

KOMPUTASI DISTRIBUSI SUHU MENGGUNAKAN METODE *LINE SUCCESSIVE OVERRELAXATION* (LSOR) MELALUI PENDEKATAN BEDA HINGGA DALAM BAHASA PEMROGRAMAN MATLAB

Sarah Miriam

Program Studi Pendidikan Fisika FKIP Unlam Banjarmasin

Abstract. The aim of this study is to design a computation program of thermal distribution by using the Line Successive Overrelaxation (LSOR) method through the finite difference approach in the language of MATLAB (Matrix Laboratory). The methodology used in this study is a literature study. The result of this study is a computation program that can perform appropriately to show the thermal distribution of a two – dimension system in a steady state. The output of the program is visualized by MATLAB in a contour graphic and a two – dimension graphic.

Key words: Computation, thermal distribution, Line Successive Overrelaxation (LSOR), finite difference, MATLAB

PENDAHULUAN

Distribusi suhu pada sistem dalam keadaan tunak dapat dinyatakan dengan model matematis yang dikenal sebagai persamaan Laplace. Salahsatu alternatif teknik numerik untuk menyelesaikan persoalan ini adalah dengan metode iteratif yang menggunakan pendekatan beda hingga. Metode iteratif yang sudah umum digunakan diantaranya adalah metode iterasi Gauss – Seidel yang mana laju konvergensi dari metode ini dapat ditingkatkan dengan menyertakan faktor relaksasi atas ω . Metode *Line Successive Overrelaxation* (LSOR) merupakan contoh dari metode iteratif dengan faktor relaksasi atas ω dalam perhitungannya.

Tujuan penelitian ini adalah untuk membuat suatu program yang dapat melakukan komputasi distribusi suhu pada suatu sistem yang dalam keadaan tunak. Bentuk geometri sistem yang dipilih adalah penampang bujursangkar dua – dimensi dengan kondisi batas dirichlet.

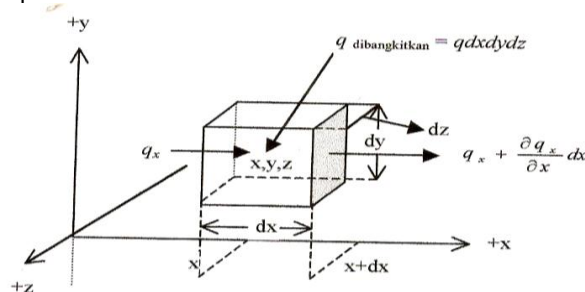
Penurunan Persamaan Perpindahan Panas

Pada suatu elemen kecil bahan didalam sebuah benda pejal berbentuk balok yang tepi-tepinya dx , dy dan dz masing-masing sejajar dengan sumbu x , y dan z (Gambar 1), untuk mendapatkan persamaan distribusi suhu dituliskan keseimbangan energi sebagai berikut:

Laju aliran Panas masuk	+	Laju pembangkitan panas oleh sumber-sumber dalam	=	Laju aliran panas keluar	+	Laju perubahan energi dalam
-------------------------	---	--	---	--------------------------	---	-----------------------------

atau secara aljabar, $(q_x + q_y + q_z) + \dot{q}(dxdydz) = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) + c\rho(dxdydz) \frac{\partial T}{\partial \theta} \dots (1)$

dimana laju pembangkitan panas per satuan volume q dan suhu T pada umumnya merupakan fungsi dari ketiga koordinat x , y dan z maupun waktu θ .



Gambar 1. Sketsa nomenklatur penurunan persamaan konduksi panas dalam koordinat Cartesius (Kreith, 1997).

Laju konduksi panas kedalam elemen dengan melintasi permukaan kiri dalam arah x , yaitu q_x , dapat ditulis sebagai :

$$q_x = \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dydz \dots\dots\dots (2)$$

Laju konduksi panas yang keluar dari elemen dengan melintasi permukaan kanan pada $x+dx$, yaitu q_{x+dx} adalah

$$q_{x+dx} = \left[\left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dydz \dots\dots\dots (3)$$

Bila laju aliran panas yang masuk kedalam elemen dikurangi dengan laju aliran panas yang meninggalkan elemen, diperoleh untuk arah x , y dan z :

$$q_x - q_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dydz ; \quad q_y - q_{y+dy} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dydz ; \text{ dan } q_z - q_{z+dz} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dydz$$

