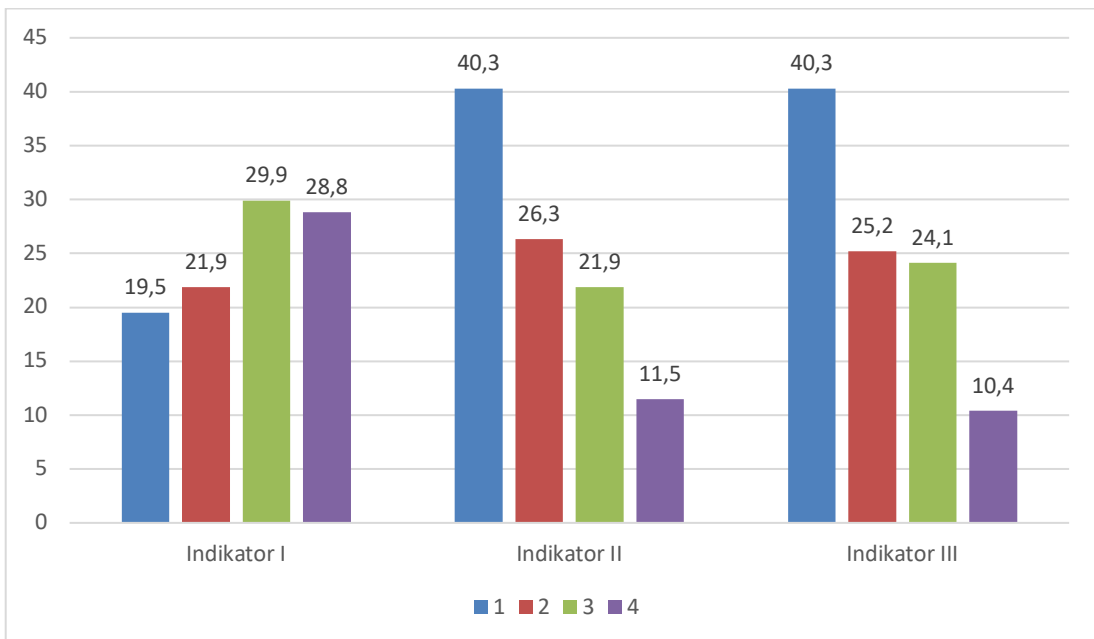
Tabel 5 Persentase Jawaban Mahasiswa pada Indikator Ketiga

Sub Indikator	Soal	Persentase Mahasiswa pada Skor ke-			
		1	2	3	4
Penarikan Kesimpulan	Soal Pertama	62.1	20.7	10.3	6.9
	Soal kedua	24.1	24.1	37.9	13.8
	Soal ketiga	34.5	31.0	24.1	10.3
	Rata-rata	40,3	25,2	24,1	10,4

Berdasarkan Tabel 5, sebanyak 65,3% mahasiswa berada dalam kategori 1 dan 2 (gagal dan cukup), yang menunjukkan bahwa sebagian besar tidak mampu membuat kesimpulan yang benar atau bahkan tidak menyusun kesimpulan sama sekali. Kesulitan ini disebabkan oleh banyaknya kesalahan sejak tahap awal pembuktian, yang berdampak pada kemampuan mereka dalam menarik kesimpulan yang tepat. Hanya 34,7% mahasiswa yang mampu menyusun kesimpulan yang hampir benar (skor 3 dan 4), sedangkan total mahasiswa yang memberikan kesimpulan benar hanya 10,4%. Temuan ini selaras dengan penelitian sebelumnya yang menunjukkan bahwa pemahaman logika matematika

dan kemampuan berpikir kritis mahasiswa masih rendah, sehingga memengaruhi kemampuan mereka dalam menyusun argumen dan pembuktian secara sistematis (Noto et al., 2023). Kelemahan ini juga berdampak langsung pada pengambilan keputusan dalam pembuktian matematis (Stefanowicz & Kyle, 2014).

