Perumusan Fungsi Green Sistem Osilator Harmonik dengan Menggunakan Metode Integral Lintasan (*Path Integral*)

Sutisna

Abstract: The path integral is a method that often used in the quantum problems calculation. For example; the calculation of quantum system energy that has complex potential form. The method gives more easily than perturbation method. The method is also used to derive Green function, which usually used Fourier transformation. The Green function has widely application in quantum physics, since it used to compute solution of inhomogen differential equation as Schrodinger equation. In the particle physics, the Green function used as propagator in Feynman's diagram. Considering the importance of Green function, and the powerfull of path integral method, in the paper, the method used to derive the formula of Green function for quantum harmonic oscillator system. The system has widely application to give more information of physical phenomena, for example, the atomic vibration in solid state. The result was also compared with Fourier transformation method and both give the same result as hoped.

Keywords: Green function, harmonic oscillator, path integral method

PENDAHULUAN

Fungsi Green merupakan salah satu metode penting dalam fisika, baik dalam tinjauan klasik maupun tinjauan kuantum. Secara umum fungsi Green digunakan untuk mengkonstruksi solusi persamaan diferensial tak homogen, misalnya persamaan Schrodinger. Sedangkan dalam kuantum relativistik (teori medan kuantum), fungsi Green adalah suatu kuantitas yang menyatakan ekspektasi dari perkali-an operator-operator medan dalam waktu yang terurut (Ismail, 2000:1). Di dalam fisika partikel, fungsi Green pada umumnya juga digunakan sebagai propagator di dalam diagram Feynman (Ryder, H. L., 1985).

Cara yang biasa digunakan untuk merumuskan fungsi Green adalah dengan menggunakan transformasi Fourier. Tetapi metode ini kurang sesuai jika diterapkan ke dalam masalah-masalah dalam mekanika kuantum yang kompleks. Cara lainnya adalah dengan menggunakan metode integral lintasan. Integral lintasan merupakan salah satu metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan berbagai problem kuantum. Beberapa keuntungan dari

Staf Pengajar Jurusan Fisika, FMIPA, Universitas Jember.

penggunaan metode integral lintasan adalah (Gross, 1993):

1. Integral lintasan dapat digunakan untuk mendapatkan solusi-solusi secara eksak dan numerik dari teori medan interaksi kuat (dimana teori perturbasi tidak dapat mengerjakannya).
2. Integral lintasan menyediakan cara yang mudah dalam perhitungan kuantisasi dan ekspresi-ekspresi fungsi Green yang berkaitan erat dengan amplitudo dalam proses fisika seperti peristiwa hamburan dan peluruhan partikel.
3. Integral lintasan memiliki kerangka kerja yang lebih umum secara teoritik.
4. Lebih jauh, hubungan yang erat antara mekanika statistik dan mekanika kuantum, atau teori medan statistik dan teori medan kuantum terlihat sederhana dengan menggunakan integral lintasan.

Dari uraian di atas, mengingat pentingnya peranan fungsi Green dan sifat *powerfull* dari metode integral lintasan, maka dalam paper ini metode tersebut akan digunakan untuk merumuskan fungsi Green dari sistem osilator harmonik kuantum. Sistem ini memiliki aplikasi yang luas dalam membahas berbagai fenomena fisis. Misalnya di dalam fisika atom, vibrasi atom di dalam molekul dan zat padat dapat dihampiri dengan gerak osilator harmonik. Sedangkan di dalam fisika inti potensial rata-rata nukleon di dalam inti juga sering dihampiri dengan potensial harmonik. Selanjutnya osilator harmonik sederhana merupakan sebuah model yang banyak digunakan sebagai model pendekatan dari sistem dengan potensial yang lebih kompleks. Meskipun osilasi di alam yang kita jumpai adalah gerak osilasi teredam (*damped*) atau terpaksa (*forced*) namun simpangan kecilnya terhadap titik kesetimbangan dapat sangat akurat dihampiri dengan osilator harmonik sederhana (Paken P., 2004).