Bila rumus-rumus ini dimasukkan kedalam keseimbangan energi dan membagi tiap suku dengan $dx dy dz$, maka akan diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = c\rho \frac{\partial T}{\partial \theta} \dots\dots\dots (4)$$

Jika sistemnya homogen dan panas c serta kerapatan ρ tidak tergantung dari suhu dan jika k dianggap seragam, maka persamaannya menjadi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{q} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} \dots\dots\dots (5)$$

dimana konstanta $a = k.c / \rho$ disebut difusivitas termal dan dalam SI satuannya adalah m^2/s . Persamaan diatas dikenal sebagai persamaan perpindahan panas umum dan mengatur distribusi suhu dan aliran panas konduksi didalam benda padat yang sifat-sifat fisiknya seragam.

Jika sistemnya tidak mengandung sumber panas, maka persamaannya berubah menjadi *persamaan Fourier*.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} \dots\dots\dots (6)$$

dalam keadaan tunak, distribusi suhu didalam benda yang tanpa sumber panas harus memenuhi *persamaan Laplace*,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

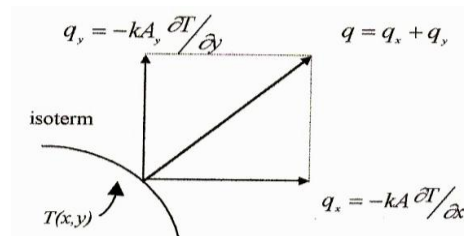
Tujuan analisa perpindahan panas adalah meramalkan laju aliran panas atau distribusi suhu. Dalam sistem dua dimensi tanpa sumber panas, persamaan yang mengatur distribusi suhu dalam keadaan tunak adalah

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

dengan menganggap konduktivitas termalnya seragam. Penyelesaian persamaan diatas akan menghasilkan $T(x,y)$, suhu sebagai fungsi dari kedua koordinat ruang x dan y . Laju aliran panas per luas satuan dalam arah x dan y dapat dihitung dari persamaan Fourier, masing-masing:

$$q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{dan} \quad q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y}$$

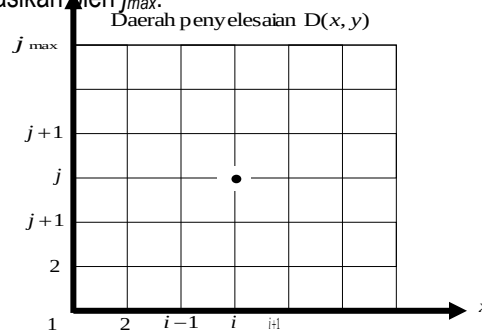
Laju aliran panas total disetiap titik dalam bahan adalah resultan q_x dan q_y dititik tersebut. Sehingga vektor aliran panas total mempunyai arah tegak lurus terhadap garis-garis suhu tetap (Gambar 2).



Gambar 2. Aliran panas dalam dua dimensi (Holman, 1997).

Pendekatan Beda Hingga

Daerah penyelesaian $D(x,y)$ dalam ruang xy untuk sebuah persoalan keseimbangan dua-dimensi diilustrasikan dalam Gambar 3. Daerah penyelesaian diwakili oleh garis-garis grid dua dimensi, yang disebut grid beda hingga. Perpotongan-perpotongan dari garis-garis grid ini adalah titik-titik grid dimana penyelesaian beda hingga untuk persamaan diferensial parsial dihasilkan. Subskrip i menunjukkan tambahan pada arah x dan subskrip j menunjukkan tambahan pada arah y . jadi, titik grid i,j menunjukkan lokasi (x_i,y_i) dan daerah penyelesaian $D(x,y)$. Jumlah total dari garis-garis grid x dinotasikan dalam gambar oleh i_{max} , dan jumlah total dari garis-garis grid y dinotasikan oleh j_{max} .



