



ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREDATOR PREY* DENGAN TINGKATAN USIA PADA DUA *PREY* DAN DUA *PREDATOR* DENGAN FUNGSI RESPON MONOD-HALDANE DAN KANIBALISME

Robiatul Witari Wilda¹, Dita Monita¹, Febrianto Afli¹,
Ahmad Muammar Kadafi²

¹Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Palangka Raya

²Program Studi Biologi Fakultas MIPA Universitas Palangka Raya

Jl. Yos Sudarso, Palangka Raya 73112, Kalimantan Tengah

email: robiatulwitariwilda@mipa.upr.ac.id

ABSTRACT

This article discusses the predator-prey model for two predators and two prey with a Monod-Haldane response function and cannibalism which describes the interactions between populations of young prey, adult prey, young predators and adult predators. In this model it is assumed that only adult predators are able to attack to eat young predators, only adult prey are able to reproduce, there is a Monod-Haldane effect which describes the phenomenon of group defense where predation is reduced, or even prevented altogether, because the prey's ability to defend is increased. advanced or camouflage when the number of prey is large enough. Dynamic analysis is conducted by determining the equilibrium points and examining their existence. Stability analysis at the equilibrium point in the model is conducted by linearizing the model around the equilibrium point to determine the Jacobian matrix. From this Jacobian matrix, eigenvalues are computed to evaluate the stability of the system. The research results show that this model has three equilibrium points, namely the trivial equilibrium point $E_1 = (0,0,0,0)$, the prey extinction point $E_2 = (0,0, y_1, y_2)$ and the interior point $E_3 = (x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$. The equilibrium points E_1 and E_2 do not exist, and E_3 exists with the condition $\delta y_1 < d_4$. The equilibrium point E_3 is locally asymptotically stable under certain conditions. The numerical simulation results show agreement with the dynamic analysis results.

Keywords: prey-predator model, stage structure, Monod-Haldane, cannibalism, stability analysis

ABSTRAK

Artikel ini membahas model *predator-prey* untuk dua *predator* dan dua *prey* dengan fungsi respon Monod-Haldane dan kanibalisme yang menggambarkan interaksi antar populasi *prey* muda, *prey* dewasa, *predator* muda, dan *predator* dewasa. Dalam model ini diasumsikan hanya *predator* dewasa saja mampu menyerang untuk memakan *predator* muda, hanya *prey* dewasa yang mampu bereproduksi, ada efek Monod-Haldane yang menggambarkan fenomena pertahanan kelompok di mana predasi berkurang, atau bahkan dicegah sama sekali, karena kemampuan *prey* meningkat untuk pertahanan lebih lanjut atau kamuflase ketika jumlah *prey* cukup besar. Analisis dinamika dilakukan dengan mengidentifikasi titik kesetimbangan dan memeriksa keberadaannya. Analisis stabilitas pada titik kesetimbangan dalam model dilakukan dengan menjadikan linear model di sekitar titik kesetimbangan untuk menentukan matriks Jacobian. Dari matriks Jacobian ini, nilai eigen dihitung untuk mengevaluasi stabilitas sistem.. Hasil penelitian menunjukkan model ini memiliki tiga titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan trivial $E_1 = (0,0,0,0)$, titik kepunahan *prey* $E_2 = (0,0, y_1, y_2)$ dan titik interior $E_3 = (x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$. Titik kesetimbangan E_1 dan E_2 tidak eksis, dan E_3 eksis dengan syarat $\delta y_1 < d_4$. Titik kesetimbangan E_3 stabil asimtotik local dengan syarat tertentu. Hasil simulasi numerik menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis dinamik.