Sebagai pembanding hasil yang diperoleh, akan dihitung juga fungsi Green dengan menggunakan metode transformasi Fourier.

METODOLOGI

Pembahasan dalam paper ini dilakukan dengan pendekatan metode teoretik. Secara garis besar, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut: pertama mencari solusi fungsi Green dengan menggunakan metode transformasi Fourier, dengan mula-mula mendefinisikan gaya eksternal $J(k)$ dalam ruang momentum. Dari definisi gaya eksternal ini, kemudian digunakan untuk mencari solusi umum dari persamaan gerak osilator harmonik dengan menggunakan transformasi Fourier, yang selanjutnya digunakan untuk merumuskan fungsi Green dari sistem yang ditinjau. Kedua adalah merumuskan fungsi Green dengan menggunakan metode integral lintasan, dengan mula-mula mendefinisikan fungsi Green secara umum, kemudian menyesuaikan integral lintasan yang telah ada dengan fungsi Green tersebut. Langkah terakhir adalah menerapkan fungsi Green tersebut untuk menghitung energi dari sistem osilator harmonik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penurunan Fungsi Green dengan Menggunakan Metode Transformasi Fourier

Untuk menyelesaikan fungsi Green dengan menggunakan metode transformasi Fourier, dimulai dengan menuliskan persamaan gerak dari sistem yang ditinjau (osilator harmonik)

$$-m\ddot{q}+m\omega^2 q = J(t), \text{ ....} \quad (1)$$

Dimana *m* adalah massa partikel, *ω* frekwensi sudut, *q* koordinat umum dan $J(t)$ adalah sumber gaya eksternal. Dengan mengasumsikan $J(t)$ sebagai hasil dari suatu transformasi Fourier maka dapat dituliskan (dalam ruang momentum)

$$J(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt}J(t)dt \text{ ....} \quad (2)$$

dimana *k* adalah bilangan gelombang.

Nilai $J(t)$ harus menuju nol untuk $|t|$ yang besar, sehingga $q(t)$ dan turunan pertamanya akan mendekati nol untuk $|t|$ yang besar. Substitusi persamaan (1) ke persamaan (2), maka diperoleh:

$$J(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt}\left(-m\ddot{q}+m\omega^2 q\right)dt,$$

atau

$$J(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} -m\frac{d^2q(t)}{dt^2}e^{ikt}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} m\omega^2 q(t)e^{ikt}dt \text{ ....} \quad (3)$$

dengan permisalan

$$q(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt}q(t)dt \text{ ....} \quad (4a)$$

maka persamaan (3) dapat ditulis menjadi:

$$J(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}-m\frac{d^2q(t)}{dt^2}e^{ikt}dt+m\omega^2q(k)$$

. ... (4b)

Integral suku pertama persamaan (4b) memberikan

$$\int_{-\infty}^{\infty}m\frac{d^2q(t)}{dt^2}e^{ikt}dt=\left[\frac{dq}{dt}e^{ikt}\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{dq}{dt}\right)\frac{d\left(e^{ikt}\right)}{dt}$$
$$=-ik\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{dq}{dt}\right)e^{ikt}dt.$$

Sehingga persamaan (4b) dapat ditulis menjadi:

$$J(k)=\frac{imk}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{dt}e^{ikt}dt+m\omega^2q(k).$$

$$J(k)=\left(mk^2+m\omega^2\right)q(k), \quad .... \quad (5)$$

atau

$$q(k)=\frac{J(k)}{k^2m+m\omega^2} \quad .... \quad (6a)$$

dengan menggunakan sifat transformasi Fourier maka dari persamaan (4a) dapat kita dituliskan

$$q(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int q(k)e^{-ikt}dk\ ,$$

yang dengan mensubtitusikan ke persamaan (6a) akan didapatkan

$$q(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J(k)}{k^2m+m\omega^2}e^{-ikt}dk\ .(6b)$$

Dengan menggunakan definisi dari $J(k)$ pada persamaan (2), persamaan (6b) akan menjadi

$$q(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J(t')e^{ikt'}dt}{k^2m+m\omega^2}e^{-ikt}dk$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}G(t,t')J'(t')dt',$$

.... (7a)

dimana

$$G(t,t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik(t-t')}}{mk^2+m\omega^2}dk=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{-ik(t-t')}}{k^2+\omega^2}.$$

.... (7b)

adalah fungsi Green untuk sistem osilator harmonik.

