Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.17 No.2 (Desember 2023) Hal. 239-248

RUANG BARISAN KONVERGEN *LACUNARY STATISTIC*

Haryadi[1], Solikhin[2]

[1]Program Studi Ilmu Komputer, Universitas Muhammadiyah Palangkaraya
[2]Departemen Matematika FSM, Universitas Diponegoro
[1]Jl. RTA Milono Km. 1,5, Palangkaraya, Kalimantan Selatan
[2]Jl. Prof. Soedarto, SH Tembalang, Semarang, Jawa Tengah
email: [1]*haryadi@umpr.ac.id*

ABSTRACT

The discussion of convergence in a sequence space, in addition to being able to examined by studying the tendency the values of the terms, can also be done by examining the number of indices of the terms that meet certain conditions. In this paper, we use the concept of lacunary statistic convergence to construct a linear metric space and then examine its topological properties. We show that the space includes the space of bounded sequence and the space of strong summable Cesaro of order one. Furthermore, the linear metric space is a *Frechet* space and an *FK*-space but has not *AK* property.

Keywords: lacunary statistic, metric, FK.

ABSTRAK

Pembahasan mengenai kekonvergenan dalam suatu ruang barisan, selain dapat ditelaah dengan mempelajari kecenderungan nilai-nilai sukunya, juga dapat dilakukan dengan menelaah jumlah indeks suku-sukunya yang memenuhi syarat tertentu. Dalam makalah ini digunakan konsep konvergen *lacunary statistic* untuk membangun ruang metrik linear dan dilanjutkan dengan menelaah sifat-sifat topogi ruang tersebut. Hasil telaah menunjukkan bahwa ruang metrik tersebut mencakup ruang barisan terbatas dan ruang barisan terjumlah kuat Cesaro orde satu. Lebih lanjut, ruang linear tersebut merupakan ruang *Frechet* dan ruang-*FK* tetapi tidak memiliki sifat *AK*.

Kata kunci: *lacunary statistic*, metrik, *FK*.

Received: 30 September 2023, Accepted: 28 November 2023, Published: 1 Desember 2023

PENDAHULUAN

Pembahasan mengenai kekonvergenan pada suatu barisan sering dikerjakan dengan menelaah kecenderung nilai suku-sukunya. Seperti telah diketahui, barisan dengan suku-suku real atau kompleks (x_k) dikatakan konvergen ke c jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli n_0 sehingga $|x_k - c| < \varepsilon$ untuk untuk setiap $n \geq n_0$. Dari sini dapat diperhatikan bahwa $|x_k - c| \geq \varepsilon$ bisa terjadi hanya untuk $n < n_0$, yang berarti bahwa banyaknya indeks k sehingga $|x_k - c| \geq \varepsilon$ adalah kurang dari n_0. Ruang barisan konvergen *lacunary statistic* dibangun berdasarkan banyaknya indeks dari suku-suku barisan yang seperti pada uruaian di atas.

Penelitian topik-topik yang terkait dengan barisan konvergen *lacunary* bernilai skalar maupun vektor telah dilakukan oleh bebrapa penulis. Barisan konvergen *lacunary* kuat bernilai vektor diperkenalkan didalam (Mursaleen *et al*., 2014). Konvergen *lacunary statistic* terbobot diperkenalkan dalam (Basarir *et al*., 2014) dan generalisasinya dilakukan oleh (Sengul, 2017). Sementara itu (Savas, 2019) membahas kekonvergenan *lacunary statistic* pada ruang barisan fungsi bernilai real. Beberapa relasi inklusi ruang barisan konvergen *lacunary* ditelaah di dalam (Colak *et al*., 2016) dan (Aral *et al*., 2020). Perkembangan mengenai barisan *lacunay* baru diperkenalkan di dalam (Tamang *et al*., 2016), (Leon-Saavedra *et al*., 2019) dan (Omer, 2022), sedangkan aplikasinya dibahas di dalam (Pradip, 2012) dan (Bhardwaj *et al*., 2018).