Secara umum dapat disimpulkan bahwa jumlah mahasiswa yang mendapatkan skor 1 dan 2 dengan kategori “gagal dan cukup” pada indikator I jumlahnya sedikit di bawah 50% namun pada indikator II dan III jumlah mahasiswa sudah melebihi 50% seperti terlihat pada Gambar 5. Hal ini menunjukkan bahwa pembuktian matematis masih merupakan hal sulit bagi mahasiswa.



Gambar 5 Rata-rata persentase Mahasiswa pada Skor 1-4 untuk Setiap Indikator

Hasil Wawancara

Untuk menindaklanjuti penyebab kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan masalah pembuktian tersebut, peneliti melakukan wawancara terhadap lima orang mahasiswa yang dipilih secara *purposive* berdasarkan hasil tes pembuktian. Pemilihan dilakukan

untuk mewakili variasi tingkat kemampuan, yaitu mahasiswa dengan kemampuan tinggi, sedang, dan rendah, sehingga data wawancara dapat menggambarkan perbedaan pengalaman dan kesulitan dari tiap kategori kemampuan. Rangkuman hasil wawancara dapat dilihat pada Tabel 6 berikut ini.

Tabel 6 Rangkuman Hasil Wawancara

No.	Pertanyaan	Jawaban
1.	Apakah penguasaan materi prasyarat merupakan kendala bagi saudara dalam melakukan proses pembuktian? Kira-kira berapa persen yang bisa saudara kuasai materi prasyarat tersebut, kenapa?	Dari lima mahasiswa yang diwawancarai, rata-rata mengakui bahwa mereka mengalami kendala terkait pemahaman materi prasyarat, di mana sekitar 50% dari mereka belum memahami materi tersebut untuk menyelesaikan masalah pembuktian. Hal ini disebabkan karena materi pada mata kuliah Analisis Real saling berkaitan dan berkelanjutan, seperti spiral, sehingga terkadang mereka belum menguasai materi yang diajarkan pada minggu tertentu, namun harus segera melanjutkan ke materi berikutnya sesuai dengan silabus. Akibatnya, jika mahasiswa tidak memahami materi dengan baik pada suatu tahap, hal tersebut akan berdampak negatif pada penguasaan materi di tahap berikutnya.
2.	Sebelum menjawab soal apakah saudara memahami maksud soal, yaitu. Apakah saudara memahami apa saja yang menjadi premis (hal-hal yang diketahui) dari soal? kenapa? Apakah saudara memahami apa saja yang ditanya (hal-hal yang akan dibuktikan) dari soal? Kenapa?	Untuk memahami apa yang diketahui dari soal sebagian besar bisa memahami apa yang diketahui namun ada juga yang ragu jika kalimat "Buktikan" terletak di awal soal. Mereka juga sering tidak paham penggunaan premis tersebut dalam proses pembuktian. Sedangkan untuk memahami apa yang ditanya mereka dapat menuliskan apa yang ditanya dari soal tetapi dalam membuktikan sering tidak paham sampai ke pembuktian karena tidak tahu lagi apa pembuktian selanjutnya. Secara umum mahasiswa dapat menuliskan apa yang diketahui dan apa yang ditanya namun sering terbentur dalam penerapan dalam proses pembuktian. Karena mereka pada umumnya mahasiswa jarang berlatih.
3.	Apakah saudara mengetahui tentang pembuktian langsung dan tidak langsung? Kenapa?	Untuk pembuktian langsung semuanya memahami maksudnya yaitu mulai dari premis atau hal yang diketahui. Sedangkan untuk pembuktian tidak langsung: pengandaian awalnya kurang mengerti, serta juga tentang pada penarikan kesimpulan.
4.	Apakah saudara mengetahui dari mana memulai pembuktian suatu soal? Coba jelaskan jawaban saudara?	Sebagian dari mahasiswa bisa memulai penyelesaian dengan baik dimana dapat dimulai premis yang berkaitan. namun sebagian lagi masih bingung untuk memulai alasannya karena kurang latihan sehingga masih bingung dalam penyelesaian tersebut.
5.	Apakah saudara sudah membuat penyelesaian secara sistematis? Jika belum kenapa?	Mahasiswa sering melakukan penyelesaian tidak sistematis dan loncat dalam penyelesaian, hal ini disebabkan karena kurang memahami materi termasuk materi prasyarat.