Kata kunci: model *predator-prey*, tingkatan usia, Monod-Haldane, kanibalisme, analisis kestabilan

Received: 30 Oktober 2023, Accepted: 30 November 2023, Published: 5 Desember 2023

PENDAHULUAN

Setiap makhluk hidup dan lingkungannya pada suatu ekosistem saling berinteraksi satu sama lain. Adanya interaksi tersebut akan menjaga keseimbangan, kestabilan, dan produktivitas suatu ekosistem. Salah satu bentuk interaksi dalam suatu ekosistem adalah predasi, yaitu interaksi antara *prey* dan *predator* (Hidayati, 2020). Tanpa *predator*, jumlah *prey* akan meningkat dan akan merusak rantai makanan di bawahnya. Sebaliknya tanpa *prey*, sumber makanan yang diperlukan untuk kelangsungan hidup predator akan hilang.

Interaksi antara *predator* dan *prey* dapat diwakili dalam bentuk model matematika. Pendekatan matematis yang terstruktur dapat membuka jalan untuk pemahaman yang lebih mendalam mengenai dinamika interaksi ini sehingga dapat membantu dalam menjaga keseimbangan, kestabilan, dan produktivitas suatu ekosistem agar tidak terjadi kepunahan makhluk hidup akibat terputusnya rantai makanan. Salah satu model matematika yang menggambarkan interaksi tersebut adalah model *predator-prey*.

Penelitian Liu dan Huang (2018) menyelidiki analisis dinamik sistem *predator-prey* dengan fungsi respon Holling tipe IV. Pada penelitian ini dipertimbangkan sistem *predator-prey* dengan pertahanan kelompok dan upaya pemanenan tetap pada kedua spesies, hasil penelitian menyatakan bahwa ketika tingkat pemanenan kecil, maka fungsi respon berperan utama dalam reproduksi dengan *predator* maksimal menangkap makanan. Ketika jumlah spesies *prey* sedikit. Penelitian (Amalia & Savitri, 2023) Mempelajari stabilitas analisis model *prey-predator* dengan struktur umur *predator* dan menggunakan fungsi respon Monod-Haldane. Salah satu faktor yang memengaruhi model ini adalah koefisien transformasi *predator*, yang tercermin dalam fungsi respons Monod-Haldane. Tingkat interaksi antara *predator* dewasa dan *prey*, yang mengakibatkan peningkatan *predator* muda, dicirikan oleh parameter ini. Simulasi telah dilakukan dengan menggunakan empat titik kesetimbangan yang diidentifikasi untuk mengevaluasi dampak variasi koefisien transformasi *predator* terhadap stabilitas titik tetap yang telah ditetapkan. Jika nilai koefisien transformasi *predator* rendah, kemungkinan besar populasi *predator* (baik yang dewasa maupun yang muda) akan mengalami kepunahan. Sebaliknya, peningkatan nilai koefisien transformasi *predator* akan menghasilkan peningkatan jumlah *predator* muda, sementara populasi *prey* bergerak menuju kepunahan. Dampak perubahan nilai koefisien transformasi *predator* juga tercermin pada perubahan stabilitas titik tetap, mengubahnya dari spiral stabil menjadi spiral tidak stabil.

Model *predator-prey* empat dimensi telah dikembangkan dalam penelitian (Mortoja *et al.*, 2018), Mengandung dua kelompok populasi, yaitu *predator* dan *prey*, yang masing-masing terbagi menjadi dua subpopulasi, yaitu kelompok muda dan kelompok dewasa. Model ini menggunakan perlakuan khusus (fungsi respon) Holling Tipe II, Holling Tipe IV, dan anti-*predator*. Dari tiga kasus yang diberikan untuk keempat populasi, dapat disimpulkan bahwa tidak ada populasi yang mengalami kepunahan. Kestabilan jumlah populasi pada keempat kelompok tersebut dapat diamati sebagai indikator utama. Namun, jika dibandingkan di antara keempat populasi tersebut, predator remaja memiliki kemungkinan paling besar mengalami kepunahan. Kasus yang paling baik adalah kasus yang memiliki selisih jumlah populasi tidak terlalu jauh saat kestabilan tercapai. Simulasi numerik pada penelitian Mortoza menunjukkan bahwa kepunahan pada keempat spesies bisa dicegah jika tingkat predasi terhadap *prey* remaja setara dengan tingkat predasi terhadap *prey* dewasa.

