METODE KARMARKAR SEBAGAI ALTERNATIF PENYELESAIAN MASALAH PEMROGRAMAN LINEAR

Bayu Prihandono, Meilyna Habibullah, Evi Noviani

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Tanjungpura
Jl. Prof. Dr. H. Hadari Nawawi, Pontianak, Kalimantan Barat
Email
: bayuprihandono@math.untan.ac.id, alyn@yahoo.com, evinoviani@math.untan.ac.id

ABSTRAK. Pemrograman linear adalah alat untuk menyelesaikan suatu perencanaan aktivitas yang telah dibentuk dalam suatu model matematis agar tujuan yang diinginkan dapat tercapai. Penelitian ini bertujuan untuk mengenalkan cara menyelesaikan masalah pemrograman linear dengan menggunakan metode Karmarkar. Pada metode Karmarkar, masalah pemrograman linear dituliskan dalam bentuk khusus yang disebut bentuk kanonik Karmarkar. Jika terdapat masalah pemrograman linear standar akan diselesaikan dengan metode Karmarkar, maka terlebih dahulu masalah tersebut harus dikonversi ke dalam bentuk kanonik Karmarkar. Cara kerja metode Karmarkar dimulai dari penentuan titik awal yang berdasarkan jumlah variabel, kemudian diikuti oleh perhitungan jari-jari, jangkauan penyelesaian, dan nilai kriteria pemberhentian. Iterasi pada metode Karmarkar dapat dihentikan jika nilai fungsi tujuan telah memenuhi kondisi kurang dari kriteria pemberhentian yang telah ditetapkan sebelumnya, sehingga titik solusi optimal telah diperoleh.

Kata kunci : *pemrograman linear, algoritma karmarkar dan metode titik interior*.

1. Pendahuluan

Penerapan pemrograman linear sebagai salah satu alat pengambilan keputusan telah banyak digunakan dalam penjabaran berbagai situasi pada kehidupan nyata, contohnya di bidang industri, pertanian, transportasi, ekonomi, dan lain sebagainya [7]. Pemrograman linear membantu menyelesaikan suatu masalah yang meliputi perencanaan aktivitas untuk mendapatkan hasil yang optimal, yaitu sebuah hasil terbaik diantara semua kemungkinan solusi yang ada. Penyelesaian masalah pemrograman linear dapat menggunakan beberapa metode, diantaranya metode grafik, metode simpleks, metode dual simpleks, dan metode Karmarkar [5].

Penyelesaian masalah pemrograman linear menggunakan grafik maupun tabel simpleks sudah menjadi hal yang umum, maka dari itu akan diperkenalkan suatu metode yang cara pengerjaannya berbeda dengan kedua metode tersebut. Untuk menyelesaikan masalah pemrograman linear yang mempunyai lebih dari dua variabel tidak dapat dilakukan dengan metode grafik, yang mungkin adalah dengan tabel simpleks. Namun untuk masalah pemrograman linear dengan variabel yang banyak, proses penyelesaiannya akan menghabiskan waktu yang cukup lama. Hal ini dikarenakan metode simpleks menggunakan waktu eksponensial, yang berarti semakin besar ukuran masalah pemrograman linear maka semakin lama juga waktu yang digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut [4].

Pada tahun 1984, seorang ilmuan bernama Narendra Karmarkar berusaha mengembangkan suatu metode baru untuk menyelesaikan masalah pemrograman linear berukuran besar dengan waktu pengerjaan yang cepat (efisien) yang dinamakan Metode Karmarkar [5]. Metode ini dimulai dari satu titik yang berada dalam daerah layak, kemudian dilanjutkan ke arah gradien yang diproyeksikan untuk memperoleh titik pemecahan yang baru sehingga diperoleh penyelesaian masalah pemrograman linear yang optimum. Titik itu secara ketat merupakan titik interior yang berarti semua titik koordinatnya harus bernilai positif, maka dari itu metode ini juga disebut metode titik interior [9].