Di dalam jurnal ini akan dikonstruksi ruang metrik linear yang anggota-anggotanya semua barisan konvergen *lacunary statistic*. Lebih lanjut akan ditelaah sifat-sifat barisan sebagai ruang metrik linear, khususnya sifat inklusi dengan ruang barisan lain dan sifat *AK*.

TINJAUAN PUSTAKA

Untuk pembahasan di dalam makalah ini perlu disampaikan kembali beberapa konsep dan definisi yang terkait dengan ruang barisan. Ruang barisan dengan suku-suku bilangan real atau kompleks dinotasikan dengan ω. Notasi $x = (x_1, x_2, \cdots)$ juga dituliskan dengan (x_k) atau $(x_k)_{k=1}^{\infty}$. Barisan dengan suku-suku di dalam ω dituliskan $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ dimana untuk setiap n, $x^n = (x_k^n)_{k=1}^{\infty}$.

Untuk sebarang barisan $x = (x_k)$, *m-section* dari x dituliskan $x^{[m\}}$ dan didefinisikan

$$x^{[m]} = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0,0, \cdots).$$

Notasi ϕ menyatakan himpunan semua barisan berhingga, yakni

$$\phi = \{x \in \omega : x = (x_1, x_2, \cdots, x_s, 0,0, \cdots) \text{ untuk suatu } s\}.$$

Dalam kaitannya dengan hubungan inklusi yang akan ditelaah, perlu disampaikan kembali ruang-ruang barisan sebagai berikut:

$$c = \{(x_k) \in \omega : x_k \to c \ \text{ untuk suatu } \ c\}$$

$$\ell_1 = \left\{(x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\right\}$$

$$\ell_p = \left\{(x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\right\}, \text{dengan } 1 < p < \infty$$

$$\ell_\infty = \{(x_k) \in \omega : sup_k |x_k| < \infty\}$$

$$w_1 = \left\{(x_k) \in \omega : \ lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - c| = 0 \ \text{ untuk suatu } \ c\right\}$$

Barisan *lacunary* adalah barisan bilangan bulat non negatif monoton naik $\theta = (k_r)$, dengan $k_r - k_{r-1} \to \infty$ jika $r \to \infty$ dan $k_0 = 0$ (Gokhan, 2013) dan (Yaying *et al*., 2017). Notasi I_r dan h_r masing-masing menyatakan

$$I_r = (k_{r-1}, k_r] = \{k \in \mathbb{N} : k_{r-1} < k \leq k_r\}$$

dan

$$h_r = k_r - k_{r-1}.$$

Sebagai contoh, barisan (k_r) dengan $k_r = 2^r$ untuk $r = 1,2,\cdots$ dan $k_0 = 0$ merupakan barisan *lacunary* dengan $I_r = (2^{r-1}, 2^r]$ dan $h_r = 2^{r-1}$.

Pengertian barisan konvergen *lacunary statistic* dapat dijumpai didalam (Savas, 2019). Barisan bilangan (x_k) dikatakan konvergen *lacunary statitic* ke L jika

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \#\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0$$

dimana $\#\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ menyatakan banyaknya $k \in I_r$ dengan $|x_k - L| \geq \varepsilon$. Selanjutnya, himpunan semua barisan konvergen *lacunary statitic* dituliskan dengan N_θ.

Teori ruang-*FK* (*Frechet-Coordinate*) berperan penting dalam membuka topik-topik lainnya seperti topologi ruang barisan dan keterjumlahan *(Akdemir et al.*, 2022). Suatu ruang barisan yang dilengkapi dengan suatu metrik dinamakan ruang *Frechet* jika ruang barisan tersebut lengkap. Ruang $X \subseteq \omega$ dinamakan ruang K jika setiap pemetaan proyeksi komponen ke-k, $P_k : X \to S$ dengan $P_k(x) = x_k$ kontinu. Jika X ruang K dan sekaligus ruang Frechet, maka X dinamakan ruang-*FK*. Ruang *Frechet* $X \subseteq \omega$ dinamakan ruang-*AK* (*Abschnitts konvergenz*) jika X memuat semua barisan berhingga dan untuk setiap $x \in X$, $x^{[m]} \to x$ jika $m \to \infty$.