Dalam suatu ekosistem, analisis dinamika populasi *predator-prey* dilakukan dengan mempertimbangkan adanya kanibalisme pada *predator*. Keberadaan kanibalisme pada tingkat *predator* dapat menimbulkan kekhawatiran terhadap penurunan atau bahkan kepunahan populasi *predator*. Dampak ini dapat menyebabkan populasi *prey* menjadi tidak terkendali dan mengakibatkan ketidakseimbangan dalam ekosistem (Zhang *et al.*, 2019). Simulasi numerik menunjukkan dinamika model *predator-prey* dengan memasukkan faktor kanibalisme pada *predator* remaja dan menggunakan dua kondisi awal yang berbeda. Kesimpulan yang dapat diambil adalah bahwa hasil optimal tercapai ketika jumlah populasi *prey* lebih tinggi daripada jumlah populasi *predator*. Selain itu, diperhatikan juga bahwa dalam situasi tersebut, jumlah populasi *predator* remaja lebih tinggi dibandingkan dengan jumlah populasi *predator* dewasa (Zhang & Zhang, 2010).

Penelitian-penelitian di atas menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi yang dipengaruhi beberapa perlakuan khusus dapat diprediksi melalui model matematika *predator-prey*. Hal ini bisa dimanfaatkan untuk upaya menjaga keseimbangan ekosistem, manajemen konservasi, dan pengelolaan kawasan. Alasan ini lah yang mendorong peneliti untuk melakukan penelitian tentang Analisis Kestabilan Model *Predator-Prey* dengan Tingkatan Usia Pada Dua *Predator* dan Dua *Prey* dengan Perlakuan Monod-Haldane dan Kanibalisme.

TINJAUAN PUSTAKA

Suatu sistem persamaan diferensial orde satu berdimensi n dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

Dalam sistem ini, fungsi F_i merupakan fungsi kontinu yang tidak tergantung secara eksplisit pada variabel bebas t , tetapi hanya pada variabel x_i , untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Sistem ini diklasifikasikan sebagai sistem autonomous. Berikutnya, sistem autonomous dapat dikelompokkan menjadi dua tipe, yaitu linear dan nonlinear. Suatu sistem autonomous dianggap linear apabila setiap fungsi F_i memiliki sifat linear, sementara dianggap nonlinear jika minimal satu fungsi F_i bersifat nonlinear (Boyce & DiPrima, 2013).

Definisi 1. (Boyce & DiPrima, 2013)

Titik kesetimbangan dalam sistem autonomous dianggap sebagai $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ apabila kondisi $F_i(\vec{x}^*) = 0$ terpenuhi untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Pada saat nilai $\frac{dx_i}{dt} = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, solusi sistem autonomous (1) dianggap setimbang pada nilai konstan tanpa mengalami perubahan sejalan dengan perkembangan waktu t .

Perhatikan sistem *autonomous* linear

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Sistem persamaan (2) dapat diwujudkan dalam bentuk:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \tag{3}$$

dengan $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ dan A adalah matriks koefisien dari sistem persamaan (2), yang dapat dinyatakan sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ dengan } |A| \neq 0.$$

Jenis kestabilan pada titik kesetimbangan dalam sistem autonomous linear ditentukan oleh nilai-nilai eigen atau akar persamaan karakteristik matriks A . Formulanya dijelaskan sebagai berikut: (Anton & Rorres, 2010)

$$\det(\lambda I - A) = 0,$$

Teorema 1. (Mattheij & Molenaar, 2002)

Titik kesetimbangan pada sistem (1) dengan nilai $(0,0,\dots,0)$ dapat digambarkan sebagai berikut:

- (i) Stabil asimtotik jika untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$, bagian real dari setiap nilai eigen λ_i bernilai negatif
- (ii) Stabil jika untuk setiap $i = 1,2, \dots, m$ bagian real dari nilai eigen λ_i bernilai negatif dan untuk setiap $i = m + 1, \dots, n$, dengan $m < n$, bagian real dari nilai eigen λ_i juga bernilai negatif
- (iii) Tidak stabil jika (i) dan (ii) tidak ada yang memenuhi.