No.	Pertanyaan	Jawaban
		Mahasiswa kurang memahami urutan materi dan kaitan antar materi. Jadi dalam penyelesaian kadang urutannya terbalik.
6.	Apakah saudara sudah membuat alasan dalam langkah pembuktian dengan lengkap? Jika belum kenapa?	Belum lengkap memberi alasan pada setiap langkah pembuktian hal ini disebabkan karena mahasiswa kurang menguasai materi untuk dijadikan sebagai dasar pembuktian, yaitu, teorema atau definisi yang berkaitan. Kurang latihan dalam melihat pembuktian beberapa teorema.
7.	Apakah saudara merasa sudah menggunakan aturan logika pembuktian matematika dengan baik? kenapa?	Salah satu kendala yang dirasakan mahasiswa adalah belum memahami aturan dalam logika matematika, sehingga kesulitan dalam aplikasinya dalam pembuktian analisis real.
8.	Untuk mengerti apakah saudara mengulang kembali materi perkuliahan di rumah?	Mahasiswa jarang melakukan latihan di rumah sehingga tidak mempunyai konsep dalam alur pembuktian. Mahasiswa sukar memahami materi pada buku paket karena pembuktian yang diberikan tidak begitu detail hanya secara garis besar.
9.	Apakah saudara merasa sudah membuat kesimpulan dari jawaban dengan benar?	Mahasiswa sering tidak bisa membuat kesimpulan karena hasil pembuktian tidak diperoleh, namun kadang setelah analisis selesai juga lupa membuat kesimpulan. Sebagian besar belum membuat kesimpulan dengan benar.
10.	Apakah saudara mempersiapkan diri sebelum mengikuti mata kuliah Pengantar Analisis Real, terutama dalam memahami konsep-konsep dasar yang dibutuhkan untuk pembuktian matematis?	Mahasiswa jarang mempersiapkan diri sebelum kuliah, biasanya mahasiswa hanya mengikuti penjelasan dosen di kelas dan mengerjakan tugas setelahnya.

Dari data wawancara di atas, terlihat bahwa banyak mahasiswa yang mengalami kesulitan dalam memahami dan menerapkan materi prasyarat untuk menyelesaikan masalah pembuktian dalam mata kuliah Analisis Real. Sekitar 50% dari mahasiswa menyatakan bahwa mereka belum sepenuhnya memahami materi prasyarat, yang disebabkan oleh keterkaitan antar materi yang kompleks (Ireniza & Subayani, 2024). Mereka merasa bahwa ketidakmampuan menguasai materi pada minggu tertentu berdampak langsung pada pemahaman mereka terhadap materi berikutnya, sehingga menyebabkan kendala dalam mengikuti silabus secara menyeluruh (Netson & Ain, 2021). Kekurangan latihan dan ketidakmampuan mengidentifikasi premis dan kesimpulan dalam soal-soal pembuktian juga menjadi

masalah umum (Hamdani et al., 2023). Sebagian besar mahasiswa mampu menuliskan apa yang diketahui dan ditanyakan, tetapi mengalami kesulitan dalam proses pembuktian itu sendiri, terutama ketika mereka harus menggunakan aturan logika matematika atau memahami pembuktian tidak langsung.

