Jurnal Matematika Murni dan Terapan Epsilon Juni 2014 Vol. 8 No. 1

JUMLAH ANTI IDEAL *FUZZY* DARI *NEAR-RING*

Saman Abdurrahman
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km 36 Banjarbaru
E-mail: saman@unlam.ac.id

ABSTRAK

Dalam makalah ini diperkenalkan konsep penjumlahan anti ideal fuzzy dari near-ring dan membuktikan sifat-sifat penjumlahannya. Hasil dari penelitian ini adalah penjumlahan anti ideal fuzzy dari near-ring, adalah anti ideal fuzzy dari near-ring.

Kata kunci: *near-ring, ideal fuzzy, anti ideal fuzzy*

1. PENDAHULUAN

Topik penelitian yang berkaitan dengan aljabar *fuzzy* telah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya, diantaranya Abou-Zaid [1] memperkenalkan konsep subnear-*ring fuzzy* dan ideal *fuzzy near-ring*. Menurut Satyanarayana *at al* [6], *near-ring* merupakan salah satu perluasan dari ring, dimana beberapa asioma yang ada pada ring tidak harus diberlakukan pada *near-ring*. Operasi pertama pada *near-ring* sebarang tidak harus *abelian*, dan terhadap operasi pertama dan kedua, cukup dipenuhi salah satu sifat distributif kiri atau kanan.

Ide penelitian Abou-Zaid [1], banyak melahirkan penelitian-penelitian baru, diantaranya: Kim *at al* [4] memperkenalkan konsep anti ideal *fuzzy near-ring*, dan Abdurrahman *at al* [2, 3] memperkenalkan konsep ideal *fuzzy near-ring*, dan konplemen dari ideal *fuzzy near-ring*. Pada penelitian ini, akan disajikan hasil kajian teori mengenai penjumlahan antara anti *ideal fuzzy* dari *near-ring R*, dan akan kontruksi sifat penjumlahan antara anti ideal *fuzzy near-ring.*

2. TINJAUAN PUSTAKA

Berikut ini, disajikan definisi dan sifat dari near-ring dan himpunan fuzzy yang digunakan pada pembahasan.

Definisi 2.1. [6] *Himpunan R tidak kosong dengan dua operasi biner + dan . disebut near ring kiri, jika memenuhi:*

(1). $(R, +)$ *adalah grup* (*tidak harus grup abelian*),

(2). $(R, .)$ *adalah semigrup,*

(3). *berlaku sifat distributif kiri, yaitu untuk setiap* $x,y,z \in R$ *berlaku:*

$x . (y + z) = x . y + x . z$

Selanjutnya yang dimaksud *near-ring* adalah *near-ring kiri*, kecuali ada keterangan lebih lanjut, dan $x \cdot y$ dapat juga ditulis xy. Pada *near-ring*, grupnya tidak harus abelian terhadap operasi +, maka dalam mendefinisikan ideal, subgrupnya harus merupakan subgrup normal.

Definisi 2.2. [6] *Diberikan near-ring R. Subgrup normal I dari R disebut ideal dari R, jika*

(1). $RI \subseteq I$

(2). $(r + i)s - rs \in I$ *untuk setiap* $r, s \in R$ *dan* $i \in I$.

Subgrup normal *I* dari *R*, memenuhi kondisi (1) disebut *ideal kiri* dari *R*, dan memenuhi kondisi (2) disebut *ideal kanan* dari *R.*

Definisi 2.3. [5] *Diberikan X adalah himpunan tidak kosong. Suatu pemetaan* α *disebut subset fuzzy dari X jika* $\alpha : X \to [0, 1]$.

Definisi 2.4. [4] *Subset fuzzy* α *di near-ring R disebut anti subnear-ring fuzzy dari R jika untuk setiap* $x, y \in R$ *berlaku*:

(1). $\alpha(x - y) \leq \text{mak}\{\alpha(x), \alpha(y)\}$, *dan*

(2). $\alpha(xy) \leq \text{mak}\{\alpha(x), \alpha(y)\}$.