Sistem Autonomous Nonlinear

Perhatikanlah sistem nonlinier yang otonom dengan n persamaan berikut:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Deret Taylor fungsi F_i di sekitar \vec{x}^* adalah (5), apabila F_i merupakan fungsi nonlinier yang memiliki turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

$$F_i(\vec{x}) = F_i(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(\vec{x}^*)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*) + v_i(\vec{x}), \tag{5}$$

dengan $v_i(\vec{x})$ sebagai suku sisa, untuk $i = 1,2, \dots, n$. Suku sisa pada pendekatan orde satu memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{v_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0,$$

untuk $i = 1,2, \dots, n$ dan $\vec{w} = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \dots, x_n - x_n^*)^T$.

Mengacu pada persamaan (5) dan mempertimbangkan bahwa $\frac{dx_i}{dt} = \frac{d(x_i - x_i^*)}{dt}$, serta $F_i(\vec{x}^*) = 0$, untuk $i = 1,2, \dots, n$, dengan demikian, sistem (4) dapat dirumuskan sebagai:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ v_n(\vec{x}) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Secara ringkas persamaan (6) dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{v}, \tag{7}$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ disebut matriks Jacobi.}$$

Apabila \vec{x} berada dalam sekitar \vec{x}^* , maka \vec{v} akan memiliki nilai yang sangat kecil, sehingga norma dari $\|\vec{v}\|$ tidak melebihi $\|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, \vec{v} dapat dianggap sebagai besaran kecil, dan sistem nonlinear (4) dapat diaproksimasi dengan menggunakan sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \tag{8}$$

Ketika $\vec{x} = \vec{x}^*$ maka $(w_1^*, \dots, w_n^*) = (0, \dots, 0)$, sehingga titik kesetimbangan sistem (8) tercapai dengan $(w_1^*, \dots, w_n^*) = (0, \dots, 0)$. Proses pendekatan persamaan (4) dengan sistem (8) disebut sebagai proses linearisasi (Boyce & DiPrima, 2013).

Teorema 2.

dalam sistem autonomous nonlinear memiliki sifat-sifat berikut:

1. Stabil asimtotik, apabila titik kesetimbangan hasil linearisasi sistem (8) stabil asimtotik.
2. Tidak stabil, apabila titik kesetimbangan hasil linearisasi sistem (8) tidak stabil.

Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz (Murray, 2002)

Apabila sebuah sistem linear memiliki karakteristik yang terdefinisi sebagai

$$\lambda^n + \varphi_1\lambda^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1}\lambda + \varphi_n = 0, \tag{9}$$

dengan $\varphi_n \neq 0$, dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz, stabilitas titik kesetimbangan dapat diidentifikasi, sesuai dengan penjelasan dalam teorema:

Pandang matriks berorde $k \times k$, D_k sebagai berikut

$$D_1 = [\varphi_1], D_2 = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ 1 & \varphi_2 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_4 \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_3 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$D_k = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 & \dots & \dots & \varphi_{2n-1} \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_4 & \dots & \dots & \varphi_{2n-2} \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_3 & \dots & \dots & \varphi_{2n-3} \\ 0 & 1 & \varphi_2 & \dots & \dots & \varphi_{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \varphi_n \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

dengan φ_j adalah nol untuk $0, j > n$ dan φ_j adalah koefisien dari polinom dalam persamaan (9), maka matriks D_k selanjutnya disebut sebagai matriks Routh-Hurwitz. Kondisi di mana $|D_k| > 0$ untuk setiap k menunjukkan bahwa titik kesetimbangan sistem tersebut bersifat stabil.

