

MODEL PENAMPANG BUJUR BINTANG BEROTASI DENGAN VARIASI KECEPATAN SUDUT

Iwan Setiawan¹

ABSTRAK: Konfigurasi kesetimbangan mekanis pada bintang-bintang berotasi ditelaah melalui model Roche. Pada kajian ini bintang diperlakukan sebagai benda tegar, sedangkan geometrinya ditentukan berdasarkan persamaan equipotensial. Kecepatan rotasi bintang menyebabkan perubahan pada kesetimbangan bintang, meningkatnya kecepatan rotasi akan menyebabkan berkurangnya jejari polar bintang dan sebaliknya akan menyebabkan peningkatan jejari khatulistiwa bintang tersebut. Telah ditentukan penampang membujur bintang-bintang berotasi dari berbagai massa dan kecepatan sudut.

Kata Kunci: rotasi bintang, kecepatan rotasi, penampang membujur

PENDAHULUAN

Bintang mengalami rotasi seperti juga Bumi. Diketahui bahwa akibat rotasi, jejari equatorial Bumi 21,4 km lebih panjang dibanding jejari kutubnya (Maeder, 2009). Bintang yang memiliki rotasi tinggi, jejari khatulistiwa bahkan dapat mencapai 1,5 jejari polar (Ekstrom, dkk, 2008). Ini menunjukkan bahwa rotasi cukup berpengaruh pada bintang. Mekanisme kesetimbangan pada bintang yang berotasi sudah dipelajari sejak lama, beberapa model telah dikembangkan. Contohnya adalah model Mclaurin, yang menganggap kerapatan bintang yang tetap dan model Roche, yang beranggapan sebaliknya (kerapatan yang tidak tetap). Terdapat perbedaan

yang cukup mencolok antara kedua model ini. Dalam model Mclaurin, perubahan mekanisme kesetimbangan terjadi pada rotasi yang tinggi. Nilai maksimum kecepatan sudut (dianggap rotasi benda tegar) adalah $\frac{\Omega}{\omega_{max}} = 0,4494 G\pi\rho$ (Maeder, 2009) kenyataannya akan terjadi ketidakstabilan sebelum mencapai batas kecepatan angular ini. Pada model Roche dengan Ω seragam (bintang dianggap sebagai rotasi benda tegar), perubahan kesetimbangan juga akan terjadi, dan didapatkan bahwa perbandingan antara jejari kutub dan jejari equatorial akan mencapai 2/3 pada kecepatan sudut maksimum yaitu $\Omega = 0,7215 G\pi\bar{\rho}$ dengan $\bar{\rho}$ adalah kerapatan rata-rata. Pendekatan dengan model Roche

¹ Program Studi Pendidikan Fisika Universitas Bengkulu
Email: iwanphysics@gmail.com

biasanya lebih banyak digunakan karena lebih dekat kepada fakta yang ada.

Permukaan bintang adalah daerah ekipotensial, yakni $\Psi = \text{tetapan}$. Andaikan kita tinjau sebuah bintang dengan massa total M dan $R(\theta)$ jejari bintang itu pada kolatitud θ . Karena gaya sentrifugal di daerah kutub bernilai nol, maka potensial pada kutub

bintang itu adalah $-GM/R_P$, dengan R_P jejari kutub bintang. Oleh karenanya, nilai potensial di berbagai tempat di permukaan bintang itu adalah

$$\frac{GM}{R_P} = -\frac{GM}{R(\theta)} - \frac{1}{2}\Omega^2 R(\theta)^2 \sin^2 \theta \quad (1)$$

Jika e_r dan e_θ merupakan vektor satuan dalam arah radial dan arah bujur, maka vektor percepatan gravitasi efektif pada permukaan bintang dapat dituliskan sebagai:

$$g_{ef} = -\frac{GM}{R(\theta)^2} - \Omega^2 R(\theta) \sin^2 \theta e_r + \Omega^2 R \theta \sin \theta \cos \theta e_\theta \quad (2)$$