Mahasiswa juga mengakui bahwa mereka sering melakukan penyelesaian secara tidak sistematis, dengan urutan langkah yang terbalik atau tidak jelas, yang mengakibatkan kurangnya alasan yang lengkap dalam setiap langkah pembuktian. Hal ini sering kali disebabkan oleh kurangnya pemahaman terhadap materi dasar dan teorema yang relevan (Yusup, 2023). Selain itu, mahasiswa jarang melakukan latihan di rumah dan kurang mampu memahami materi

dari buku teks, yang hanya memberikan pembuktian secara garis besar tanpa detail yang memadai. Kurangnya latihan di rumah dapat menghambat pemahaman mendalam terhadap materi (Murni & Helma, 2021). Akibatnya, banyak yang gagal membuat kesimpulan yang benar dari jawaban mereka, baik karena tidak mencapai hasil pembuktian yang diharapkan atau lupa untuk menyertakan kesimpulan. Kesulitan dalam memahami aturan logika matematika juga menghambat kemampuan mereka untuk menyusun argumen pembuktian yang koheren dan logis.

Pembahasan

Berdasarkan data pada setiap indikator pembuktian yang ditampilkan serta hasil wawancara dengan mahasiswa, dapat diidentifikasi beberapa kesulitan utama yang dihadapi oleh mahasiswa dalam pembuktian matematis pada mata kuliah Pengantar Analisis Real. Menurut teori pemahaman konseptual, pemahaman yang mendalam terhadap konsep dasar adalah kunci untuk menguasai konsep yang lebih kompleks (Ndani & Selvia, 2023). Dalam konteks ini, kurangnya pemahaman terhadap materi prasyarat (Bonaso & Sihotang, 2023), sebagaimana diungkapkan dalam wawancara, menunjukkan bahwa mahasiswa belum memiliki pemahaman konseptual yang solid. Hal ini selaras dengan teori beban kognitif (Jong, 2010), yang menyatakan bahwa ketika beban kognitif terlalu tinggi, kemampuan individu untuk memproses informasi baru berkurang. Ketika mahasiswa harus menangani konsep baru dalam Analisis Real tanpa pemahaman yang kuat tentang materi dasar, beban kognitif mereka meningkat, yang pada akhirnya menghambat proses pembelajaran mereka.

Teori penguasaan prosedural (*procedural fluency*) dan refleksi (Pelayo et al., 2023), juga relevan dalam membahas

temuan ini. Menurut Kilpatrick (2001) dan Friantini (2021), penguasaan prosedural mencakup kemampuan untuk melakukan prosedur matematika dengan lancar dan akurat. Data tes dan wawancara menjelaskan bahwa mahasiswa sering kali tidak mampu membuat penyelesaian yang sistematis dan kurang lengkap dalam memberikan alasan untuk setiap langkah pembuktian. Hal ini menunjukkan bahwa mereka belum menguasai prosedur pembuktian secara memadai. Selain itu, refleksi—yaitu kemampuan untuk menilai dan mengevaluasi proses pembuktian—(Hakim & Tadjuddin, 2024) adalah bagian penting dari pemahaman matematika (Tisngati & Genarsih, 2021). Nisa (2021) menekankan pentingnya refleksi dalam memperkuat pemahaman konseptual dan prosedural. Mahasiswa yang tidak mampu membuat kesimpulan yang tepat menunjukkan kurangnya refleksi kritis (Sachdeva & Eggen, 2021), yang sangat penting dalam proses pembuktian.

Penelitian terdahulu juga telah mengidentifikasi berbagai faktor yang mempengaruhi kesulitan dalam pembuktian matematis yang sejalan dengan temuan penelitian ini. Stylianides (2011) menekankan bahwa pembuktian tidak hanya tentang verifikasi kebenaran tetapi juga tentang pemahaman mendalam terhadap konsep-konsep matematika. Mahasiswa yang kurang paham dalam penggunaan premis dan tidak tahu cara melanjutkan pembuktian menunjukkan bahwa mereka tidak memiliki pemahaman mendalam (Syamsuri et al., 2018). Penelitian oleh Lestari (2024) juga menunjukkan bahwa mahasiswa sering kali gagal memahami struktur logis dari argumen matematika, yang tercermin dalam kesulitan mereka dalam pembuktian langsung.