Perbedaan mendasar pada metode Karmarkar dengan metode-metode sebelumnya adalah jika pada metode lain, pencarian titik-titik optimal dilakukan dengan menelusuri titik-titik yang terdapat di batas-batas daerah layak. Sedangkan untuk metode Karmarkar, titik-titik optimal dicari melalui penyelidikkan sebarang titik dalam pada daerah layak. Ide ini lebih menuju pada ada kemungkinan bahwa titik-titik optimal tidak selalu berada pada garis batas di daerah layak namun terdapat pula di dalam daerah layak.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Titik Dalam (Titik Interior)

Pada bagian latar belakang telah dikatakan bahwa metode Karmarkar juga disebut sebagai metode titik dalam. Pada penelitian ini titik dalam yang didefinisikan adalah pada $\mathbb{R}^n$. Didefinisikan suatu jarak $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ pada $\mathbb{R}^n$, untuk setiap vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ dihitung menggunakan Rumus [1]:

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2}.$$

Himpunan pada $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan jarak $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ dituliskan dengan $\left(\mathbb{R}^n, d(\mathbf{u},\mathbf{v})\right)$.

Sebelum berbicara mengenai titik dalam pada $\mathbb{R}^n$, terlebih dahulu diberikan suatu definisi persekitaran pada $\mathbb{R}^n$, yaitu sebagai berikut:

Definisi 2.1.1 [3]

Jika diberikan $\left(\mathbb{R}^n, d(\mathbf{u},\mathbf{v})\right)$, *untuk sebarang vektor* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *dan konstanta real* $r > 0$, *maka himpunan*

$$N_r(\mathbf{v}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \ : \ d(\mathbf{u},\mathbf{v}) < r\}$$

disebut persekitaran vektor $\mathbf{v}$ *dengan jari-jari* r.

Definisi 2.1.2 [3]

Jika diberikan $\left(\mathbb{R}^n, d(\mathbf{u},\mathbf{v})\right)$, *dengan vektor* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ *dan ada sebuah himpunan* $A \subset \mathbb{R}^n$, *maka vektor* $\mathbf{u}$ *disebut titik dalam himpunan* A *jika ada bilangan real* $r > 0$ *sehingga memenuhi* $N_r(\mathbf{u}) \subset A$.

2.2 Transformasi Proyektif

Transformasi proyektif merupakan transformasi yang dapat digunakan untuk menggerakkan suatu vektor pada $\mathbb{R}^n$ dari daerah asal menuju suatu daerah baru. Transformasi ini disebut proyektif karena selalu mengarahkan suatu vektor pada $\mathbb{R}^n$ menuju ke pusat suatu daerah baru yang juga pada $\mathbb{R}^n$, sehingga vektor tersebut tidak akan pernah keluar dari batas yang telah ditentukan. Ketentuan pada penggunaan transformasi proyektif adalah dengan memberikan suatu vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dan suatu matriks diagonal (D_k), yang didefinisikan oleh $D_k = diag\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, dengan entri-entri dari diagonal matriks tersebut adalah $x_1, x_2, \dots, x_n$, maka hasil transformasi dari $\mathbf{x}$ ke $\mathbf{x}'$ yang ditulis dengan $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ adalah sebagai berikut [6]:

$$\mathbf{x}' = \frac{D_k^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{1}D_k^{-1}\mathbf{x}}$$

dengan:

$$\mathbf{1} = (1,1,\dots,1)$$

D_k^{-1} = invers dari matriks diagonal D_k
$\mathbf{x}$ = titik awal yang telah ditentukan
$\mathbf{x}'$ = titik hasil transformasi proyektif
dengan $\mathbf{1}$ dan $\mathbf{x}'$ berada pada $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.2.1 [8] *Jika suatu vektor* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *pada* $\mathbb{R}^n$ *ditransformasi menggunakan* $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, *maka akan menghasilkan vektor* $\mathbf{x}' = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.