Gambar 3. Daerah penyelesaian $D(x,y)$ dan grid beda hingga (Hoffman, 1992)

Untuk kasus perpindahan panas dengan konduktivitas termal tetap, aliran kalor dapat dinyatakan dalam diferensial suhu. Gradien suhu dapat dituliskan dalam pendekatan beda hingga sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2},j} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,j+\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i, j-\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y}$$

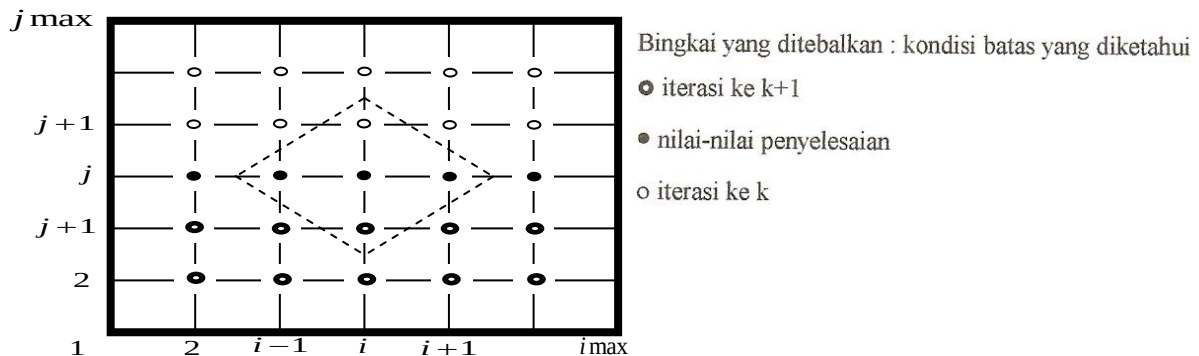
$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{(\Delta x)^2}$$

dalam pendekatan beda hingga, distribusi suhu yang kontinyu digantikan dengan sejumlah batangan penghantar panas khayalan yang bersambungan pada setiap titik grid.

Metode *Line Successive Overrelaxation (LSOR)*

Dalam metode *LSOR*, yakni relaksasi garis dengan baris-baris, semua baris penyelesaian ditetapkan pada nomor iterasi $k+1$, kecuali T_{ij+1} ditetapkan pada nomor iterasi k . Disini terkandung tiga buah nilai dari titik grid yang tidak diketahui: $T_{i+1,j}^{k+1}$, $T_{i,j}^{k+1}$, $T_{i-1,j}^{k+1}$. Nilai dari $T_{i-1,j}^{k+1}$ diketahui dari penyelesaian yang baru saja diperoleh dari garis $j-1$, dan nilai dari $T_{i+1,j}^{k+1}$ diketahui dari iterasi sebelumnya. Gambar 4 menunjukkan strategi penyelesaian relaksasi garis dengan baris-baris untuk sistem dengan kondisi batas dirichlet.

Dalam relaksasi garis dengan kolom-kolom, penyelesaian dari kolom $i-2$ hingga $i = i_{max}-1$, semua kolom penyelesaian ditentukan pada nomor iterasi $k+1$, menyisakan hanya $T_{i+1,j}$ yang ditentukan pada nomor iterasi k . sehingga tiga buah titik grid yang tidak diketahui nilainya adalah : $T_{i,j-1}^{k+1}$, $T_{i,j}^{k+1}$ dan $T_{i,j+1}^{k+1}$. Nilai $T_{i,j-1}^{k+1}$ diketahui dari penyelesaian yang baru diperoleh dari kolom $i-1$, dan nilai $T_{i,j+1}^{k+1}$ diketahui dari iterasi sebelumnya.



Gambar 4. Strategi penyelesaian untuk relaksasi garis (Hoffman, 1992)

Faktor Relaksasi Atas Optimum (ω_{opt})

Sebuah perkiraan nilai ω_{opt} yang baik, terutama berguna dalam mengurangi usaha komputasi untuk sistem-sistem dari persamaan-persamaan yang sangat besar. Faktor relaksasi atas optimum ω_{opt} tidak dapat diprediksi secara teoritis kecuali untuk beberapa kasus yang khusus. Namun begitu, ω_{opt} dapat ditentukan secara eksperimen dengan mencoba berulang-ulang sebuah soal yang diberikan untuk suatu jangkauan (range) dari nilai-nilai ω dan memonitor kecepatan konvergennya. Untuk faktor relaksasi atas, jangkauan ω terletak antara 1.0 dan 2.0.