Penurunan Fungsi Green dengan Metode Integral Lintasan

Fungsi Green direlasikan dengan amplitudo untuk proses fisika seperti hamburan dan proses peluruhan. Dalam mekanika kuantum fungsi Green secara umum diekspresikan oleh persamaan di bawah ini (Ryder, H. L., 1985)

$$G^{(n)}(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\langle 0|\hat{T}(\hat{q}(t_1)\hat{q}_2(t_2)\ldots\hat{q}_n(t_n))|0\rangle,$$

dengan $\hat{T}$ menyatakan perkalian urutan waktu (*time ordered product*). Untuk merumuskan fungsi Green ini, mula-mula harus membuat integral lintasan dalam bentuk representasi Heisenberg. Operator $\hat{q}(t)$ adalah operator Heisenberg, yang dikaitkan dengan operator Schrodinger $\hat{q}$ oleh $q(t)=e^{iHt}e^{-iHt}$. Keadaan eigen dari operator Heisenberg adalah $|q,t\rangle;\hat{q}(t)|q,t\rangle=q|q,t\rangle$, dan hubungannya dengan keadaan eigen bebas waktu adalah $|q,t\rangle = e^{iHt}|q\rangle$. Kemudian integral lintasan dapat ditulis sebagai berikut

$$K = \langle q'|e^{-iHT}|q\rangle = \langle q',T|q,0\rangle = \int D\,qe^{iS} \qquad \text{.........................} \quad (8)$$

Dengan integral lintasan ini nantinya akan dicari "fungsi 2-titik (*two point function*)" $G(t_1,t_2)$, yaitu fungsi yang dievalusi antara dua titik yang berdekatan. Langkah pertama yang dilakukan adalah menuliskan "fungsi 2-titik" sebagai berikut (Ryder, H. L., 1985)

$$\langle q',T|\hat{T}(\hat{q}(t_1)\hat{q}_2(t_2))|q,0\rangle \text{ ....} \quad (9)$$

Kemudian akan dipilih suatu metode untuk menentukan kontribusi vakum pada tingkat awal dan akhir (tanpa sumber eksternal).

Untuk $t_1 \rangle t_2$, persamaan (9) menjadi:

$$\begin{aligned}\langle q',T|\hat{T}(\hat{q}(t_1)\hat{q}_2(t_2))|q,0\rangle &= \langle q',T|\hat{T}(\hat{q}(t_1)\hat{q}_2(t_2))|q,0\rangle \\ &= \int dq_1dq_2\langle q',T|q_1,t_1\rangle\underbrace{\langle q_1,t_1|\hat{q}(t_1)}_{\langle q_1,t_1|q_1}\underbrace{q_2(t_2)|q_2,t_2\rangle}_{q_2|q_2,t_2\rangle}\langle q_2,t_2|q,0\rangle \\ &= \int dq_1dq_2q_1q_2\langle q',T|q_1,t_1\rangle\langle q_1,t_1|q_2,t_2\rangle\langle q_2,t_2|q,0\rangle.\end{aligned}$$

Masing-masing elemen persamaan ini merupakan suatu integral lintasan, sehingga dapat ditulis menjadi:

$$\langle q',T|\hat{T}(\hat{q}(t_1)\hat{q}_2(t_2))|q,0\rangle = \int dq_1dq_2q_1q_2\int_{q_1,t_1}^{q',T}D\,qe^{iS}\int_{q_2,t_2}^{q_1,t_1}D\,qe^{iS}\int_{q,0}^{q_2,t_2}D\,qe^{iS} \text{ ....} \quad (10)$$