Bukti:
Ambil sebarang suatu vektor pada $\mathbb{R}^n$, misal $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Akan dibuktikan bahwa hasil dari transformasi $\mathbf{x}$ adalah $\mathbf{x}' = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$.
Didefinisikan suatu matriks diagonal sebagai berikut:

$$D_k^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}$$

kemudian dilakukan perhitungan dengan menggunakan rumus:

$$\mathbf{x}' = \frac{D_k^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{1}D_k^{-1}\mathbf{x}}$$

maka

$$\mathbf{x}' = \frac{\begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{x}' = \frac{\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}}{[1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}}{[1+1+\cdots+1]} = \frac{\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}}{n} = \begin{bmatrix}\frac{1}{n}\\\frac{1}{n}\\\vdots\\\frac{1}{n}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right).$$

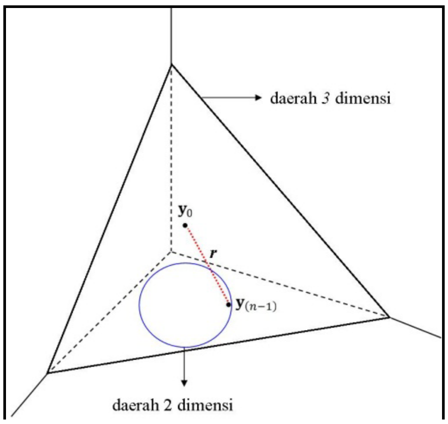
Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh hasil transformasi dari **x** adalah suatu vektor $\mathbf{x}' = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$, jadi dapat disimpulkan bahwa Teorema 2.2.1 terbukti. Transformasi proyektif memiliki invers sebagai berikut:

$$\mathbf{x} = \frac{D_k \mathbf{x}'}{\mathbf{1} D_k \mathbf{x}'}.$$

2.3 Jari – Jari dan Jangkauan Penyelesaian

Pada umumnya jari-jari adalah jarak dari titik pusat ke daerah batas suatu lingkaran di bidang berdimensi dua. Tetapi pada metode Karmarkar, jari-jari yang dimaksud bukanlah jari-jari lingkaran, melainkan jarak antara titik pusat suatu daerah berdimensi n dengan titik batas suatu daerah yang berdimensi setingkat lebih sederhana (daerah berdimensi $(n-1)$), yang dinotasikan dengan (r). Langkah menghitung jari-jari dimulai dengan mengambil suatu titik pusat pada daerah berdimensi n, yaitu $\mathbf{y}_0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \dots, \frac{1}{n}\right)$ dan suatu titik yang berada pada daerah berdimensi $(n-1)$, yaitu $\mathbf{y}_{(n-1)} = \left(0, \frac{1}{(n-1)}, \frac{1}{(n-1)}, \dots, \frac{1}{(n-1)}\right)$.

Sebagai ilustrasi mengenai jari-jari pada metode Karmarkar, diberikan Gambar 2.3.1 sebagai berikut (dengan mengasumsikan daerah tiga dimensi adalah daerah berdimensi n dan daerah dua dimensi adalah daerah berdimensi $(n-1)$).



Gambar 2.3.1 Ilustrasi jari-jari pada metode Karmarkar

Kemudian dengan menggunakan rumus jarak antara dua vektor pada $\mathbb{R}^n$, dilakukan perhitungan sebagai berikut:

$$d(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_{(n-1)}) = \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_{(n-1)}\|$$

sehingga rumus jari-jari yang digunakan pada metode karmarkar adalah:

$$r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Selain ada jari-jari, pada metode Karmarkar juga digunakan sebuah jangkauan penyelesaian, yang dinotasikan dengan α. Jangkauan penyelesaian ini berguna untuk memperkecil nilai dari jari-jari awal pada gambaran bola atau lingkaran yang menjadi daerah layak untuk solusi masalah pemrograman linear. Sehingga gambaran bola yang baru juga menjadi lebih kecil. Ketentuan yang diberikan untuk menghitung jangkauan penyelesaian pada metode Karmarkar adalah sebagai berikut [4]:

$$\alpha = \frac{(n-1)}{3n}$$

dengan n adalah jumlah variabel.