METODE PENELITIAN

Melalui studi literatur ditemukan bahwa ada beberapa tahapan yang harus dilakukan untuk membuat program komputasi distribusi suhu pada benda dua – dimensi keadaan tunak. Tahapan – tahapan tersebut adalah:

1. Menurunkan persamaan Laplace dua-dimensi dalam bentuk beda hingga.
2. Membuat penyelesaian persamaan Laplace dua-dimensi dengan metode LSOR.
3. Membuat algoritma program untuk metode LSOR.

Persamaan Laplace dalam bentuk beda hingga.

Dengan pendekatan beda hingga, persamaan Laplace untuk dua dimensi (pers.(8)) dapat dibawa kedalam persamaan setara yang dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{(\Delta y)^2} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

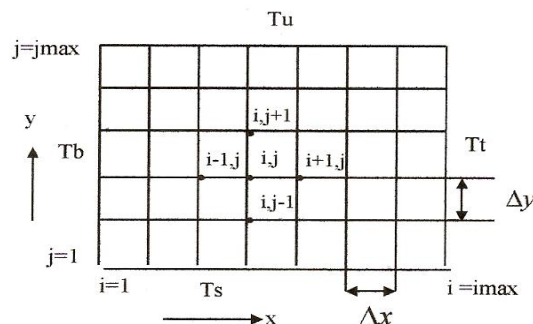
dengan subskrip i menandakan posisi x dan subskrip j menandakan posisi y seperti pada Gambar 5. Pada sisi-sisinya diberi nilai suhu yang telah ditentukan yaitu T_u , T_b , T_t dan T_s .

Jika dimasukkan rasio aspek grid $\beta = \Delta x / \Delta y$, maka pers.(12) menjadi:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + \beta^2 T_{i,j+1} + \beta^2 T_{i,j-1} - 2(1 + \beta^2) T_{i,j} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

Sehingga untuk $T_{i,j}$ diperoleh

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + \beta^2 T_{i,j+1} + \beta^2 T_{i,j-1}}{2(1 + \beta^2)} \dots\dots\dots (14)$$



Gambar 5. Nomenklatur dalam analisis numerik konduksi kalor dua dimensi.

Karena geometri sistem yang dipilih dalam penelitian ini adalah bujursangkar maka diambil harga Δx yang sama dengan harga Δy , sehingga $\beta = \Delta x / \Delta y = 1$. Dengan demikian pers.(14) dapat ditulis menjadi,

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

dan didapat nilai untuk T_{ij}

$$T_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{4} \dots\dots\dots (16)$$

Persamaan (16) mempunyai interpretasi fisika yang sederhana. Ia menunjukkan bahwa, untuk nilai $\beta = 1$, penyelesaian disetiap titik adalah rata-rata dari penyelesaian keempat titik disekitarnya. Hasil ini hanya berlaku untuk persamaan Laplace. Dengan demikian, distribusi suhu pada keadaan tunak untuk sistem

penampang bujursangkar dua-dimensi dengan kondisi batas dirichlet, nilai suhu pada titik yang berada ditengah-tengah sistem merupakan seperempat dari penjumlahan nilai-nilai suhu pada keempat sisinya.

Untuk menghentikan perhitungan dalam program komputer, diperlukan suatu nilai taksiran galat. Dalam pendekatan iteratif, galat seringkali ditaksir sebagai selisih antara aproksimasi sebelumnya dengan yang sekarang. Jadi: Galat aproksimasi = aproksimasi sekarang – aproksimasi sebelumnya. Sehingga, pengulangan hitungan dalam program komputer akan berhenti bila: $|T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k| \leq \varepsilon$ untuk semua T_{ij} dimana ε adalah suatu harga kesalahan suhu yang telah ditetapkan dan superskrip k menandakan nomor iterasi yang lama serta superskrip $k+1$ menandakan nomor iterasi yang baru. Bila syarat ini sudah terpenuhi, maka iterasi telah mencapai konvergensi yang artinya, telah menghasilkan penyelesaian dari pemrediksian beda hingga terhadap persamaan Laplace untuk harga Δx tertentu yang digunakan untuk membentuk jaringan.