METODE PENELITIAN

Artikel ini merupakan hasil kajian teoritis yang didasarkan pada hasil-hasil penelitian terdahulu. Didalam makalah ini terlebih dahulu akan ditelaah sifat inklusi himpunan barisan N_θ sebagai perluasan barisan yang telah dikenal baik dengan dengan cara membandingkan dengan barisan $c, \ell_1, \ell_p, \ell_\infty$ dan w_1. Untuk pembahasan tentang sifat-sifat topologi, perlu diperiksa terlebih dahulu sifat linear dari himpunan N_θ dan dikonstruksi metrik sehingga terbentuk ruang metrik linear. Dengan kerangka demikian selanjutnya akan ditelaah sifat-sifat yang terkait dengan kekonvergenan seperti sifat *Frechet*, *K* dan *FK*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Terlebih dahulu akan disampaikan hasil-hasil yang terkait dengan hubungan inklusi ruang barisan N_θ dengan ruang barisan lainnya.

Teorema 1
Jika (x_k) konvergen ke c, maka (x_k) konvergen *lacunary statistic* ke c.

Bukti: Diketahui (x_k) konvergen ke c. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Terdapat bilangan asli N sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $|x_k - c| < \varepsilon$. Dengan demikian kondisi $|x_k - c| \geq \varepsilon$ hanya bisa terjadi untuk $k < N$. Akibatnya

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \#\{k \in I_r : |x_k - c| \geq \varepsilon\} \leq \lim_{r\to\infty} \frac{N}{h_r} = 0.$$

Ruang barisan ℓ_∞ bukan merupakan ruang bagian N_θ. Demikian pula sebaliknya, ruang barisan N_θ bukan ruang bagian ℓ_∞, seperti ditunjukkan melalui dua contoh berikut.

Contoh 2
Barisan (x_k) dengan $x_k = \sqrt{k_r}$ jika $k = k_r$ dan $x_k = 0$ untuk $k \neq k_r$ merupakan barisan konvergen *lacunary statistic* ke 0, sebab

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \#\{k \in I_r : |x_k| \geq \varepsilon\} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} = 0,$$

namun $(x_k) \notin \ell_\infty$, sebab $\sup_k |x_k| = \sup_k \sqrt{k} = \infty$. Lebih lanjut barisan tersebut juga konvergen Cesaro kuat ke 0, yakni

$$\frac{1}{h_r} \sum_{h_r} |x_k| = \frac{1}{\sqrt{h_r}} \to 0.$$

Contoh 3
Diambil sebarang $(x_k) \in \ell_\infty$ dengan $x_k = 1$ jika k ganjil dan $x_k = 0$ jika k genap. Untuk $c = 1$, $|x_k - c| = 0$ jika k ganjil dan $|x_k - c| = 1$ jika k genap; untuk $c = 0$, $|x_k - c| = 1$ jika k ganjil dan $|x_k - c| = 0$ jika k genap; untuk $c \neq 1$ dan $c \neq 0$, $|x_k - c| \geq d$ dengan $d = min\{|1 - c|, |c|\}$. Diambil bilangan positif $\varepsilon < \min\{1, d\}$. Untuk sebarang bilangan asli r,

$$\#\{k \in I_r : |x_k - c| \geq \varepsilon\} \geq \frac{h_r}{2}.$$

Oleh karena itu $\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \#\{k \in I_r : |x_k - c| \geq \varepsilon\} \geq \frac{1}{2}$, yang berarti $(x_k) \notin N_\theta$.

Hubungan inklusi antara l_1 dan N_θ dinyatakan dalam teorema berikut, yang juga dapat dinyatakan dengan $\ell_1 \subset N_\theta$.