2.4 Matriks Proyeksi dan Gradien Proyeksi

Dalam metode Karmarkar selain menggunakan matriks untuk proses perhitungan, matriks juga digunakan untuk memindahkan suatu vektor dari bentuk asal ke daerah proyeksinya. Matriks ini disebut matriks proyeksi dan hasil dari proyeksi vektor disebut gradien proyeksi. Pada metode Karmarkar matriks proyeksi (dinotasikan dengan P), adalah suatu matriks berukuran $m \times n$ yang dituliskan sebagai berikut [2]:

$$P = \begin{bmatrix} AD_k \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

dengan:

A adalah matriks koefisien dari sistem persamaan pada bentuk kanonik Karmarkar.

D_k adalah matriks diagonal yang setiap entri pada diagonalnya merupakan elemen dari vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pada $\mathbb{R}^n$.

$\mathbf{1}$ adalah vektor pada $\mathbb{R}^n$ yang setiap elemennya adalah satu.

Selanjutnya dengan bantuan matriks proyeksi, akan dihitung perpindahan suatu gradien, yang dimaksud gradien pada metode Karmarkar adalah suatu vektor pada $\mathbb{R}^n$ yang setiap elemennya merupakan koefisien dari fungsi tujuan pada bentuk kanonik Karmarkar (dinotasikan dengan $\mathbf{c}^{\mathbf{T}}$). Cara menentukan gradien proyeksi (dinotasikan dengan $\mathbf{c}_p$) pada metode Kararkar adalah sebagai berikut [2]:

$$\mathbf{c}_p = [I - P^T(PP^T)^{-1}P]\bar{\mathbf{c}}^{\,T}$$

dengan:

I adalah suatu matriks identitas,

P^T adalah matriks transpose dari matriks proyeksi,

$(PP^T)^{-1}$ adalah invers dari perkalian antara matriks proyesi dengan matriks transposnya, dan

$\bar{\mathbf{c}}^T$ adalah suatu vektor dari hasil kali antara vektor koefisien fungsi tujuan $(\mathbf{c}^\mathbf{T})$ dengan matriks diagonal (D_k).

3. Metode penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian yang berupa studi literatur. Untuk mempelajari hal-hal yang akan dibahas penulis menggunakan sumber berupa artikel, jurnal, dan buku. Tahapan penelitian ini dimulai dari mempelajari teori tentang titik dalam, masalah pemrograman linear, matriks dan operasi matriks, vektor, dan transformasi proyektif.

4. Hasil dan pembahasan

4.1 Bentuk Kanonik Karmarkar

Metode Karmarkar menyajikan masalah pemrograman linear dengan suatu bentuk khusus yang disebut bentuk kanonik Karmarkar. Jika terdapat masalah pemrograman linear dalam bentuk standar, maka masalah standar tadi harus dikonversikan menjadi masalah yang setara dengan bentuk kanonik Karmarkar dan kemudian diselesaikan dengan langkah-langkah yang telah ditetapkan [2]. Pada metode Karmarkar, masalah pemrograman linear ditulis dalam bentuk khusus sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan } \mathbf{c}^\mathbf{T}\mathbf{x}$$

kendala

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1x} = 1$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

dimana $\boldsymbol{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, A adalah suatu matriks berukuran $m \times n$, $\mathbf{c}^\mathbf{T} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$, dan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah sebuah sistem persamaan linear homogen dengan m persamaan linear dan n variabel, $\mathbf{0}$ adalah suatu vektor kolom yang setiap elemennya adalah nol, dan **1** adalah suatu vektor yang setiap elemennya adalah satu. Masing-masing dari A, $\mathbf{c}^\mathbf{T}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{0}$, dan **1** berada pada $\mathbb{R}^n$. Selain itu, keberlakuan metode Karmarkar tergantung pada dua kondisi berikut:

a. Titik awal harus berada di dalam pembatas yang homogen dan nonegatif. ($\mathbf{x}_0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ berada pada $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dan $\mathbf{1x} = 1$, dengan n adalah jumlah variabel).
b. Nilai optimal fungsi tujuan adalah nol.