Persamaan (10) terdiri dari beberapa ekspresi integral lintasan, pertama perubahan posisi awal q ke posisi q_2, kedua perubahan posisi q_2 ke q_1, dan yang ketiga adalah perubahan posisi q_1 ke q'. Selanjutnya kita dapat mengkombinasikan tiga integral lintasan ini sehingga persamaan (10) dapat ditulis menjadi:

$$\langle q',T|\hat{T}(\hat{q}(t_1)\hat{q}_2(t_2))|q,0\rangle = \int_{q,0}^{q',T}D\,q\,q(t_1)\,q(t_2)e^{iS}(t_1 \rangle t_2) \text{ ....} \quad (11)$$

Selanjutnya untuk semua waktu dapat ditulis menjadi:

$$\langle q',T|\hat{T}(\hat{q}(t_1)\,\hat{q}_2(t_2).....\hat{q}_n(t_n))|q,0\rangle = \int_{q,0}^{q',T}D\,q\,q(t_1)\,q(t_2).....q(t_n)e^{iS} \text{ ....} \quad (12)$$

Untuk mendapatkan elemen vakum-ke-vakum, dilakukan dengan cara memperluas tingkat $\langle q', T|$ dan $|q, 0\rangle$ dalam bentuk fungsi eigen Hamiltonian. Dan jika kita buat interval waktu menjadi sangat kecil, maka kontribusi untuk seluruh tingkat lainnya akan hilang secara relatif ke tingkat dasar. Sehingga didapatkan

$$\langle q', T | q, -T\rangle \propto \langle 0, T | 0, -T\rangle = \int Dq e^{iS} \quad (13)$$

Dimana angka "0" menandakan fungsi gelombang suatu keadaan dasar/*ground state*.

Untuk menghitung fungsi Green, dilakukan dengan menambahkan $T(\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)\ldots\hat{q}(t_n))$ ke elemen persamaan (13) yang berkaitan dengan faktor $q(t_1)q(t_2)\ldots\hat{q}(n)$ dalam integralnya, sehingga integral lintasan akan menjadi:

$$\langle 0, T|\hat{T}(\hat{q}(t_1)\hat{q}_2(t_2)\ldots\hat{q}_n(t_n))|0, -T\rangle \propto \int Dq\, q(t_1)q(t_2)\ldots q(t_n)e^{iS} \quad (14)$$

Dari persamaan ini, ekspresi sebelah kiri tidak sesuai dengan definisi fungsi Green seperti apa yang diinginkan karena $|0, \pm T\rangle$ tingkatannya berbeda. Oleh karena itu tingkatan ini harus dieleminasi, sehingga fungsi Green dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \langle 0|\hat{T}(\hat{q}(t_1)\hat{q}_2(t_2)\ldots\hat{q}_n(t_n))|0\rangle \\ &= \frac{\langle 0, T|\hat{T}(\hat{q}(t_1)\hat{q}_2(t_2)\ldots\hat{q}_n(t_n))|0, -T\rangle}{\langle 0, T|0, -T\rangle} \quad (15) \\ &= \frac{\int Dq\, q(t_1)q(t_2)\ldots q(t_n)e^{iS}}{\int Dq e^{iS}}. \end{aligned}$$

Untuk kehadiran sumber eksternal $J(t)$ propagator dapat ditulis menjadi:

$$K = \frac{\int Dq\, e^{i\left(S + \int dt J(t) q(t)\right)}}{\int Dq e^{iS}} \quad (16)$$

Persamaan di atas mengandung sumber eksternal $J(t)$ sehingga dapat dituliskan sebagai integral fungsional $Z[J]$ sebagai berikut

$$Z[J] = \frac{\int Dq\, e^{i\left(S + \int dt J(t) q(t)\right)}}{\int Dq e^{iS}} \quad (17)$$

Jika dioperasikan $Z[J]$ dengan $i^{-i}\,\delta/\delta\, J(t_1)$, akan memberikan