Fungsi Respon (Amalia & Savitri, 2023)

Fungsi respons predator merupakan ukuran seberapa banyak predator memakan prey (Holling, 1959). Fungsi respons ini memiliki hubungan yang kuat dengan

pertumbuhan populasi *predator* dan penurunan populasi *prey* ketika keduanya berinteraksi.

Persamaan fungsi respon tipe I adalah

$$p(x) = mx$$

Persamaan fungsi respon tipe II adalah

$$p(x) = \frac{mx}{a+x}$$

Persamaan fungsi respon tipe III adalah

$$p(x) = \frac{mx^2}{a^2+x^2}$$

Persamaan fungsi respon tipe IV adalah

$$p(x) = \frac{mx}{ax^2+bx+c}$$

Dalam penelitian mereka, Sokol dan Howell menyederhanakan bentuk fungsi Monod-Haldane dengan hanya menggunakan dua parameter, yaitu

$$p(x) = \frac{mx}{a+x^2}$$

METODE PENELITIAN

Penelitian ini diawali dengan memodifikasi model *predator prey* pada penelitian (Mortoja *et al.*, 2018) dengan mengadopsi fungsi respon Monod-Haldane dan pada penelitian (Zhang *et al.*, 2019) mengadopsi Kanibalisme. Titik kesetimbangan ditentukan berdasarkan definisi 1. Selanjutnya, analisis kestabilan pada titik kesetimbangan model dilaksanakan dengan mengubah bentuk model menjadi linier di sekitar titik kesetimbangan guna mendapatkan matriks Jacobian. Lalu nilai eigen matriks Jacobian tersebut dihitung untuk menentukan kestabilan berdasarkan Teorema 1. Simulasi numerik juga dilakukan memanfaatkan metode Runge-Kutta Orde Empat untuk mendapatkan grafik hasil simulasi model. Terakhir hasil yang diperoleh diinterpretasikan untuk mendapatkan kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model yang akan dijelaskan dalam artikel ini merupakan model *predator-prey* yang mempertimbangkan fungsi respon Monod-Haldane dan Kanibalisme. Pada waktu t , banyak populasi terdiri dari empat kelompok, yaitu *prey* muda x_1 , *prey* dewasa x_2 , *predator* muda y_1 , dan *predator* dewasa y_2 . Beberapa asumsi yang diterapkan pada model *predator-prey* ini mencakup: 1) Hanya terdapat satu jenis *prey* dan satu jenis *predator* dalam populasi. 2) Hanya *prey* dewasa yang mampu bereproduksi. 3) Tanpa adanya *predator*, tingkat kelahiran *prey* remaja berbanding lurus dengan populasi *prey* dewasa yang ada. 4) Kemampuan predasi hanya dimiliki oleh *predator* dewasa dan tidak oleh *predator* remaja. Di sini, pertumbuhan populasi *predator* remaja diasumsikan tergantung pada tingkat konsumsi *prey*

remaja dan dewasa oleh *predator* dewasa mereka. Populasi *predator* diasumsikan bertambah melalui interaksi antara *prey* dan *predator* yang tidak monoton, dan berkurang karena tingkat mortalitas alami. 5) Fungsi respon menggambarkan fenomena pertahanan kelompok, di mana predasi dapat berkurang atau bahkan dicegah sama sekali karena peningkatan kemampuan *prey* untuk bertahan atau menyamar lebih baik ketika jumlahnya mencukupi. Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, diperoleh model persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= rx_2 - d_1x_1 - b_1x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= b_1x_1 - d_2x_2 - \frac{\alpha x_2 y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\alpha \xi x_2 y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} - d_3 y_1 - b_2 y_1 - \beta y_1 y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= b_2 y_1 + \delta y_1 y_2 - d_4 y_2 \end{aligned} \tag{10}$$