Teorema Von Zeipel menyatakan hubungan antara fluks radiasi pada kolatitud θ di permukaan bintang yang berotasi dengan percepatan gravitasi efektif lokal (Maeder dan Meynet, 2000). Jika kita tinjau bintang yang berotasi seperti rotasi benda tegar, fluks radiasi dapat dituliskan sebagai

$$F(\Omega, \theta) = -\chi \nabla T(\Omega, \theta) \quad (3)$$

dengan

$$\chi = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \quad (4)$$

Karena bintang berada dalam keadaan barotropik, maka

$$F(\Omega, \theta) = -\frac{dT}{dP} P(\Omega, \theta) = -\rho \chi \frac{dT}{dP} g_{ef} \quad (5)$$

Dengan demikian, dari hubungan antara luminositas bintang dan fluks radiasi, didapatkan

$$F(\Omega, \theta) = -\frac{L}{4\pi GM_*} g_{ef}(\Omega, \theta) \quad (6)$$

dengan

$$M_* = M \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_m} \right) \quad (7)$$

dan ρ_m adalah rapat massa rata-rata bahan pada permukaan bintang itu.

Pada bintang yang berotasi, percepatan gravitasi total bintang merupakan penjumlahan beberapa percepatan: percepatan gravitasi murni, percepatan sentrifugal, dan percepatan oleh tekanan radiasi (Maeder dan Meynet, 2000). Hal ini dinyatakan dalam persamaan berikut

$$g_{tot} = g_{ef} + g_{rad} = g_{gr} + g_{rot} + g_{rad} \quad (8)$$

dengan g_{rad} diberikan oleh

$$g_{rad} = \frac{1}{\rho} \nabla P_{rad} = \frac{\kappa \theta F}{c} \quad (9)$$

Faktor $\kappa \theta$ adalah kedekatan bahan pada kolatitud θ . Dengan memanfaatkan persamaan (6) dan (8) didapatkan persamaan 10.

$$g_{tot} = g_{ef} \left(1 - \frac{\kappa \theta L(P)}{4\pi c G M_*} \right), \quad (10)$$

Pada persamaan ini efek rotasi muncul pada g_{ef} dan pada ungkapan di dalam kurung. Jika kita tinjau batas fluks secara lokal, yaitu keadaan dengan $g_{tot} = 0$ [Maeder dan Meynet, 2000], maka $g_{rad} = -g_{ef}$. Batas fluks, oleh karena itu, diberikan oleh

$$F_{lim} \theta = -\frac{c}{\kappa \theta} g_{ef} \theta \quad (11)$$

Dari persamaan ini, jika faktor Edington lokal $\Gamma_{\Omega}(\theta)$ didefinisikan sebagai nisbah (rasio) antara besarnya fluks sebenarnya dengan besarnya fluks batas lokal, maka didapatkan

$$\Gamma_{\Omega} \theta = \frac{\kappa \theta L(P)}{4\pi cGM \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_m}\right)} \quad (12)$$

Jika bintang tidak mengalami rotasi (yakni jika Ω bernilai 0), maka $\Gamma_{\Omega}(\theta)$ akan sama dengan faktor Edington Global Γ . Persamaan (10), selanjutnya, dapat ditulis sebagai

$$g_{tot} = g_{ef} \left(1 - \Gamma_{\Omega}(\theta)\right) \quad (13)$$

Persamaan 13 mengungkapkan bahwa pada bintang yang berotasi, percepatan gravitasi total dipengaruhi oleh percepatan gravitasi efektif g_{ef} (yang melibatkan ungkapan tentang kecepatan rotasi bintang) dan oleh luminositas bintang. Melalui ungkapan persamaan (13), keadaan ambang (*critical state*) dapat diperkirakan. Pada keadaan kritis ini percepatan gravitasi total lenyap