Selanjutnya, α *disebut anti ideal fuzzy dari R jika* α *adalah anti subnear-ring fuzzy dari R dan untuk setiap* $x, y, z \in R$ *berlaku*:

(3). $\alpha(x) = \alpha(y + x - y)$,

(4). $\alpha(xy) \leq \alpha(y)$, *dan*

(5). $\alpha[(x + z)y - xy] \leq \alpha(z)$.

Subset fuzzy α disebut *anti ideal kiri fuzzy di R* jika memenuhi kondisi (1), (2), (3) dan (4), dan α disebut *anti ideal kanan fuzzy di R* jika memenuhi kondisi (1), (2), (3) dan (5).

Definisi 2.5. [1] *Diberikan subset fuzzy* α *dan* β *di near-ring R. Penjumlahan* α *dan* β *didefinisikan dengan,*

$$(\alpha \oplus \beta)(x) := \begin{cases} \sup[\min\{\alpha(y), \beta(z)\}], & x = y + z \\ 0, & x \neq y + z \end{cases}$$

untuk setiap $x \in R$.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur. Metodelogi yang digunakan adalah mengumpulkan bahan tulisan mengenai *near-ring*, ideal *near-ring, near-ring fuzzy,* ideal *fuzzy near-ring* dan anti ideal *fuzzy near-ring.*

Pada tahap awal dipelajari tentang konsep dasar dari ideal *fuzzy near-ring*, dan anti ideal *fuzzy near-ring.* Konsep dasar ini yang nantinya akan banyak membantu pada saat mengkonstruksi sifat penjumlahan dari anti ideal *fuzzy near-ring*.

Selanjutnya, dibuktikan beberapa lemma/teorema yang terkait dan ditentukan asumsi-asumsi sehingga terbentuk sifat-sifat penjumlahan dari anti ideal *fuzzy near-ring*, dan sifat-sifat tersebut akan dibuktikan kebenarannya pada pembahasan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Lemma 4.1. *Jika* α *dan* β *adalah anti subnear-ring fuzzy di near-ring R, maka* $(\alpha\oplus\beta)(0_R) \leq (\alpha\oplus\beta)(x)$, *dan* $(\alpha\oplus\beta)(-x) = (\alpha\oplus\beta)(x)$ *untuk setiap* $x \in R$

Bukti: Diambil sebarang $x\in R$, maka $x = y + z$ untuk suatu $y, z\in R$. Mengingat α dan β adalah *subnear-ring fuzzy* dari *R*, maka menurut Abdurrahman ([3], Lemma 4.1): $\alpha(0_R) \leq \alpha(y)$, $\beta(0_R) \leq \beta(z)$, dan $\beta(x) = \beta(-x)$, sehingga:

$$(\alpha\oplus\beta)(0_R) = \sup[\min\{\alpha(0_R), \beta(0_R)\}] \leq \sup[\min\{\alpha(y), \beta(z)\} = (\alpha\oplus\beta)(x),$$

dan

$$(\alpha\oplus\beta)(x) = \sup[\min\{\alpha(0_R), \beta(x)\}] = \sup[\min\{\alpha(0_R), \beta(-x)\}] = (\alpha\oplus\beta)(-x). \blacksquare$$

Teorema 4.2. *Jika* α *dan* β *adalah anti ideal fuzzy di near-ring R, maka* $\alpha\oplus\beta$ *adalah anti ideal fuzzy di R*

Bukti: Diambil sebarang $x, z, w\in R$ dengan $x = x_1 + x_2$ dan $z = z_1 + z_2$ untuk suatu $x_1, x_2, z_1, z_2\in R$, maka:

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)(x - y) &= (\alpha\oplus\beta)(x_1 + x_2 - (z_1 + z_2)) = (\alpha\oplus\beta)(x_1 - z_1 + z_1 + x_2 - z_1 - z_2)\\ &= \sup[\min\{\alpha(x_1 - z_1), \beta(z_1 + x_2 - z_1 - z_2)\}]\\ &\leq \sup[\min\{\text{mak}\{\alpha(x_1), \alpha(z_1)\}, \text{mak}\{\beta(z_1 + x_2 - z_1), \beta(z_2)\}\}]\\ &= \sup[\min\{\text{mak}\{\alpha(x_1), \alpha(z_1)\}, \text{mak}\{\beta(x_2), \beta(z_2)\}\}]\\ &= \sup[\min\{\text{mak}\{\alpha(x_1), \beta(x_2)\}, \text{mak}\{\alpha(z_1), \beta(z_2)\}\}]\\ &\leq \text{mak}[\sup\{\min\{\alpha(x_1), \beta(x_2)\}\}, \sup\{\min\{\alpha(z_1), \beta(z_2)\}\}]\\ &= \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(z)\}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)(z + x - z) &= (\alpha\oplus\beta)(z + x_1 + x_2 - z) = (\alpha\oplus\beta)(z + x_1 - z + z + x_2 - z)\\ &= \sup[\min\{\alpha(z + x_1 - z), \beta(z + x_2 - z)\}]\\ &= \sup[\min\{\alpha(x_1), \beta(x_2)\}] = (\alpha\oplus\beta)(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)(xz) &= \sup[\min\{\alpha(0_R), \beta(xz)\}]\\ &\leq \sup[\min(\text{mak}\{\alpha(0_R), \alpha(0_R)\}, \text{mak}\{\beta(x), \beta(z)\})]\\ &= \sup[\min(\text{mak}\{\alpha(0_R), \beta(x)\}, \text{mak}\{\alpha(0_R), \beta(z)\})]\\ &\leq \text{mak}[\sup(\min\{\alpha(0_R), \beta(x)), \sup(\min\{\alpha(0_R), \beta(z)\})]\\ &= \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(z)\}, \text{ dan}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)[(x + w)z - xz] &= (\alpha\oplus\beta)[(x + w)z - xz + 0_R]\\ &= \sup[\min\{\alpha[(x + w)z - xz], \beta(0_R)\}]\\ &\leq \sup[\min\{\alpha(w), \beta(0_R)] = (\alpha\oplus\beta)(w).\end{aligned}$$

Jadi, $\alpha\oplus\beta$ adalah anti ideal *fuzzy* di R. ■

Lemma 4.3. *Jika* α dan β *adalah anti ideal fuzzy di near-ring R, maka* $A_{\alpha\oplus\beta} = \{x\in R|(\alpha\oplus\beta)(x) = (\alpha\oplus\beta)(0_R)\}$ *adalah ideal di R.*

Bukti: Dari definisi $A_{\alpha \bigcirc \beta}$, maka $0_R \in A$ dan $A \subseteq R$ sehingga $A \neq \emptyset$. Selanjutnya, diambil sebarang x, $y \in A_{\alpha \bigcirc \beta}$ dan s, $r \in R$ maka $(\alpha \oplus \beta)(x) = (\alpha \oplus \beta)(y) = (\alpha \oplus \beta)(0_R)$. Dari sini, maka:

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)(x-y) &\le \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(y)\} = \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(0_R), (\alpha\oplus\beta)(0_R)\}\\ &= (\alpha\oplus\beta)(0_R) \Leftrightarrow x - y \in A_{\alpha \bigcirc \beta},\end{aligned}$$

$(\alpha\oplus\beta)(s + x - s) = (\alpha\oplus\beta)(x) = (\alpha\oplus\beta)(0_R) \Leftrightarrow s + x - s \in A_{\alpha \bigcirc \beta}$,

$(\alpha\oplus\beta)(xy) \le (\alpha\oplus\beta)(y) = (\alpha\oplus\beta)(0_R) \Leftrightarrow xy \in A_{\alpha \bigcirc \beta}$, dan

$(\alpha\oplus\beta)[(r + x)s - rs] \le (\alpha\oplus\beta)(w) = (\alpha\oplus\beta)(0_R) \Leftrightarrow (r + x)s - rs \in A_{\alpha \bigcirc \beta}$.