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(t_1)}Z[J]\right)\Bigg|_{J=0} = \left(\frac{\int Dq\, q(t_1) e^{i\left(S+\int dt J(t) q(t)\right)}}{\int Dq e^{iS}}\right)\Bigg|_{J=0}$$

$$= \frac{\int Dq\, q(t_1) e^{iS}}{\int Dq\, e^{iS}}$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(t_1)}Z[J]\right)\Bigg|_{J=0} = \frac{\langle 0,T|\hat{q}(t_1)|0,-T\rangle}{\langle 0,T|0,-T\rangle} = \langle 0|\hat{q}(t_1)|0\rangle$$

Dan turunan *n* kali integral fungsional terhadap sumber eksternal untuk keadaan bebas sumber $(j=0)$ ternyata identik dengan fungsi Green persamaan (15), yaitu sebagai berikut:

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(t_n)}Z[J]\right)\Bigg|_{J=0} = \frac{\int Dq\, q(t_1)\ldots q(t_n) e^{iS}}{\int Dq e^{iS}} = \langle 0|T\hat{q}(t_1)\ldots\hat{q}(t_n)|0\rangle \text{.........} \quad (18)$$

Dalam persamaan di atas, fungsional $Z[J]$ dinamakan sebagai fungsional pembangkit untuk fungsi Green, karena fungsional $Z[J]$ dapat membangkitkan seluruh fungsi Green untuk keadaan vakum.

Untuk menghitung $Z[J]$, mula-mula uji numerator persamaan (17) di bawah ini

$$N \equiv \int Dq\, e^{i\left(S+\int dt J(t) q(t)\right)} \text{................} \quad (19)$$

Dengan S adalah aksi osilator harmonik yang dirumuskan sebagai berikut:

$$S_o = \int dt\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right),$$

Sehingga persamaan (19) menjadi

$$N_0 = \int Dq(t)\exp\left(\int dt\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + Jq\right)\right)$$

.... (20)

Kemudian melakukan integral lintasan terhadap variabel baru *q'* (dimana $q(t) = q_c(t) + q'(t)$, dan q_c adalah solusi klasik) sebagai berikut:

$$\int dt\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + J(\tau)q(t)\right) = \int dt\left[\frac{1}{2}m(\dot{q}_{cJ}(t)+\dot{q}'(t))^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(q_{cJ}(t)+q'(t))^2 + J(\tau)(q_{cJ}(t)+q'(t))\right]$$

$$= \int dt \left(\frac{1}{2} m\dot{q}_c^2(t) - \frac{1}{2} m\omega^2 q_c^2 + J(t) q_c(t) \right) + \int dt \left(m\dot{q}_{cJ}(t)\dot{q}'(t) - m\omega^2 q_c(t) q'(t) + J(t) q'(t) \right) +$$

$$\int dt \left(\frac{1}{2} m\dot{q}'^2(t) - \frac{1}{2} m\omega^2 q'^2(t) \right).$$

Karena suku kedua ruas kanan persamaan ini mengandung $q_c(t)$ dan $q'(t)$, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\int dt \left(m\dot{q}_{cJ}(t)\dot{q}'(t) - m\omega^2 q_c(t) q'(t) + J(t) q'(t) \right) = -\int dt \left(-m\ddot{q}_{cJ}(t) + m\omega^2 q_{cJ}(t) - J(t) \right) q'(t).$$

Karena persamaan ini memenuhi persamaan gerak osilator harmonik (1), maka nilainya akan menjadi nol, seperti di bawah ini,

$$-\int dt \left(-m\ddot{q}_{cJ}(t) + m\omega^2 q_{cJ}(t) - J(t) \right) q'(t) = -\int dt (0) q'(t) = 0$$

Selanjutnya persamaan (20) dapat ditulis sebagai berikut:

$$N_0 = \int Dq \exp\left[\int dt \left(\frac{1}{2} m\dot{q}_c^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q_c^2 - J(t) q_c(t) \right) + \int dt \left(\frac{1}{2} m\dot{q}'^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 q'^2 \right) \right]$$

$$= e^{iS_{Ec}[q_c]} \int Dy \exp \int dt \left(\frac{1}{2} m\dot{q}'^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 q'^2 \right)$$