Selain itu, pengaruh dari kurangnya latihan praktis juga telah diidentifikasi sebagai faktor penting (Chand et al., 2021). Mujib &

Firmansyah (2022) menekankan bahwa latihan yang berkelanjutan dan pengalaman dengan berbagai jenis pembuktian sangat penting untuk mengembangkan kemampuan mahasiswa dalam analisis matematika. Mahasiswa yang jarang berlatih di rumah dan sulit memahami materi dari buku teks karena kurangnya detail menunjukkan kurangnya eksposur dan latihan yang memadai, yang selanjutnya menghambat penguasaan mereka terhadap pembuktian matematis.

Berdasarkan hasil analisis jawaban mahasiswa, kesulitan utama muncul karena ketidakpahaman konsep dan penggunaan teori yang tidak tepat; banyak mahasiswa salah sejak awal menuliskan premis, sehingga langkah selanjutnya juga keliru. Kesalahan ini terlihat pada lemahnya alasan logis dan kurang runtutnya penyusunan bukti. Hasil wawancara mendukung temuan ini, di mana mahasiswa mengaku belum memahami konsep dasar dengan baik, jarang berlatih, dan kurang aktif berdiskusi, sehingga proses pembuktian matematis menjadi terhambat.

PENUTUP

Penelitian ini berhasil menelusuri kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematis pada mata kuliah Pengantar Analisis Real yaitu: kesalahan memulai pembuktian, kesalahan menggunakan konsep, kurang sistematis sehingga tidak diperoleh bukti yang benar. Pada tahap proses pembuktian ditemukan tingkat kesulitan mahasiswa: (i) memahami soal pembuktian 44,83%, (ii) melaksanakan proses pembuktian 52,49%, dan (iii) menyusun kesimpulan hasil pembuktian 65,52%. Faktor penyebab utama kesulitan tersebut adalah kurangnya pemahaman terhadap: materi prasyarat, konsep dan keterkaitan antar konsep, keterbatasan dalam memahami buku rujukan, serta minimnya latihan dan diskusi kelompok.

Untuk meningkatkan kemampuan pembuktian matematis, mahasiswa disarankan untuk terlebih dahulu menguasai konsep atau materi perkuliahan yang menjadi dasar dalam proses pembuktian. Selain itu, mahasiswa juga perlu lebih banyak berlatih melalui diskusi kelompok dan latihan soal yang terarah. Dari sisi pengajar, disarankan untuk memberikan penekanan lebih pada pemahaman konsep dasar sebelum masuk ke tahap pembuktian formal. Pengajar juga dapat memfasilitasi kegiatan pembelajaran yang lebih interaktif, seperti pembelajaran berbasis masalah (*problem-based learning*) atau diskusi berbimbing, serta memberikan umpan balik yang konstruktif terhadap argumen atau langkah-langkah pembuktian yang disusun mahasiswa. Dengan demikian, mahasiswa tidak hanya menghafal bentuk pembuktian, tetapi juga memahami proses berpikir logis di baliknya.