sehingga tidak ada lagi percepatan atau gaya yang mengimbangi tekanan termal dari dalam bintang. Akibatnya, bahan-bahan bintang akan lari (buyar). Hal ini tentu saja mengakibatkan persamaan (13) akan mempunyai dua akar, yaitu $g_{ef} = 0$ atau $\Gamma_{\Omega} \theta = 1$. Keadaan ini mengakibatkan adanya batas (limit) tertentu pada kecepatan rotasi bintang, selain bergantung pada beberapa parameter lain seperti massa bintang dan jejari bintang. Keadaan $g_{tot} = 0$ juga akan memberikan adanya batas pada luminositas bintang sebagaimana dijelaskan di atas, yang disebut sebagai Batas *Eddington* (Meynet, 2008). Keadaan ambang $g_{ef} = 0$ akan dinamakan keadaan ambang pertama, sedangkan keadaan pada $\Gamma_{\Omega} \theta = 1$, disebut keadaan ambang kedua.

Kedaan ambang $g_{tot} = 0$ menurut persamaan (2) diperoleh hanya pada wilayah katulistiwa ($\theta = \pi/2$). Keadaan ini memberikan ungkapan

$$\Omega_{krit}^2 = \frac{GM}{R_{e,krit}^3}, \quad (14)$$

Dengan $R_{e,krit}$ jari-jari bintang di ekuator ketika keadaan kritis itu. Keadaan bintang yang berotasi dengan berbagai kecepatan sudut inilah yang akan dibahas lebih lanjut.

HASIL PENELITIAN

Kita tinjau kembali persamaan permukaan bintang sebagai daerah equipotensial, yakni persamaan (1). Persamaan (1) dapat dituliskan sebagai

$$R^3 - \frac{2GM}{\Omega^2 R_p \sin^2 \theta} R + \frac{2GM}{\Omega^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (15)$$

Persamaan 15 ini memperlihatkan bahwa jejeri bintang yang berotasi, sebagai fungsi sudut kolatitud, memenuhi persamaan polinom pangkat tiga yang bergantung kepada berbagai parameter: tetapan gravitasi (G), massa bintang (M), jejeri polar (R_p), serta parameter kecepatan rotasi bintang itu sendiri (Ω). Jika jejeri bintang ($R(\theta)$) dievaluasi pada semua sudut kolatitud maka akan didapatkan bentuk penampang bintang yang berotasi.

Memfaatkan beberapa data yang menyebutkan tentang parameter-

parameter di atas, penampang membujur sebuah bintang dengan kecepatan rotasi tertentu akan dapat digambarkan dengan terlebih dahulu menyelesaikan persamaan pangkat tiga untuk jejeri bintang, persamaan (15). Persamaan (15) dapat ditulis dalam bentuk

$$R^3 - AR + B = 0 \quad (16)$$

dengan

$$A = -\frac{2GM}{\Omega^2 R_p \sin^2 \theta} \text{ dan } B = \frac{2GM}{\Omega^2 \sin^2 \theta}$$

Persamaan ini merupakan persamaan polinom pangkat tiga dengan parameter yang lebih sederhana, yang jika diselesaikan dengan metode Newton-Raphson dan dengan menggunakan data pada Tabel 1, akan didapatkan jejeri bintang $R(\theta)$ pada kolatitud θ . Perhitungan dengan cara itu menghasilkan Tabel 2, dengan

$$G = 3,8 \cdot 10^{-7} \frac{R_c^3}{M_{\odot}^2} \quad (17)$$

Tabel 1. Parameter-parameter Bintang Berotasi dengan Massa 1xMassa Matahari (1 MM)[Roxburg, 2004]