Dalam persamaan ini integral terhadap variabel *q'* adalah konstan (karena bebas dari J) sebut saja *C*, sehingga numerator dapat dituliskan:

$$N_0 = Ce^{iS_{0J}[q_c]},$$

dimana

$$S_{0J} = \int dt \left(\frac{1}{2} m\dot{q}_c^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 q_c^2 + Jq_c \right)$$

$$= \int dt\, q_c \left(\frac{1}{2} m\ddot{q}_c - \frac{1}{2} m\omega^2 q_c + J \right).$$

Dengan mengingat persamaan gerak osilator harmonik adalah $m\ddot{q} - m\omega^2 q^2 = -J$, maka

$$S_{0J} = \frac{1}{2} \int dt\, J(t) q_c(t). \qquad (21)$$

Dengan mengunakan kenyataan bahwa $q_c(t)$ adalah sesuai dengan persamaan gerak osilator harmonik. Solusi persamaan gerak ini bisa dinyatakan dalam bentuk fungsi Green, untuk ini ambil $G(t,t')$ yang merupakan solusi dari

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) G(t,t') = -\delta(t - t') \qquad (22)$$

Dari persamaan ini dapat dituliskan

$$q_c = \int dt'\, G(t,t') J(t') \qquad (23)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (23) ke dalam persamaan (21), maka akan diperoleh

$$S_{0J} = \frac{1}{2}\int dt\, J(t)\int dt'\, G(t,t')J(t').$$

Sehingga numerator menjadi

$$N_0 = C\exp\left(\frac{1}{2}\int dtdt'\, J(t)G(t,t')J(t')\right) \quad (24)$$

Dengan membagi numerator ini dengan *C* maka akan didapatkan fungsional pembangkit $Z[J]$ sebagai berikut:

$$Z[J] = \exp\left(\frac{1}{2}\int dtdt'\, J(t)G(t,t')J(t')\right) \quad ..(25)$$

Untuk merumuskan fungsi Green dari persamaan (25), dilakukan dengan merubah persamaan (22) menjadi:

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2\right)G(t,t') = -\delta(t-t'),$$

atau

$$G(t,t') = -\frac{\delta(t-t')}{m\left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2\right)} \quad .... (26)$$

dan dengan menggunakan tranformasi Fourier dalam ruang momentum, maka fungsi Green osilator harmonik menjadi:

$$G(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ik(t-t')}\frac{1}{m(k^2+\omega^2)}$$

$$= \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{k^2+\omega^2}e^{-ik(t-t')} \quad .(27)$$

Karena di dalam ruang momentum

$$\delta(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ik(t-t')}$$

dan $\left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2\right) = \left(-k^2 - \omega^2\right)$, dan dari persamaan (27) ini terlihat bahwa operator diferensial $\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)$ mempunyai nilai eigen $\left(k^2 + \omega^2\right)$. Dapat dilihat bahwa fungsi Green yang didapat dengan transformasi Fourier sama dengan fungsi Green yang dirumuskan dengan metode integral lintasan.

Penerapan Fungsi Green untuk Menghitung Energi Sistem Osilator Harmonik

Tinjau persamaan gerak osilator harmonik sederhana persamaan (1), dengan solusi umumnya adalah sebagai berikut:

$$q(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J(t')e^{-ik(t-t')}}{mk^2 + m\omega^2}dk = \int_{-\infty}^{\infty}G(t,t')J'(t')dt',$$

dengan

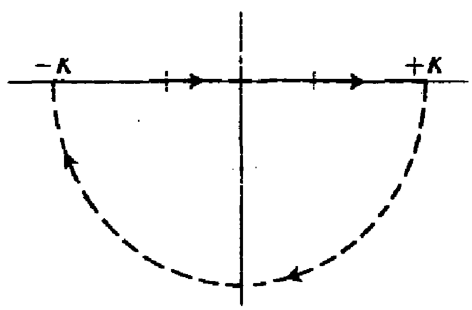
$$G(t,t') = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{e^{-ik(t-t')}}{k^2+\omega^2}.$$