Berdasarkan analisa di atas, maka $A_{\alpha \bigcirc \beta}$ adalah ideal di R. ■

Lemma 4.4. *Jika* α dan β *adalah anti ideal fuzzy di near-ring R, maka untuk setiap* $x, y \in$R: $(\alpha\oplus\beta)(x+y) = (\alpha\oplus\beta)(y+x)$, *dan* $(\alpha\oplus\beta)(x-y) = (\alpha\oplus\beta)(0_R)$ *maka* $(\alpha\oplus\beta)(x) = (\alpha\oplus\beta)(y)$

Bukti: Karena α dan β adalah anti ideal *fuzzy* dari *R*, maka menurut Teorema 4.2, α⊕β adalah anti ideal *fuzzy* dari *R*, sehingga untuk setiap $x, y \in R$, maka

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)(x+y) &= (\alpha\oplus\beta)(-x+[x+y]+x) = (\alpha\oplus\beta)([-x+x]+y+x)\\ &= (\alpha\oplus\beta)(y+x)\end{aligned}$$

Misalkan α⊕β adalah anti ideal *fuzzy* dari *R* dan $(\alpha\oplus\beta)(x-y) = (\alpha\oplus\beta)(0_R)$ untuk setiap $x, y \in R$, sehingga:

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)(x) &= (\alpha\oplus\beta)(x+0_R) = (\alpha\oplus\beta)(x+[-y+y])\\ &= (\alpha\oplus\beta)([x-y]+y) = (\alpha\oplus\beta)([x-y]-[-y])\\ &\le \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(x-y), (\alpha\oplus\beta)(-y)\}\\ &= \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(0_R), (\alpha\oplus\beta)(y)\} = (\alpha\oplus\beta)(y).\\ (\alpha\oplus\beta)(y) &= (\alpha\oplus\beta)(-y) = (\alpha\oplus\beta)(0_R - y) = (\alpha\oplus\beta)([-x+x]-y)\\ &= (\alpha\oplus\beta)(-x+[x-y]) = (\alpha\oplus\beta)(-x-[-(x-y)])\\ &\le \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(-x), (\alpha\oplus\beta)(-[x-y])\}\\ &= \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(x-y)\}\\ &= \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(0_R)\} = (\alpha\oplus\beta)(x).\end{aligned}$$

Bersasarkan analisa di atas maka $(\alpha\oplus\beta)(x) = (\alpha\oplus\beta)(y)$ untuk setiap $x, y \in R$. ■

Lemma 4.5. *Diberikan near-ring R dan* $\alpha^*(x) = \frac{1}{\alpha(0_R)}\alpha(x)$, *untuk setiap* $\alpha \in \mathbb{F}(R)$ *dan* $x \in R$. *Jika* α *dan* β *adalah anti ideal fuzzy dari R, maka* $(\alpha\oplus\beta)^*$ *adalah ideal fuzzy dari R dan* $(\alpha\oplus\beta) \subseteq (\alpha\oplus\beta)^*$.

Bukti: Misalkan α dan β adalah anti ideal *fuzzy* dari *R*, maka menurut Teorema 4.2, α⊕β anti ideal *fuzzy* dari *R*, sehingga untuk setiap $x, y, z \in R$, berlaku

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)^*(x-y) &= \tfrac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(x-y) \le \tfrac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}\text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(y)\}\\ &= \text{mak}\{\tfrac{1}{(\alpha\ominus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(x), \tfrac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(y)\}\\ &= \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)^*(x), (\alpha\oplus\beta)^*(y)\}.\\ (\alpha\oplus\beta)^*(xy) &= \tfrac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(xy) \le \tfrac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}\text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(x), (\alpha\oplus\beta)(y)\}\\ &= \text{mak}\{\tfrac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(x), \tfrac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(y)\}\end{aligned}$$

$= \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)^*(x), (\alpha\oplus\beta)^*(y)\}.$

$(\alpha\oplus\beta)^*(y + x - y) = \frac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(y + x - y)$

$= \frac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(x)$

$(\alpha\oplus\beta)^*(xy) = \frac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(xy) \le \frac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(y)$

$= (\alpha\oplus\beta)^*(y)$

$(\alpha\oplus\beta)^*((x+z)y - xy) = \frac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)((x+z)y - xy)$

$\le \frac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(z) = (\alpha\oplus\beta)^*(z).$

Jadi, $(\alpha\oplus\beta)^*$ adalah anti ideal fuzzy dari *R*.