Teorema 4
Jika $x = (x_k) \in \ell_1$ maka x konvergen *lacunary statistic* ke 0.
Bukti: Disambil sebarang $x = (x_k) \in \ell_1$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli n_0 sehingga $\sum_{k=n}^{\infty} |x_k| < \varepsilon$ jika $n \geq n_0$. Oleh karena itu $\#\{k \in I_r : |x_k| \geq \varepsilon\} \leq n_0$ sehingga berakibat itu $\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \#\{k \in I_r : |x_k| \geq \varepsilon\} \leq \lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{n}_0}{h_r} = 0$.

Contoh berikut menunjukkan bahwa hubungan inklusi $\ell_1 \subset N_\theta$ merupakan inklusi sejati.

Contoh 5

Barisan $x = (x_k)$ dengan $x_k = \frac{1}{k}$, $k = 1,2,\cdots$ bukan anggota ℓ_1, sebab $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Akan ditunjukkan bahwa barisan tersebut konvergen *lacunary statistic* ke 0. Untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ diambil bilangan asli n_0 sehingga $n_0 > 1/\varepsilon$. Dengan demikian $|x_k| = \frac{1}{k} < \varepsilon$ untuk setiap $k \geq n_0$. Oleh karena itu $\frac{1}{h_r}\#\{k \in I_r : |x_k| \geq \varepsilon\} \leq \frac{n_0}{h_r} \to 0$ jika $r \to \infty$.

Teorema 6
Ruang barisan $\ell_p, 1 < p < \infty$, merupakan ruang bagian N_θ.
Bukti: Diambil sebarang $(x_k) \in \ell_p$. Karena $\sum_k |x_k|^p < \infty$, maka terdapat N sehingga $\sum_k |x_k|^p < \varepsilon$ untuk setiap $k \geq N$. Oleh karena itu $\#\{k \in I_r : |x_k| \geq \varepsilon\} < N$ dan berakibat

$$\frac{1}{h_r}\#\{k \in I_r : |x_k| \geq \varepsilon\} \leq \frac{N}{h_r} \to 0 \quad \text{jika } h_r \to \infty.$$

Di dalam Teorema 6, ℓ_p merupakan himpunan bagian sejati N_θ, seperti ditunjukkan pada contoh berikut.

Contoh 7
Diberikan barisan *lacunary* $\theta = (k_r)$. Untuk setiap r diambil bilangan $[\sqrt{h_r}]$, yaitu bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan $\sqrt{h_r}$. Dibentuk barisan $x = (x_k)$ dengan

$$x_k = \begin{cases} 1, \text{ jika } k_{r-1} < k \leq k_{r-1} + [\sqrt{h_r}] \\ 0, \text{ jika } k_{r-1} + [\sqrt{h_r}] < k \leq k_r \end{cases}$$

Barisan ini bukan anggota ℓ_p, sebab $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \geq [\sqrt{h_r}]$ untuk setiap $n \geq k_r$ sehingga berakibat $\sum_k |x_k|^p = \infty$. Selanjutnya

$$\frac{1}{h_r}\#\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \frac{[\sqrt{h_r}]}{h_r} \leq \frac{1}{\sqrt{h_r}} \to 0$$

jika $r \to \infty$, yang berarti barisan (x_k) anggota N_θ.

Teorema 8
Jika (x_k) terjumlah kuat Cesaro orde 1, maka $(x_k) \in N_\theta$.
Bukti: Misalkan barisan $x = (x_k)$ terjumlah kuat Cesaro orde satu ke c. Jadi untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - c| < \varepsilon n_0.$$

Karena

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - c| \geq \sum_{|x_k - c| \geq \varepsilon} |x_k - c| \geq \varepsilon\#\{k \in I_r : |x_k - c| \geq \varepsilon\}$$

maka untuk $h_r \geq 1/\varepsilon$ berlaku

$$\frac{1}{h_r}\#\{k \in I_r : |x_k - c| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k - c|$$

Ruas kanan ketaksamaan terakhir menuju 0 jika $n \to \infty$.