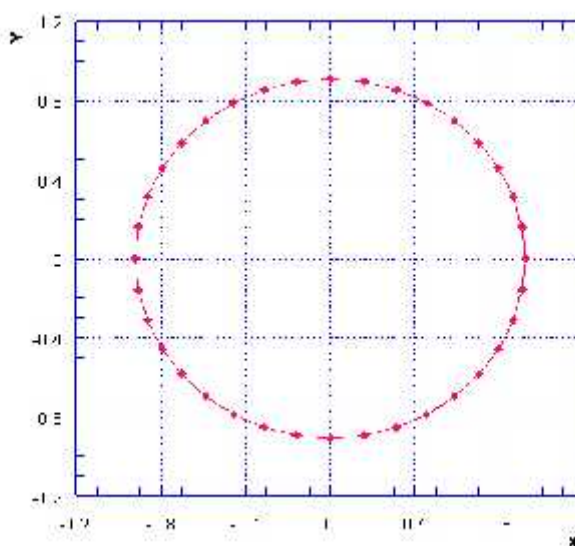
$10^4 \Omega$	0	1,0	3,0	4,0	4,6	4,6254
r	0,000	0,020	0,205	0,451	0,903	1,0018
R_e/R_p	1,000	1,010	1,108	1,237	1,470	1,5198
$V_e/k/s$	0	64	201	288	381	395
L/L_b	0,712	0,705	0,650	0,599	0,561	0,5595
R_e/L_b	0,914	0,919	0,964	1,035	1,189	1,2261
R_p/R_b	0,914	0,909	0,871	0,837	0,809	0,8067

Tabel 2. Jejari Bintang 1 MM dengan $\Omega = 10^{-4}$ rad/s.

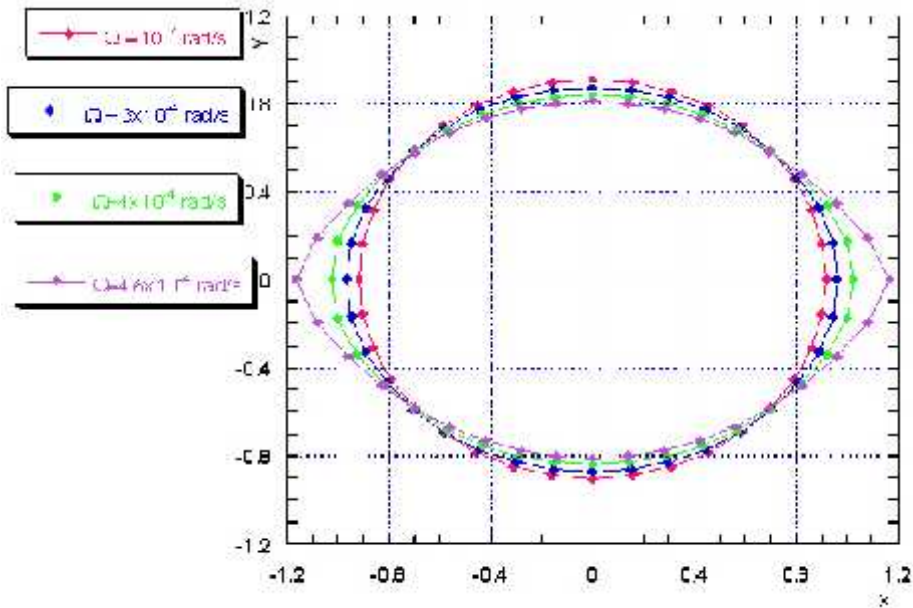
Ω^2	R_p	θ	$\text{Sin}^2\theta$	A	B	R	X	Y
1,00E-08	0,909	10	0,03014	2774,2798	2521,8204	0,9092	0,1578	0,8954
1,00E-08	0,909	20	0,11696	714,8213	649,7726	0,91	0,3112	0,8551
1,00E-08	0,909	30	0,25	334,4334	304,0000	0,9112	0,4556	0,7891
1,00E-08	0,909	40	0,41317	202,3602	183,9454	0,9127	0,5867	0,6991
1,00E-08	0,909	50	0,58676	142,4926	129,5257	0,9143	0,7004	0,5870
1,00E-08	0,909	60	0,74996	111,4844	101,3393	0,9158	0,7931	0,4579
1,00E-08	0,909	70	0,88302	94,6844	86,0682	0,9171	0,8618	0,3136
1,00E-08	0,909	80	0,96983	86,2092	78,3642	0,9179	0,9039	0,1593
1,00E-08	0,909	90	1	83,6084	76,0000	0,9182	0,9182	0,0000