Selanjutnya, $(\alpha\oplus\beta)^*(0_R) = \frac{1}{(\alpha\oplus\beta)(0_R)}(\alpha\oplus\beta)(0_R) = 1$, maka

$$(\alpha\oplus\beta)(0_R) \le (\alpha\oplus\beta)(x) \le 1 = (\alpha\oplus\beta)^*(0_R)$$

untuk setiap $x \in R$, sehingga

$$(\alpha\oplus\beta)(x) \le (\alpha\oplus\beta)^*(x) \Leftrightarrow (\alpha\oplus\beta) \subseteq (\alpha\oplus\beta)^*. \quad \blacksquare$$

Teorema 4. 6. *Diberikan A dan B adalah subset tidak kosong di near-ring R. Jika* α dan β *adalah subset fuzzy di R, yang didefinisikan dengan:*

$$(\alpha\oplus\beta)(x) := \begin{cases} s, & x \in A + B \\ t, & x \notin A + B \end{cases}$$

untuk setiap $x \in R$ *and* $s, t \in [0,1]$ *dengan* $s < t$, *maka* $\alpha\oplus\beta$ *adalah anti ideal fuzzy di R jika dan hanya jika A + B adalah ideal di R dan* $R_{\alpha\oplus\beta} = A + B$.

Bukti: ($\Rightarrow$) Misalkan $\alpha\oplus\beta$ adalah anti ideal *fuzzy* dari R dan $z, w \in A + B$, maka

$$(\alpha\oplus\beta)(z - w) \le \text{mak}\{(\alpha\oplus\beta)(z), (\alpha\oplus\beta)(w)\} = s,$$

sehingga $(\alpha\oplus\beta)(z - w) = s$, dengan kata lain $z - w \in A + B$. Diambil sebarang $x \in R$ dan $z \in A + B$, maka

$$(\alpha\oplus\beta)(x + z - x) = (\alpha\oplus\beta)(z) = s,$$

dan

$$(\alpha\oplus\beta)(xz) \le (\alpha\oplus\beta)(z) = s \Rightarrow (\alpha\oplus\beta)(xz) = s.$$

Akibatnya, $x + z - x, xz \in A + B$. Jika $x, y \in R$ dan $z \in A + B$, maka

$$(\alpha\oplus\beta)[(x + z)y - xy] \le (\alpha\oplus\beta)(z) = s \Rightarrow (x + z)y - xy \in A + B.$$

Jadi terbukti bahwa A + B adalah ideal di R.

($\Leftarrow$) Menurut Abdurrahman ([3], Teorema 4.8): $\alpha\oplus\beta$ adalah anti ideal *fuzzy* di R. Selanjutnya, karena A + B adalah ideal di R, maka $0_R \in A + B$. Akibatnya:

$R_{\alpha\oplus\beta} = \{x \mid (\alpha\oplus\beta)(x) = (\alpha\oplus\beta)(0_R)\} = \{x \mid (\alpha\oplus\beta)(x) = s\} = \{x \mid x \in A + B\}$

$= A + B.$ $\blacksquare$

5. KESIMPULAN

Hasil penting atau sifat yang dapat dijadikan sebuah kesimpulan dari tulisan ini adalah, penjumlahan dari anti ideal *fuzzy* dari suatu *near-ring* R, menghasilkan ideal *fuzzy* dari R lagi.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Abou-Zaid. S. 1991. "On fuzzy subnear-rings and ideals", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 44, pp. 139-146.

[2]. Abdurrahman. S, Thresye, dan Hijriati. N. 2012. "Ideals fuzzy near-ring", *Jurnal Matematika Murni dan Terapan Epsilon*, Vol. 6, No. 2, hal 13 – 19.

[3]. Abdurrahman. S. 2013. "Konplemen Dari Ideal Fuzzy Near-Ring", *Jurnal Matematika Murni dan Terapan Epsilon*, Vol. 7, No. 2, hal

[4]. Kim. K. H, Jun. Y. B, and Yon. Y. H. 2005. "On Anti Fuzzy Ideals In Near-Ring". *Iranian Journal of Fuzzy System*. Vol. 2, No. 2, pp. 71 – 80.

[5]. Mordeson. J.N, Bhutani. K. R, and Rosenfeld. A. 2005. "Fuzzy group theory", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[6]. Satyanarayana. Bh, and Prasad. K. S. 2013. "*Near-ring, Fuzzy Ideals, and Graph Theory*", Taylor and Francis Group, LLC.