Pada bagian berikutnya dibahas sifat linear dan konstruksi metrik pada himpunan semua barisan konvergen *lacunary statistic* N_θ.

Teorema 9

Himpunan N_θ merupakan ruang linear.

Bukti: Diambil $(x_k), (y_k) \in N_\theta$ dan sebarang bilangan real α. Dimisalkan barisan (x_k) dan (y_k) berturut-turut konvergen *lacunary* ke L dan K, yakni untuk sebarang $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\#\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0 \text{ dan } \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\#\{k \in I_r : |y_k - K| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Karena

$$\{k \in I_r : |\alpha(x_k - L)| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha| + 1}\right\},$$

maka

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\#\{k \in I_r : |\alpha(x_k - L)| \geq \varepsilon\} \leq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\#\left\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha| + 1}\right\} = 0$$

yang berarti $\alpha(x_k) \in N_\theta$.

Selanjutnya dituliskan

$$A = \{k \in I_r : |(x_k + y_k) - (L + K)| \geq \varepsilon\}$$
$$B = \left\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$
$$C = \left\{k \in I_r : |y_k - K| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Misalkan A bukan himpuan bagian $B \cup C$. Jadi terdapat $k \in A$ sehingga $k \notin A \cup B$, yang berarti

$$|(x_k + y_k) - (L + K)| \geq \varepsilon \quad \text{tetapi} \quad |x_k - L| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{dan} \quad |y_k - K| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Akibatnya

$$|x_k - L| + |y_k - K| < \varepsilon \leq |(x_k + y_k) - (L + K)| \leq |x_k - L| + |y_k - K|.$$

Dengan demikian $A \subseteq B \cup C$ dan berakibat

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\#\{k \in I_r : |(x_k + y_k) - (L + K)| \geq \varepsilon\}\\
&\qquad\leq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\#\left\{\left\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{k \in I_r : |y_k - K| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right\}\\
&\qquad\leq \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\#\left\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\\
&\qquad+ \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\#\left\{k \in I_r : |y_k - K| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0,
\end{aligned}$$

yakni $(x_k) + (y_k)$ anggota N_θ.

Teorema 10
Fungsi $d_\theta: N_\theta \times N_\theta \to [0, \infty)$ dengan

$$d_\theta(x,y) = \sup_r \frac{1}{h_r} \#\{k \in I_r : |x_k - y_k| \geq \varepsilon\},$$

merupakan metrik.
Bukti: Persyaratan simetris metrik d_θ jelas berlaku. Selanjutnya akan ditunjukkan dua persyaratan lainya berlaku.

Diambil $x = (x_k)$ dan $y = (y_k)$ sehingga $x \neq y$. Jadi ada k sehingga $x_k \neq y_k$. Dengan demikian dapat diambil $\varepsilon > 0$ sehingga $|x_k - y_k| \geq \varepsilon$ dan berakibat $\sup_r \frac{1}{h_r} \#\{k \in I_r : |x_k - y_k| \geq \varepsilon\} > 0$. Selanjutnya, karena untuk sebarang $\varepsilon > 0$, $\{k \in I_r : |x_k - x_k| \geq \varepsilon\}$ himpunan kosong, maka $d_\theta(x,x) = 0$.
Karena $|x_k - y_k| \leq |x_k - z_k| + |z_k - y_k|$, maka

$$\{k \in I_r : |x_k - y_k| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \in I_r : |x_k - z_k| \geq \varepsilon\} + \{k \in I_r : |z_k - y_k| \geq \varepsilon\}$$

Oleh karena itu untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap r berlaku

$$\#\{k \in I_r : |x_k - y_k| \geq \varepsilon\} \leq \#\{k \in I_r : |x_k - z_k| \geq \varepsilon\} + \#\{k \in I_r : |z_k - y_k| \geq \varepsilon\}$$

Dengan mengambil supremum kedua ruas, diperoleh ketaksamaan segitiga.