Dari Tabel 2 diperoleh tampak bujur bintang tersebut, sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 1. Hasil perhitungan untuk bintang bermassa 1 MM dalam berbagai kecepatan sudut rotasi diberikan oleh Gambar 2. Untuk Bintang 1 MM dengan kecepatan sudut rotasi $\Omega = 4,6 \times 10^{-4}$ rad/s didapatkan bentuk penampang bujur yang

melancip sepanjang lingkaran katulistiwa, kecepatan rotasi ini merupakan kecepatan yang mendekati kecepatan sudut kritis. Terlihat bahwa peningkatan kecepatan sudut rotasi akan menyebabkan terjadinya perubahan penampang bintang, sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 2.



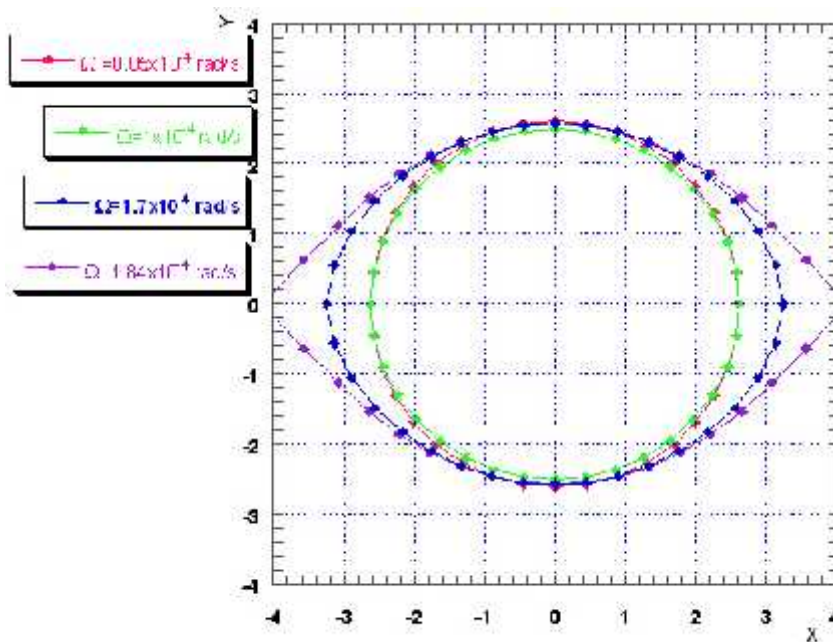
Gambar 1. Tampang bujur Bintang berotasi 1 MM dengan $\Omega = 10^{-4}$ rad/s.



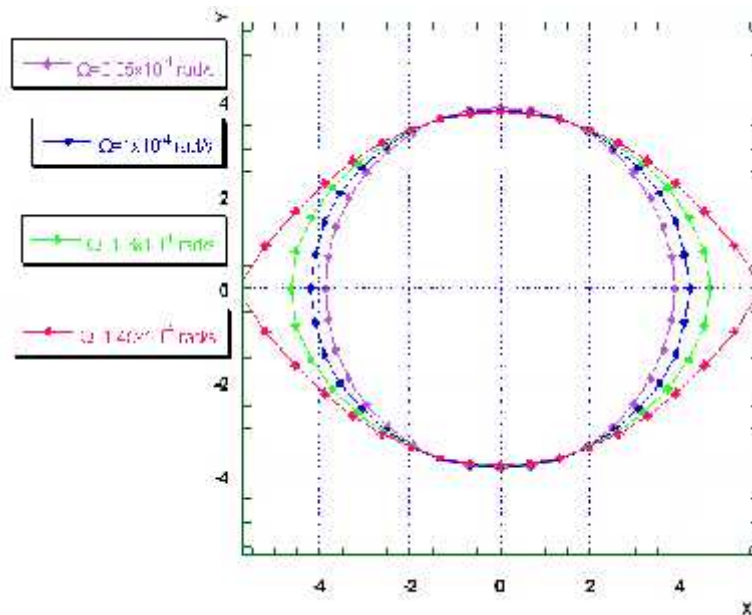
Gambar 2. Penampang Bintang 1 MM dengan variasi nilai Ω