Adapun cara untuk mengkonversikan masalah pemrograman linear standar ke bentuk kanonik Karmarkar adalah sebagai berikut: [9].
Diberikan suatu masalah pemrograman linear dalam bentuk standar berikut:

$$\text{Minimumkan } \mathbf{c}^\mathbf{T}\mathbf{x}$$

kendala

$$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

dengan A, $\mathbf{c}^\mathbf{T}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$, dan **1** berada pada $\mathbb{R}^n$.
Langkah mengkonversi masalah pemrograman linear tersebut ke bentuk kanonik Karmarkar adalah sebagai berikut:

Fungsi kendala pada pemrograman linear distandarisasi menjadi:

$$\text{Minimumkan } \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$$

kendala

$$A\mathbf{x} - S = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}, S \geq 0$$

dengan S adalah variabel slack yang digunakan untuk merubah pertidaksamaan menjadi persamaan pada fungsi kendala masalah pemrograman linear.

Kemudian dipilih nilai batasan yang lebih besar dari semua konstanta nilai kanan pada fungsi kendala, dan dimisalkan nilai ini adalah U. Pemilihan U yang besar diasumsikan akan melebihi ruang pemecahan layak, sehingga tidak merubah ruang solusi pada masalah pemrograman linear. Selain itu, pemilihan nilai U yang sangat besar juga tidak akan merubah nilai fungsi tujuan, hal ini dikarenakan setiap koefisien fungsi tujuan juga akan dikalikan dengan U. Setelah itu didefinisikan:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \leq U$$

selanjutnya pertidaksamaan tersebut distandarisasi menjadi:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + x_{n+1} = U.$$

Selanjutnya fungsi kendala yang telah distandarisasi dirubah ke bentuk sistem persamaan linear homogen seperti pada bentuk kanonik Karmarkar. Perubahan ini dilakukan dengan cara mengalikan sisi kanan setiap kendala dengan $(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + x_{n+1})/U$. Koefisien fungsi tujuan dikalikan dengan nilai U yang telah dipilih sebelumnya sehingga diperoleh fungsi tujuan baru pada masalah pemrograman linear seperti berikut:

$$\text{Minimumkan } (U\mathbf{c}^{\mathbf{T}})\mathbf{x}.$$

Setelah diperoleh sistem persamaan homogen dan fungsi tujuan yang baru dari hasil point a-d, hal ini berarti telah dikonversi menjadi bentuk kanonik Karmarkar dan susunan dari hasil konversinya adalah sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan } (U\mathbf{c}^{\mathbf{T}})\mathbf{x}$$

batasan

$$\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1x} = 1$$
$$\mathbf{x} \geq 0.$$

4.2 Langkah-Langkah Penyelesaian Masalah Pemrograman Linear dengan Metode Karmarkar

Setelah bentuk kanonik karmarkar terbentuk, daerah layak dari masalah Karmarkar adalah titik potong daerah berdimensi $(n-m)$ yang diberikan oleh sistem persamaan linear homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pada daerah $S_x = \{\mathbf{x} : \mathbf{1x} = \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq 0\}$ yang berdimensi $(n-1)$. Hasil dari titik potong ini adalah suatu daerah yang berdimensi $(n-m-1)$. Kemudian titik terbaru $\mathbf{x}_k$ pada daerah S_x ditransformasikan ke daerah baru $S_y = \{\mathbf{y} : \mathbf{1y} = 1, \mathbf{y} \geq 0\}$ yang berdimensi $(n-1)$. Hasil dari transformasi ini adalah sebuah titik $\mathbf{y}_0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ yang merupakan pusat dari daerah S_y. Daerah layak pada ruang y berlaku sebagai solusi untuk x dalam S_x, sehingga vektor $\mathbf{x}$ dapat diperoleh dengan cara:

$$\mathbf{x} = \frac{D_k \mathbf{y}}{\mathbf{1} D_k \mathbf{y}}.$$

Untuk tahap selanjutnya, masalah Kamarkar ditransformasi ke dalam suatu masalah pada ruang y sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan } \frac{\mathbf{c}^{\mathbf{T}} D_k \mathbf{y}}{\mathbf{1} D_k \mathbf{y}}$$