Teorema 11
Ruang metriks N_θ merupakan ruang Frechet.
Bukti: Diketahui $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ barisan Cauchy di N_θ. Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Terdapat bilangan asli n_0 sehingga $d_\theta(x^n, x^m) < \varepsilon$ jika $n \geq n_0$. Akibatnyanya untuk setiap $n, m \geq n_0$ dan untuk setiap bilangan asli r berlaku

$$\#\{k \in I_r : |x_k^m - x_k^n| \geq \varepsilon\} < \varepsilon h_r$$

Karena ε sebarang, maka

$$\#\{k \in I_r : |x_k^m - x_k^n| \geq \varepsilon\} < 1 \quad (m, n \geq n_0).$$

Oleh karena itu

$$\{k \in I_r : |x_k^m - x_k^n| \geq \varepsilon\} = \emptyset \quad (m, n \geq n_0),$$

yang berarti untuk setiap $k \in I_r$,

$$|x_k^m - x_k^n| < \varepsilon \quad (m, n \geq n_0).$$

Jadi untuk setiap bilangan asli k, $(x_k^n)_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Dengan demikian $x_k^n \to x_k$ jika $n \to \infty$.

Dibentuk barisan $x = (x_k)$. Akan ditunjukkan bahwa x konvergen di dalam N_θ. Untuk sebarang bilangan asli k dan r terdapat bilangan asli n_k sehingga

$$|x_k^n - x_k| < \varepsilon$$

Untuk setiap $n \geq n_k, k \in I_r$. Diambil $N_r = maks\,\{n_k : k \in I_r\}$. Diperoleh

$$|x_k^n - x_k| < \varepsilon \quad (n \geq N_r)$$

Oleh karena itu

$$\{k \in I_r : |x_k^n - x_k| \geq \varepsilon\} = \emptyset \quad (n \geq N_r),$$

sehingga berakibat

$$d_\theta(x^n, x) = \sup_r \frac{1}{h_r} \#\{k \in I_r : |x_k^n - x_k| \geq \varepsilon\} < \varepsilon$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(x_k) \in N_\theta$. Berdasarkan ketaksamaan terakhir, $x^n - x \in N_\theta$. Karena N_θ ruang linear, maka $x = x - x^n + x^n$ anggota N_θ.

Teorema berikut menjelaskan sifat *FK* ruang barisan N_θ, yakni pemetaan proyeksi dari N_θ ke $\mathbb{R}$ bersifat kontinu.

Teorema 12

Ruang barisan N_θ merupakan ruang-*FK*.

Bukti: Diambil sebarang (x^n) di dalam N_θ sehingga $x^n \to x \in N_\theta$ jika $n \to \infty$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli n_0 sehingga $d_\theta(x^n, x) < \varepsilon$ jika $n \geq n_0$. Oleh karena itu untuk sebarang bilangan asli r,

$$\frac{1}{h_r}\#\{k \in I_r : |x_k^n - x_k| \geq \varepsilon\} \leq d_\theta(x^n, x) < \varepsilon.$$

Akibatnya $|x_k^n - x_k| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq n_0$. Dengan demikian

$$\left|P_j(x^n) - P_j(x)\right| = \left|x_j^n - x_j\right| \to 0$$

jika $n \to \infty$, yang berarti pemetaan $P_j : N_\theta \to \mathbb{R}$ dengan $P_j(x) = x_j$ kontinu.

Contoh berikut menunjukkan bahwa N_θ tidak memiliki sifat *AK*.