Untuk bintang berotasi dengan massa yang lain didapatkan bentuk tampang bujur sebagaimana pada Gambar 3 dan Gambar 4. Dari beberapa gambar diatas terlihat

bahwa, meningkatnya kecepatan rotasi akan merubah kesetimbangan bintang, yang ditandai dengan penurunan jejari polar dan meningkatnya jejari katulistiwa.



Gambar 3. Penampang bintang 5 MM untuk beberapa



Gambar 4. Penampang bintang 10 MM untuk beberapa nilai

Pada Gambar 3 dan Gambar 4, didapatkan bentuk penampang bujur bintang yang semakin melancip di katulistiwa karena seiring peningkatan kecepatan sudut rotasi. Penampang bintang yang paling melancip pada ujung-ujungnya ini merupakan penampang bintang dengan kecepatan rotasi yang sudah mencapai kecepatan kritis. Ini dapat dibuktikan dengan nilai perbandingan antara jejari equatorial dan jejari polar yang telah mencapai $3/2$.

KESIMPULAN

Kecepatan sudut rotasi bintang berpengaruh besar pada bentuk tampang bujur bintang itu. Meningkatnya kecepatan rotasi bintang () akan merubah kesetimbangan yang

terjadi pada bintang tersebut. Kecepatan rotasi akan berpengaruh kepada bentuk tampang bujur bintang, semakin besar kecepatan rotasi akan menyebabkan terjadinya penurunan terhadap jejari polar bintang, sebaliknya meningkatnya kecepatan rotasi bintang akan menyebabkan bertambahnya jejari khatulistiwa suatu bintang. Didapatkan bentuk penampang bujur bintang yang semakin melancip pada ujung-ujungnya, seiring dengan semakin meningkatnya kecepatan rotasi bintang.

DAFTAR PUSTAKA

De Boer, K.S., Seggewiss, W., 2008 *Stars and Stellar Evolution*, EDP Sciences, France

Ekstrom, S, Meynet G, Maeder, A, Barblan F. 2008. *Evolution*

- Towards the Critical Limit and the Origin of Be Stars. *arXiv:0711.1735v1*.
- Maeder, A. 2009. *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars*. Springer. Verlag Berlin Heidelberg, Germany. Pp. 22-80.
- Maeder, A, Meynet, G. 2000. The Eddington and β -Limits, the rotational mass loss for OB and LBV stars. *Astronomy & Astrophysics*, 361 159-166 (2000).
- Meynet, G, Maeder, A. 1996. The Computational Method and Inhibiting Effect of the μ -Gradient. *Astronomy & Astrophysics*. 321, 465-476 (1997).
- Meynet, G. 2008. *Physics of Rotation in Stellar Models*. *arXiv:0801.2944v1*.
- Roxburgh, I.W. 2004. 2-Dimensional Models of Rapidly Rotating Stars, Uniformly Rotating Zero Age Main Sequence Stars. *Astronomy & Astrophysics*, 428, 171-179 (2004).
- Zahn, J.P., 1992 *Circulation and Turbulance in Rotating Stars*, A&A. 265,115-132
- Zeng, Y.R., 2002 *A More Powerful Evolution Model for Rotating Stars*, A &A. 394-965-969.