dengan kendala

$$P\mathbf{y} = P_0$$
$$\mathbf{y} \geq 0$$

dengan: $\bar{\mathbf{c}}^{\mathbf{T}} = \mathbf{c}^{\mathbf{T}} D_k$, $P = \begin{bmatrix} AD_k \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ dan $P_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solusi terbaik dari masalah ini akan menghasilkan sebuah solusi layak yang baru. Untuk menjelaskan batasan ini, dapat dilakukan dengan cara mengasumsikan bola $B(\mathbf{y}_0, r)$ pada bidang yang berdimensi n dengan pusat di $\mathbf{y}_0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ dan jari-jari r . Titik potong bola ini dengan daerah batasan $\{\mathbf{y}: 1\mathbf{y} = 1\}$ adalah sebuah bola berdimensi $(n-1)$ dengan pusat dan jari-jari yang sama, yaitu $r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Telah diketahui bahwa masalah yang bertujuan meminimumkan $\bar{\mathbf{c}}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$ dengan batasan $P_y = P_0$, $\mathbf{y} \geq 0$ dan $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \alpha r)$, dengan $0 < \alpha < 1$ adalah sebuah konstanta. Pemilihan α yang tepat dapat memperkecil gambaran bola yang semula sehingga bola yang baru memiliki jari-jari αr. Karena $\mathbf{y} \geq 0$, maka titik potong dari bola $B(\mathbf{y}_0, \alpha r)$ dengan daerah batasan $\{\mathbf{y}: 1\mathbf{y} = 1\}$ ini setara dengan masalah berikut [4]:

$$\text{Minimumkan } \bar{\mathbf{c}}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$$

kendala

$$P_y = P_0$$
$$(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)^T(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \leq \alpha^2 r^2$$

dengan $\{\mathbf{y}: (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)^T(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \leq \alpha^2 r^2\}$ adalah gambaran dari bola $B(\mathbf{y}_0, \alpha r)$ dan nilai α yang diperkirakan sebesar $\alpha = (n-1)/3n$.

Berdasarkan batasan $P_y = P_0$ yang didefinisikan oleh daerah $(n-m-1)$ dimensi yang melalui nilai dari pusat bola $B(\mathbf{y}_0, \alpha r)$, maka daerah layak pada masalah tersebut adalah sebuah bola berdimensi $(n-m-1)$ yang berpusat di $\mathbf{y}_0$. Hal ini menyatakan bahwa solusi optimal dari Masalah tersebut terpenuhi oleh proyeksi gradien negatif dari fungsi tujuan, yaitu $-\bar{\mathbf{c}}^{\mathbf{T}}$, yang berpusat di $\mathbf{y}_0$ di atas batasan permukaan dari $P\mathbf{y} = P_0$ dan pergeseran dari $\mathbf{y}_0$ mendekati arah proyeksi menuju batas dari bola $B(\mathbf{y}_0, \alpha r)$. Kemudian arah proyeksi dari gradien $\bar{\mathbf{c}}^{\mathbf{T}}$ dinotasikan sebagai $\mathbf{c}_p$ dan solusi optimalnya disebut sebagai $\mathbf{y}_k$, sehingga diperoleh:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_0 - \alpha r \frac{\mathbf{c}_p}{\|\mathbf{c}_p\|}$$

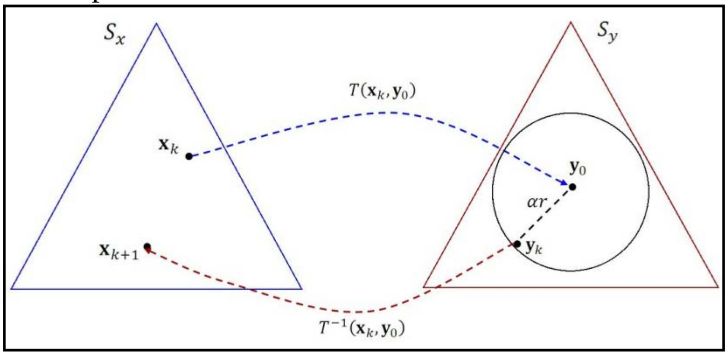
dengan $\mathbf{c}_p = [I - P^t(PP^t)^{-1}P]\bar{\mathbf{c}}^{\,t}$.