DAFTAR RUJUKAN

- Altıparmak, K., & Öziş, T. (2005). An investigation upon mathematical proof and development of mathematical reasoning. *Ege Journal of Education*, 6(1), 25–37.
- Bonaso, & Sihotang, H. (2023). Analysis of Student Difficulty Levels in Solving Spatial Structure Problems for Grade IX Students at SMPN 2 Krounjendit Mindiptana. *Riwayat: Educational Journal of Gistory and Humanities*, 6(3), 905–913. <https://doi.org/10.24815/jr.v6i3.33636>
- CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof?. *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1), 33–60.
- Chand, S., Chaudhary, K., Prasad, A., & Chand, V. (2021). Perceived Causes of Students' Poor Performance in

- Mathematics: A Case Study at Ba and Tavua Secondary Schools. *Front. Appl. Math. Stat*, 7(April), 1–13. <https://doi.org/10.3389/fams.2021.614408>
- Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2010). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Pustaka Pelajar.
- Edwards, & Ward. (2008). *The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in*. 223–232.
- Firmasari, S., Herman, T., & Firdaus, E. F. (2022). Rigorous Mathematical Thinking: Conceptual Knowledge and Reasoning in the Case of Mathematical Proof. *Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif*, 13(2), 246–256.
- Friantini, R. N., Winata, R., & Annurwanda, P. (2021). Procedural Fluency from the View of Students of Mathematical Disposition Level through Google Classroom Assisted Learning. *Formatif: Jurnal Ilmiah Pendidikan MIPA*, 11(1), 201–216.
- García-garcía, J., & Dolores-flores, C. (2020). Exploring Pre-university Students' Mathematical Connections when Solving Calculus Application Problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 5211. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429>
- Hakim, F., & Tadjuddin, N. F. (2024). Increasing Students' Mathematical Proof Ability Through Commognitive Framework Based Assessment Instrument. *Matematika Dan Pembelajaran*, 12(1), 38–48. <http://dx.doi.org/10.33477/mp.v12i1.5446>
- INTRODUCTION
- Halpern, J. Y., & Pucella, R. (2006). A Logic for Reasoning about Evidence. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 25, 1–34.
- Hamdani, D., Purwanto, Sukoriyanto, & Anwar, L. (2023). Causes of Proof Construction Failure in Proof by Contradiction. *Journal on Mathematics Education*, 14(3), 415–448. <https://doi.org/http://doi.org/10.22342/jme.v14i3.pp415-448>
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.
- Harel, G. (2024). Epistemological Justification. *ZDM-Mathematics Education*. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-024-01603-w>
- Helma, Murni, D. (2020). *Pengembangan Lembaran Kerja Aktif Mengintegrasikan Statement And Reason Untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah*. 184.
- Inglis, M., & Mejía-ramos, J. P. (2021). Functional Explanation in Mathematics. *Synthese*, 198(s26), 6369–6392. <https://doi.org/10.1007/s11229-019-02234-5>
- Ireniza, C., & Subayani, N. W. (2024). Analysis of Mathematics Learning Difficulties in Addition and Subtraction Material in Class II of SD Negeri 1 Ngumpul. *Pedagogia: Jurnal Pendidikan*, 13(1), 106–119. <https://doi.org/10.21070/pedagogia.v13i1.1644>
- Isnani, I., Waluya, S. B., Dwijanto, D., & Asih, T. S. N. (2022). Analysis Of Students' Difficulties In Mathematical Proof Ability Viewed From An Epistemological Aspect. *International Conference on Science, Education*