Penyelesaian Persamaan Laplace dua-dimensi dengan metode LSOR

Dalam penyelesaian persamaan Laplace dua-dimensi dengan metode LSOR, pencarian nilai suhu untuk semua i dengan harga j yang konstan akan menghasilkan sistem persamaan linier yang mempunyai matriks tridiagonal. Untuk relaksasi garis dengan baris-baris, semua baris penyelesaian ditentukan pada nomor iterasi $k+1$, kecuali untuk $T_{i,j+1}$ yang ditentukan pada nomor iterasi k . Dengan demikian, persamaan sisa $\Delta T_{i,j}^{k+1}$ untuk metode LSOR adalah

$$\Delta T_{i,j}^{k+1} = \frac{T_{i+1,j}^{k+1} + \beta^2 T_{i,j+1}^k + T_{i-1,j}^{k+1} + \beta^2 T_{i,j-1}^{k+1} - 2(1 + \beta^2) T_{i,j}^{k+1}}{2(1 + \beta^2)} \dots\dots\dots (17)$$

Dengan mensubstitusikan pers.(9) kedalam pers.(10) diperoleh

$$T_{i-1,j}^{k+1} - 2(1 + \beta^2) T_{i,j}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k+1} = -\beta^2 (T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k) \dots\dots\dots (18)$$

Untuk $\beta = \Delta x / \Delta y = 1$, pers.(18) menjadi

$$T_{i-1,j}^{k+1} - 4T_{i,j}^{k+1} + T_{i+1,j}^{k+1} = -(T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k) \dots\dots\dots (19)$$

Pers.(19) dapat di-relaksasi atas-kan dengan memberikan faktor relaksasi atas w yang dinyatakan dalam persamaan:

$$wT_{i-1,j}^{k+1} - 4T_{i,j}^{k+1} + wT_{i+1,j}^{k+1} = -4(1-w)T_{i,j}^k - w(T_{i,j-1}^k + T_{i,j+1}^{k+1}) \dots\dots\dots (20)$$

Algoritma Program Metode LSOR

Tahap selanjutnya adalah menyusun algoritma program komputasi distribusi suhu dengan metode LSOR, susunannya adalah sebagai berikut:

1. Memberikan ukuran grid dan konstanta relaksasi atas omega sebagai variabel input. Untuk memudahkan perbandingan suhu T ditengah – tengah sistem hasil komputasi dengan nilai T teoritis, ukuran grid yang dipilih adalah ukuran grid yang ganjil.
2. Memasukkan nilai dan rumus untuk variabel-variabel berikut: panjang sistem dalam arah x dan y (L), interval antar titik (dx), iterasi maksimum ($itmax$), dan batas keakuratan ($epsilon$).

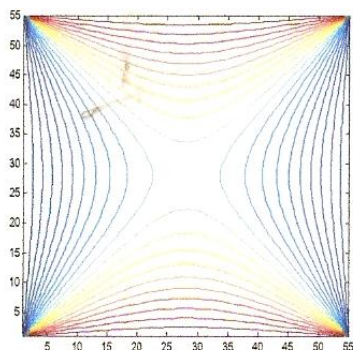
3. Menetapkan nilai suhu untuk daerah-daerah batas (T_u , T_s , T_b , T_t). Dalam penelitian ini dipilih suhu pada daerah batas sebagai berikut: $T_u = 100$ C; $T_b = 50$ C, $T_t = 50$ C; $T_s = 100$ C. Dengan demikian, secara teoritis nilai suhu T di tengah – tengah sistem haruslah sebesar seperempat penjumlahan dari nilai – nilai batas tersebut, yakni 75 C.
4. Memberikan nilai nol sebagai nilai awal suhu di semua titik interior.
5. Menentukan fungsi untuk syarat batas.
6. Mengisi elemen-elemen matriks tridiagonal.
7. Memulai iterasi dengan metode LSOR.
8. Menghentikan iterasi jika syarat konvergensi sudah dipenuhi.
9. Mencetak nilai suhu di semua titik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

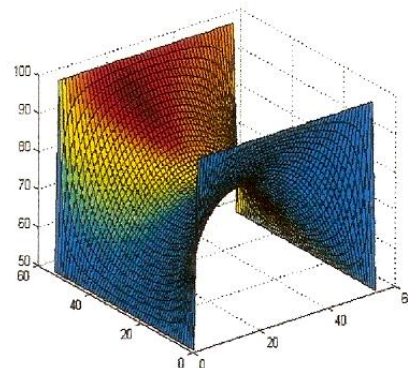
Program komputasi distribusi suhu dengan metode LSOR yang dihasilkan dari penelitian ini diberi nama CPLSOR. Algoritma dan komputasi numerik yang dirancang telah berhasil diterapkan pada bahasa pemrograman MATLAB 5. Komputasi dilakukan untuk semua ukuran grid yang ganjil mulai dari grid 15 x 15 sampai dengan 55 x 55. Berikut ini adalah data – data yang diperoleh dari hasil komputasi dengan program CPLSOR:

- a. Pada semua komputasi yang dilakukan, dicapai tingkat ketelitian $\varepsilon = 10^{-8}$ dengan galat terbesar terjadi pada komputasi untuk grid 45 x 45 dan galat terkecil terjadi pada komputasi untuk grid 25 x 25.
- b. Nilai omega optimum untuk mencapai konvergen berada pada jangkauan 1.22 sampai dengan 1.30.
- c. Jumlah iterasi minimum untuk grid 15 x 15 adalah sebanyak 42 dengan waktu eksekusi 28.46 detik, sedangkan jumlah iterasi minimum untuk grid 55 x 55 adalah sebanyak 163 dengan waktu eksekusi 828.55 detik. Besarnya nilai omega optimum, jumlah iterasi, dan waktu eksekusi, semakin bertambah seiring dengan kenaikan ukuran grid.
- d. Pada semua komputasi yang dilakukan, diperoleh nilai yang sama untuk suhu T ditengah –tengah sistem, yakni sesuai dengan nilai yang seharusnya, 75 C. Bila input data untuk suhu batas diubah, maka suhu ditengah – tengah sistem akan berubah pula sesuai dengan semestinya, yakni sebesar seperempat dari jumlah suhu batas di keempat sisinya.

Dari program CPLSOR diperoleh distribusi suhu di semua titik perpotongan grid pada penampang bujursangkar. Keluarannya tampil dalam bentuk matriks beserta grafik kontur dan grafik dua dimensinya (Gambar 6). Perubahan suhu di setiap titiknya ditunjukkan oleh perubahan warna. Warna biru menunjukkan suhu yang paling tinggi. Sedangkan suhu terendah adalah yang berada ditengah – tengah sistem, yakni dengan warna paling muda.



(a) Grafik kontur



(b) Grafik dua dimensi

Gambar 6. Distribusi suhu pada penampang bujursangkar dengan metode LSOR ukuran grid 55 x 55

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari studi ini, program komputasi distribusi suhu yang dirancang menggunakan metode LSOR, melalui pendekatan beda hingga, dalam bahasa MATLAB, telah berhasil dirancang dan dapat berfungsi dengan semestinya. Secara umum, tingkat ketelitian dari program komputasi ini dapat dikatakan cukup tinggi, yakni $\varepsilon = 10^{-8}$. Hasil keluaran dari program ini divisualisasikan oleh MATLAB dalam grafik kontur dan grafik dua dimensi yang berwarna. Perbedaan derajat panas ditunjukkan oleh perbedaan warna pada grafik. Dengan demikian, tujuan dari penelitian ini telah tercapai.

DAFTAR PUSTAKA

- Akai, Terrence J. 1994. Applied Numerical Methods for Engineers. Singapore: John Wiley & Sons, Inc.
- Chapra, Steven C. dan Canale, Raymond P. 1991. Metode Numerik. Alih Bahasa I Nyoman Susila. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Gere, James M. dan Weaver, Jr. William. 1987. Aljabar Matriks untuk para Insinyur. Alih Bahasa G Tejosutikno. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Hanselman, Duane dan Littlefield, Bruce. 2000. MATLAB Bahasa Komputasi Teknis. Alih Bahasa Jozep Edyanto. Yogyakarta: Penerbit ANDI dan Pearson Education Asia Pte. Ltd.
- Hoffman, Joe D. 1992. Numerical Methods for Engineers and Scientists. USA: McGraw-Hill, Inc.
- Hollman, J.P. 1997. Perpindahan Kalor. (edisi ke-6). Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Kreith, Frank. 1997. Prinsip-Prinsip Perpindahan Panas. (edisi ke-3). Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Purwadi, PK. 1999. "Metode Beda Hingga dalam Penyelesaian Persoalan Perpindahan Panas Konduksi Dua Dimensi Keadaan Tunak", Jurnal SIGMA. Vol. II, No. 2, 1-15.