Contoh 13

Barisan $x = (x_k)$ dengan $x_k = 1$ merupakan anggota N_θ. Diambil sebarang bilangan asli m, Jadi $x^{[m]} = (1,1,\cdots,1,0,0,\cdots)$, yakni $x_k^{[m]} = 1$ untuk $k \leq m$ dan $x_k^{[m]} = 0$ untuk $k > m$. Akibatnya

$$\left|x_k^{[m]} - x_k\right| = \begin{cases} 0, & k \leq m \\ 1, & k > m \end{cases}$$

Dengan demikian untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan $h_r > m$, $\#\left\{k \in I_r : \left|x_k^{[m]} - x_k\right| \geq \varepsilon\right\} = h_r$ dan diperoleh

$$d_\theta\left(x^{[m]}, x\right) = \sup_r \frac{1}{h_r}\#\left\{k \in I_r : \left|x_k^{[m]} - x_k\right| \geq \varepsilon\right\} = 1$$

yang berakibat $x^{[m]}$ tidak konvergen ke x.

KESIMPULAN

Himpunan semua barisan konvergen *lacunary statistic* merupakan ruang metrik linear yang juga merupakan ruang *Frechet* dan ruang-*FK*. Diketahuinya ruang barisan tersebut sebagai ruang-*FK* dapat digunakan untuk menelaah transformasi matriks tak hingga pada ruang barisan tersebut.

REFERENSI

Akdemir, A. O., Ersoy, M. T., Furkan, H., & Ragusa, M. A. (2022). Some Functional Sections in Topological Sequence Spaces. *Hindawi Journal of Function Spaces*. 1–7.

Aral, N, D., & Gunal, S. (2020). On M_lambda (m,n)-Statistical Convergence. *Hindawi Journal of Mathematics*. 1–8.

Basarir, M., & Konca, S. (2014). Weighted Lacunary Statistical Convergence in Locally Solid Riesz Spaces. *Filomat, Faculty of Sciences and Mathematics, Univesity of Nis, Serbia*. Vol. 28(10), 2059–2067.

Bhardwaj, V. K., & Dhawan, S. (2018). Application of f -lacunary statistical convergence to approximation theorems. *Journal of Inequalities and Applications*. Vol. 281, 1–25.

Colak, R., Bektas, C. A., Altinok, H., & Ercan, S. (2016). On Inclusion Relations between Some Sequence Spaces. *International Journal of Analysis*. 1–4.

Gokhan, A. (2013). Lacunary Statistical Convergence of Sequences of Real-Valued Functions. *Hindawi: Abstract and Applied Analysis*. 1–4.

Leon-Saavedra, F., Listan-Garcia, C., Fernandes, F. J. P., & de la Rosa, M. P. R. (2019). On Statistical Convergence and Strong Cesaro Convergence by Moduli. *Journal of Inequalities and Applications*. Vol. 298, 1–12.

Mursaleen, M., Alotaibi, A., & Sharma, S. K. (2014). Some New Lacunary Strong Convergent Vector-Valued Sequence Spaces. *Hindawi: Abstract and Applied Analysis*. 1–8.

Omer, K. (2022). On I-Lacunary Arithmetic Statistical Convergen. *J. Appl. Math. & Informatics*. Vol. 40(1–2), 327–339.

Pradip, D. (2012). Lacunary ideal convergence in intuitionistic fuzzy normed linear spaces. *Computers and Mathematics with Applications*. Vol. 63, 708–715.

Savas, E. (2019). Lacunary Almost Convergence and Some New Sequence Spaces. *Filomat*. Vol. 33(5), 1397–1402.

Sengul, H. (2017). Some Cesaro-Type Summability Spaces Defined By A Modulus Function of Order (alpha, beta). *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1*. Vol. 66(2), 80–90.

Tamang, K., & Hazarika, B. (2016). Some geometric properties of lacunary Zweier Sequence Spaces of order α. *Proyecciones Journal of Matematics*. Vol. 35(4), 4810490.

Yaying, T., & Hazarika, B. (2017). *Lacunary Arithmetic Statistical Convergence*. *ArXiv:1703.03780v1*. Retrieved from https://doi.org/10.48550/arXiv.1703.03780