Kemudian dengan mengevaluasi $G(t,t')$ ini, maka dapat dituliskan

$$G(t,t') = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik(t-t')}}{(k-k_1)(k-k_2)}dk \quad (28)$$

dimana $k_1 = \omega$ dan $k_2 = -\omega$. Kemudian untuk mempermudah pengerjaan integral ini mula-mula meninjau persamaan (28) sebagai daerah dari suatu integral permukaan dalam bidang-k. Kontur yang sesuai, misalkan dilabelkan sebagai *C* yaitu suatu lintasan sepanjang akses real dari –K samapai +K yang berbentuk setengah lingkaran yang berjari-jari K. Gambar 1 menunjukkan $t-t' \rangle 0$, sedangkan jika $t-t' \langle 0$, akan ditunjukkan oleh kontur tertutup setengah bidang atasnya yang dirumuskan sebagai berikut:

$$I \equiv \frac{1}{2\pi m}\oint_C \frac{e^{-ik(t-t')}dk}{(k-k_1)(k-k_2)} = \frac{1}{2\pi m}\int_{-K}^{K}\frac{e^{-ik(t-t')}}{(k-k_1)(k-k_2)}dk$$
$$-\frac{1}{2\pi m}\int_{-K}^{K}\frac{e^{-ik(t-t')e^{i\phi}}}{(Ke^{i\phi}-k_1)(Ke^{i\phi}-k_2)}iKe^{i\phi}d\phi \quad \text{......................} \quad (29)$$



Gambar 1. Kontur yang digunakan untuk mengevaluasi fungsi Green untuk sistem osilator harmonik.

Dalam bentuk pertama pada sebelah kanan persamaan ini, integral diambil sepanjang akses real, sedangkan bentuk kedua diambil integral sepanjang setengah lingkaran dengan jari-jari K, yang mana $k = Ke^{i\phi}$ dan $dk = iKe^{i\phi}d\phi$, dan ϕ dievaluasi mulai dari $\phi = 0$ sampai $\phi = -\pi$. Dari persamaan (29) didapatkan

$$2\pi m I = \lim_{K\to\infty}\oint_C \frac{e^{-ik(t-t')}dk}{(k-k_1)(k-k_2)}$$
$$= (2\pi i)\left[\frac{e^{-ik_1(t-t')}}{k_1-k_2} + \frac{e^{-ik_2(t-t')}}{k_2-k_1}\right].$$

Dengan memasukkan nilai k_1 dan k_2, didapatkan

$$I = \frac{\sin\omega(t-t')}{\omega m}.$$

Karena $K \to \infty$, bentuk pertama pada sebelah kanan persamaan (29) tidak lain menjadi $G(t,t')$ persamaan (28), sehingga

$$\frac{\sin\omega(t-t')}{\omega m} = G(t,t') + \lim_{K\to\infty} R\,, \qquad (30)$$

dimana

$$R = -\frac{1}{2\pi m}\int_{-K}^{K}\frac{e^{-ik(t-t')e^{i\phi}}}{\left(Ke^{i\phi}-k_1\right)\left(Ke^{i\phi}-k_2\right)} iKe^{i\phi}d\phi$$

Tetapi integral ini menghilang karena $K\to\infty$, oleh karena itu

$$G(t,t') = \frac{\sin\omega(t-t')}{m\omega}\,,\ t \rangle\ t'\,. \qquad (31)$$

Singularitas dalam konturnya, sehingga,

$$G(t,t') = 0,\quad t\langle t'\,.$$

Sekar

Kemudian dapat diringkas,

$$G(t,t') = \frac{\sin\omega(t-t')}{\omega m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (32)$$

Dan solusi umumnya akan menjadi:

$$q(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{\sin\omega(t-t')J(t')dt'}{\omega m}\,,$$

dimana t_0 adalah kondisi awal yang dipakai. Jika dimisalkan bentuk sumber eksternal adalah:

$$J(t) = J_0 e^{-\alpha t}\,,$$

yang dimulai pada saat $t=0$, dan sistem diasumsikan akan berhenti pada posisi kesetimbangan pada $t=0$, maka persamaan (33) menjadi

$$q(t) = J_0\int_0^t \frac{\sin\omega(t-t')e^{-\alpha t}dt'}{\omega m} = \frac{J_0}{\omega m}\frac{\sin[\omega t-\delta]}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}} + \frac{J_0}{\omega^2+\alpha^2}e^{-\alpha t}$$

dimana $\tan\delta = \frac{\omega}{\alpha}$, dengan δ dalam kuadran pertama atau dalam kuadran kedua. sebagai catatan bahwa kondisi batas $q(0)=0$, $\dot{q}(0)=0$, dipenuhi.