Setelah diperoleh $\mathbf{y}_k$ sebagai solusi maka perbaharuan vektor $\mathbf{x}_{k+1}$ dalam ruang x diperoleh sebagai berikut [8]:

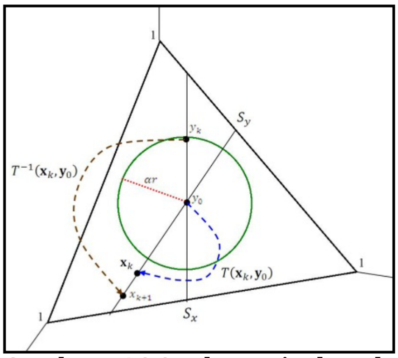
$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{D_k \mathbf{y}_k}{\mathbf{1} D_k \mathbf{y}_k}.$$

Karena nilai dari $\mathbf{x}_{k+1}$ telah diperoleh, berarti sebuah langkah iterasi telah terpenuhi dan langkah-langkah sebelumnya dapat diulang untuk memperoleh k tiap satu tingkat.

Penjelasan mengenai langkah kerja metode Karmarkar secara ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 4.2.1 berikut:



Gambar 4.2.1 Ilustrasi langkah kerja metode Karmarkar



Gambar 4.2.2 Ilustrasi daerah nonegatif pada metode Karmarkar

Selanjutnya dicari nilai batasan ini yang berguna untuk menentukan hingga berapa kali iterasi harus dilakukan [2].

$$L = \left\lceil 1 + {}^{2}log(1 + |c_{jmax}|) + {}^{2}log(1 + m) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} {}^{2}log(1 + |a_{ij}|) \right\rceil$$

dengan keterangan sebagai berikut:

$|c_{jmax}|$ = bilangan terbesar dari koefisien fungsi tujuan
m = jumlah persamaan homogen pada masalah pemrograman linear
$|a_{ij}|$ = bilangan entri matriks baris ke-*i* dan kolom ke-*j*.

Setelah diperoleh nilai batasan iterasi diatas, kemudian diperhatikan nilai akhir dari setiap iterasi yang sedang dilakukan, jika nilai dari fungsi tujuan sudah memenuhi kriteria $\mathbf{c}^{\mathbf{T}} \mathbf{x}_k < 2^{-L}$, maka iterasi dapat dihentikan dan hal ini berarti masalah bentuk kanonik Karmarkar telah menemui titik solusi optimal yaitu $\mathbf{x}_k$.

Contoh Diberikan suatu masalah pemrograman linear dalam bentuk karmarkar sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan } x_1 + x_2 + x_4 + x_6$$

kendala

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 + x_6 - 2x_7 = 0$$
$$x_1 - 4x_3 - x_4 - 7x_6 + x_7 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1$$
$$x_i \geq 0$$

Penyelesaian:

Formulasi vektor dan matriks pada fungsi tujuan dan fungsi kendala:

$$\mathbf{c}^{\mathbf{T}} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$
Perhitungan titik awal $(\mathbf{x}_0)$, jari-jari (r), jangkauan penyelesaian(α), dan nilai batasan iterasi $(L\ )$, masing-masing sebagai berikut:
$$\mathbf{x}_0 = \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right]$$
$$r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{1}{\sqrt{42}} = 0{,}1543$$
$$\alpha = \frac{(n-1)}{3n} = \frac{6}{21} = 0{,}2857$$
$$L = \left\lceil 1 + {}^{2}log(1 + |c_{jmax}|) + {}^{2}log(1+m) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} {}^{2}log\left(1 + |a_{ij}|\right) \right\rceil$$
$$L = 24$$
Nilai kriteria pemberhentian adalah:
$\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_k < 2^{-L} = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_k < 2^{-24} = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_k < 0{,}000000059605.$