- and Technology, 735–739.
- Isnani, T., Handoko, H., & Saluky. (2023). Analysis of Students' Mathematical Literacy Ability in Solving Mathematical Problems in View of Logical Intelligence. *Educational Insights*, 1(2), 41–57. <https://doi.org/10.58557/eduinsights.v1i2>
- Jong, T. De. (2010). Cognitive Load Theory, Educational Research, and Instructional Design: Some Food for Thought. *Instr Sci*, 38, 105–134. <https://doi.org/10.1007/s11251-009-9110-0>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up Helping Children Learn Mathematics*. Library of Congress Cataloging.
- Lestari, D. T., Hasanah, R. U., Anggraini, P., & Utami, N. (2024). Analisis Jenis Kesalahan Mahasiswa dalam Pembuktian Matematis pada Mata Kuliah Analisis Real. *Populer: Jurnal Penelitian Mahasiswa*, 3(2), 170–179. <https://doi.org/10.58192/populer.v3i2.2307>
- Lestari, K. E. (2015). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Menggunakan Pendekatan Induktif-Deduktif pada Mata Kuliah Analisis Real. *Mendidik: Jurnal Kajian Pendidikan Dan Pengajaran*, 1(2), 128–135.
- Martias, L. D. (2021). Stastistika Deskriptif sebagai Kumpulan Informasi. *Fikris: Jurnal Ilmu Perpustakaan Dan Informasi*, 16(1), 40–59.
- Minggi, I., Paduppai, D., & Assagaf, S. F. (2016). Penyebab Kesulitan Mahasiswa dalam Pembuktian Matematika. *Jurnal Penelitian Pendidikan INSANI*, 19(1), 18–22.
- Moore, R. C. (1990). College students' difficulties in learning to do mathematical proofs. *Doctoral Dissertation, University of Georgia, Athens*.
- Mujib, A., & Firmansyah. (2022). Improvement Habits of Minds in Constructing Mathematical Proof Using DNR-model. *AIP*, 2577(020038), 1–7. <https://doi.org/https://doi.org/10.1063/5.0096095> Published
- Mulyanti, B., Purnama, W., & Pawinanto, R. E. (2020). Distance Learning in Vocational High Schools during the COVID-19 Pandemic in West Java Province, Indonesia. *Indonesian Journal of Science & Technology*, 5(2), 271–282.
- Murni & Helma. (2023). *The effect of using flow proof in conducting preliminary analysis in real analysis courses to improve mathematics problem solving* *The Effect of Using Flow Proof in Conducting Preliminary Analysis in Real Analysis Courses to Improve Mathematics Problem Sol.* 060014(February).
- Murni, D., & Helma, H. (2021). Study of Student Learning Habits and Their Relationship with Learning Outcomes in Elementary Linear Algebra Courses. *Journal of Physics: Conference Series*, 0–7. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1742/1/012010>
- Nance, D. A. (1988). *The Best Evidence Principle*. Faculty Publications. https://scholarlycommons.law.case.edu/faculty_publications/463
- Ndahawali, H. O., Hariyani, S., & Farida, N. (2020). Analysis of Students ' Critical Thinking Skills in Solving Mathematics Problems on Pythagoras. *Journal of Education and Learning Mathematics*