Ketika waktu menjadi sangat besar, maka didapatkan solusi gerak dari osilator harmonik yaitu sebagai berikut:

$$q(t) = \frac{J_0}{\omega m}\frac{\sin[\omega t-\delta]}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (35)$$

Dari hasil ini dapat dihitung energi akhir dari sistem sebagai berikut:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

$$= \frac{J_0{}^2}{2m\left(\omega^2+\alpha^2\right)}$$

KESIMPULAN

Fungsi Green merupakan suatu metode untuk mengkontruksi solusi persamaan deferensial tak homogen. Dari pembahasan yang telah dikerjakan bahwasanya fungsi Green dapat diturunkan dengan menggunakan dua metode yaitu metode transformasi Fourier dan metode integral lintasan. Perumusan fungsi Green dengan menggunakan metode transformasi Fourier adalah diawali dengan mendefinisikan gaya eksternal $J(k)$ dalam ruang momentum, dari definisi ini, dicari solusi dari persamaan gerak osilator harmonik dengan menggunakan transformasi fourier dan sifat-sifat integral. Dan selanjutnya mencari solusi umum persamaan gerak osilator harmonik yang didapat selanjutnya mendefinisikan fungsi Greennya.

Sedangkan perumusan fungsi Green dengan menggunakan metode integral lintasan adalah dimulai dengan mendefinisikan fungsi Green secara umum dalam mekanika kuantum. Kemudian menyesuaikan integral lintasan yang telah ada dengan fungsi Green tersebut dan mencari integral fungsionalnya. Dengan menggunakan integral lintasan ini, diperoleh rumusan fungsi Green dalam mekanika kuantum.

Dari pembahasan juga terlihat bahwa rumusan fungsi Green yang diperoleh kedua metode adalah sama yaitu sebagai berikut:

$$G(t,t') = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\frac{1}{k^2+\omega^2}e^{-ik(t-t')}.$$

DAFTAR PUSTAKA

Arthur, Beiser. 1987. Konsep Fisika Modern. Erlangga: Jakarta

Boas, L. Mary. 1983. Mathematical Methods In The Physical Sciences, 2nd Edition. New York : John Wiley & Son.

B. Bornales, Jinky. 2000. Feynman's Path Integral Formulation : A Short Introduction. MSU-Iligan Institute of Technology : Iligan City

Gasiorowicz, S. 1974. Quantum Physics. Singapore: John Wiley & Sons. Inc.

Greiner, W., Reinhardt, J. 1986. Field Quantization. Berlin: Springer-Verlag.

Ismail. 2000. Propagator Photon untuk Kondisi Gauge Fock-Schwinger hingga Orde-2. Bandung: Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Bandung.

Resnick, Halliday. 1978. Fisika Universitas Jilid I. Erlangga : Jakarta

Ryder, H. Lewis. 1985. Quantum Field Theory. New York: Cambridge University Press.

Sakita, B. 1982. Quantum Theory Of Many-Variable Systems and Field. New York: World Scientific.

Sakurai, J. J. 1985. Modern Quantum Mechanics. California: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. Menlo Park,

W. Bryan, Frederick. 1970. Mathematics Of Classical And Quantum Physics. Daver Publication : New York.

Yariv, Amnon. 1982. An Introduction to Theory and Application of Quantum Mechanics. John Wiley and Sons, Inc : New York.

http://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s_functin

http://pk.ut.ac.id/jmst/jurnal_2005.1/pandiangan.htm