Dengan melakukan iterasi seperti pada penjelasan sebelumnya, proses perhitungan berhenti pada iterasi ke-74. Dari hasil iterasi diperoleh nilai $\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_{74} = 0{,}000000053805$, hal ini berarti kondisi $\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_{74} < 0{,}000000059605$ telah terpenuhi. Jadi, titik solusi optimal dari masalah pemrograman linear untuk Contoh 3.2 adalah (0,000000013451, 0,000000013451, 0,14294, 0,000000013451, 0,28561, 0,000000013451, 0,57145) dan solusi optimalnya adalah $0{,}000000053805$.

5. Kesimpulan

1. Jika suatu masalah pemrograman linear standar akan diselesaikan dengan menggunakan metode Karmarkar, maka masalah tersebut harus dikonversi ke dalam bentuk kanonik Karmarkar dengan cara sebagai berikut:
   a. Menstandarisasi fungsi kendala.
   b. Memilih nilai batasan yang diasumsikan tidak melebihi ruang pemecahan layak.
   c. Merubah fungsi kendala yang telah distandarisasi ke bentuk sistem persamaan linear homogen.
   d. Mengalikan koefisien fungsi tujuan dengan nilai batasan.
   e. Menyusun bentuk kanonik Karmarkar yang terdiri dari satu fungsi tujuan dan beberapa sistem persamaan linear homogen.
2. Langkah-langkah penyelesaian masalah pemrograman linear dengan metode Karmarkar adalah sebagai berikut:
   a. Pilih titik awal $\mathbf{x}_0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$, kemudian hitung $r = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}$,
   $\alpha = (n-1)/3n$, dan

$$L = \left[1 + {}^2log(1 + |c_{jmax}|) + {}^2log(1 + m) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} {}^2log\left(1 + |a_{ij}|\right) \right]$$

dengan n adalah jumlah variabel.

b. Kemudian lakukan iterasi dengan cara:
definisikan,
$D_k = diag\{x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}\}$ dan $P = \begin{pmatrix} A\,D_k \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$
kemudian dihitung,

$$\mathbf{y}_k = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)^T + \alpha r \frac{\mathbf{c}_p}{\|\mathbf{c}_p\|}$$

dengan $\mathbf{c}_p = [I - P^t(PP^t)^{-1}P]\left(\mathbf{c}^{\mathbf{T}} D_k\right)$.

c. Untuk solusi dari iterasi, diperoleh dengan:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{D_k \mathbf{y}_k}{\mathbf{1} D_k \mathbf{y}_k}.$$

d. Kemudian diperhatikan nilai akhir pada setiap iterasi. Jika pada proses perhitungan sudah memenuhi kondisi $\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}_k < 2^{-L}$, maka iterasi dapat dihentikan dan solusi optimal telah diperoleh, yaitu $\mathbf{x}_k$.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H., dan Rorres, C., 2004, *Aljabar Linear Elementer*, Erlangga, Jakarta.
[2] Bazaraa, M., Jarvis J., and Suherall, H., 1990, *Linear Programming and Network Flows*. Wiley, New York.
[3] Darmawijaya, S., 2007, *Pengantar Analisis Abstrak.* Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
[4] Franklin, J., 1987, Convergence In Karmarkar's Algorithm For Linear Programming, *Siam J. Number. Anal.*, Vol. 24. No. 4: 928-935.
[5] Hillier, S.F dan Lieberman, J.G., 2008, *Introduction To Operation Research*. Penerbit ANDI, Jakarta.
[6] Karmarkar, N., 1984, A New Polinomial Time Algorithm For Linear Programming, *Journal of Combinatorica.*, 4: 373-385.
[7] Leon, J.S., 2001, *Aljabar Linear dan Aplikasinya.* Erlangga, Jakarta.
[8] Martin, K.R., 1999, *Large Scale Linear and Integer Optimization*, Kluwer Academic Publicers, United States of America.
[9] Taha, A.H., 1996, *Riset Operasi*, Binarupa Aksara, Jakarta.