- Research (JELMaR)*, 1(2), 1–7.
<https://doi.org/https://doi.org/10.37303/jelmar.v1i2.19> To
- Ndani, Y. E., & Selvia, E. (2023). Describe The Understanding of Mathematical Concepts in Class VII Junior High School Students Regarding Objective Questions. *Didaktika: Jurnal Kependidikan*, 17(2), 64–72.
<https://doi.org/Doi.org/10.30863/didaktika.v17i2.5456>
- Netson, B. P. H., & Ain, S. Q. (2021). Factors Causing Difficulty in Learning Mathematics for Elementary School Students. *International Journal of Elementary Education*, 6(1), 134–141.
<https://doi.org/https://dx.doi.org/10.23887/ijee.v6i1>
- Nisa, L. C., Kartono, Waluya, B., & Mariani, S. (2021). Developing Mathematical Conceptual Understanding through Problem-Solving: The Role of Abstraction Reflective. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*, 574(Iset 2020), 38–42.
- Noto, M. S., Amiruddin, H., Maemunah, S., Bakar, M. T., & Sumarni, P. (2023). Students' Mathematical Logical Thinking in Terms of Learning Style. *Rangkiang Mathematics Journal*, 2(1), 10–17.
- Pelayo, E. O., Lomibao, L. S., & Tan, R. G. (2023). Conceptual Understanding vs. Procedural Fluency: A Literature Review on the Mathematics Teachers Emphasis in Teaching of Rational Algebraic Expressions. *Journal of Innovations in Teaching and Learning*, 3(1), 54–59.
<https://doi.org/10.12691/jitl-3-1-10>
- Putri, R. A. (2015). Problematika dalam Pembuktian Pernyataan Menggunakan Prinsip Induksi Matematika serta Alternatif Penyelesaiannya. *Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan UNY*, 913–920.
- Radiusman. (2020). Studi Literasi: Pemahaman Konsep Siswa pada Pembelajaran Matematika. *FIBONACCI: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Matematika*, 6(1), 1–8.
<https://doi.org/https://dx.doi.org/10.24853/fbc.6.1.1-8>
- Robert G. Bartle, I Donald R, S. (2011). *Introduction To Real Analysis* (Fourth Edi). John Wiley & Sons, Inc.
- Rofiqoh, I., & Zulhawati. (2020). *Metode Penelitian Kuantitatif, Kualitatif dan Campuran*. Pustaka Belajar.
- Sabri, & Minggi, I. (2014). Students' Difficulties in Mathematics Proofs. *Proceeding of The First International Conference on Science (ICOS-1)*, 272–280.
- Sachdeva, S., & Eggen, P.-O. (2021). Learners' Critical Thinking About Learning Mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3), 1–18, em0644.
<https://doi.org/https://doi.org/10.29333/iejme/11003>
- Salsabila, E., Ratnaningsih, & Hadi, I. (2015). Pembekalan Pemahaman Metode Pembuktian Matematika dan Penerapan Strategi Abduktif-Deduktif Untuk Mengembangkan Kemampuan Membuktikan Konsep Aljabar Abstrak Pada Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNJ. *Jurnal Matematika Integratif*, 11(1), 15–24.
- Selden, A., & Selden, J. (2008).) Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs. In M. Carlson & C. Rasmussen. (Eds.), *Making the connection: Research and*

- teaching in undergraduate mathematics,. *Mathematical Association of America*, (pp. 95–110.
- Siregar, N. F. (2019). Kesulitan Mahasiswa dalam Pembuktian Matematis Pokok Bahasan Sifat Urutan pada Bilangan Real. *Rumah Jurnal IAIN Padangsidempuan*, 45–54.
- Stefanowicz, A., & Kyle, J. (2014). *Proofs and Mathematical Reasoning* (Issue September). University of Birmingham.
- Stylianides, A. J. (2011). Towards a Comprehensive Knowledge Package for Teaching Proof: A Focus on the Misconception that Empirical Arguments are Proofs. *Pythagoras*, 32(1), 1–10. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v32i1.14>
- Susanna. (2020). *Discrete Mathematics with Applications Fifth Edition*. Cengage Learning.
- Syamsuri, Marethi, I., & Mutaqin, A. (2018). Understanding on Strategies of Teaching Mathematical Proof for Undergraduate Students. *Cakrawala Pendidikan*, 2, 282–293.
- Tisngati, U., & Genarsih, T. (2021). Reflective Thinking Process of Students in Completing Mathematical Problems Based on Mathematical Reasoning Ability. *Journal of Physics: Conference Series*, 1776, 1–9. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1776/1/012035>
- Utomo, D. P., & Huda, M. (2020). *Pemahaman Relasional Analisis Proses Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika*. BILDUNG.
- Uyen, B. P., Tong, D. H., Loc, N. P., & Thanh, L. N. (2021). The Effectiveness of Applying Realistic Mathematics Education Approach in Teaching Statistics in Grade 7 to Students' Mathematical Skills. *Journal of Education and E-Learning Research*, 8(2), 185–197. <https://doi.org/10.20448/journal.509.2021.82.185.197>
- Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119.
- Yusup, M. (2023). Students' Errors in Solving Math Problems in the Form of Stories on the Topic of Sequences and Series. *Jurnal Inovasi Pembelajaran Matematika: PowerMathEdu*, 02(03), 269–280.