Tabel 1. Parameter yang Digunakan

Simbol	Keterangan	Syarat
x_1	Banyaknya populasi <i>prey</i> muda	$x_1 \geq 0$
x_2	Banyaknya populasi <i>prey</i> dewasa	$x_2 \geq 0$
y_1	Banyaknya populasi <i>predator</i> muda	$y_1 \geq 0$
y_2	Banyaknya populasi <i>predator</i> dewasa	$y_2 \geq 0$
r	Tingkat pertumbuhan intrinsik <i>prey</i>	$r \geq 0$
b_1	Tingkat transformasi dari populasi <i>prey</i> muda menjadi <i>prey</i> dewasa	$b_1 \geq 0$
b_2	Tingkat transformasi dari populasi <i>prey</i> muda menjadi <i>prey</i> dewasa	$b_2 \geq 0$
α	Tingkat penangkapan <i>predator</i>	$\alpha \geq 0$
ξ	Tingkat konversi <i>prey</i> menjadi <i>predator</i>	$\xi \geq 0$
β	Koefesien kanibalisme oleh <i>predator</i> dewasa	$\beta \geq 0$
δ	Koefesien penangkapan <i>predator</i> dewasa dengan <i>prey predator</i> muda	$\delta \geq 0$
d_1	Tingkat mortalitas alami <i>prey</i> muda	$d_1 \geq 0$
d_2	Tingkat mortalitas alami <i>prey</i> dewasa	$d_2 \geq 0$
d_3	Tingkat mortalitas alami <i>predator</i> muda	$d_3 \geq 0$
d_4	Tingkat mortalitas alami <i>predator</i> dewasa	$d_4 \geq 0$
k_1	Koefesien interaksi antara <i>prey</i> dan <i>predator</i> berpengaruh	$k_1 \geq 0$
k_2	Koefesien kebalikan dari proses penghambatan	$k_2 \geq 0$

Penentuan Titik Keseimbangan

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = 0$$

Berdasarkan sistem persamaan (10) diperoleh 3 titik keseimbangan, yaitu

- (i) Titik keseimbangan $E_1(0,0,0,0)$;

- (ii) Titik kesetimbangan bebas prey $E_2(0,0, y_1, y_2)$, dimana $y_1 = -\frac{d_3 d_4 - b_2 d_4}{b_2 \beta - b_2 \delta - d_3 \delta}$,
 $y_2 = -\frac{b_2 + d_3}{\beta}$, $y_2 < 0$ karena $b_2, d_3, \beta > 0$ sehingga E_2 tidak eksis.
- (iii) Titik kesetimbangan interior $E_3(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$, dimana $x_1^* = \frac{d_2 x_2^*}{b_1} + \frac{\alpha x_2 y_2}{b_1(k_1 + k_2 x_2^2)}$,
 $x_2^* = \left(\frac{d_1 + b_1}{r}\right) x_1^*$, $y_1^* = \frac{1}{d_3 + b_2 + \beta y_2^*} \left(\frac{\alpha \xi x_2^* y_2^*}{k_1 + k_2 x_2^2}\right)$,
 $y_2^* = \frac{-b_2 y_1}{\delta y_1 - d_4}$, syarat eksis $\delta y_1 < d_4$

Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Lemma 1. Sistem persamaan (10) tidak stabil di sekitar titik kesetimbangan trivial E_1 jika $d_2 (d_1 + b_1) < r b_1$.

Bukti. Matriks Jacobi di titik kesetimbangan E_1 adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -(b_1 + d_1) & r & 0 & 0 \\ b_1 & -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(b_2 + d_3) & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & -d_4 \end{bmatrix},$$

dengan persamaan karakteristik

$$\{(b_2 + d_3) + \lambda\} \{d_4 + \lambda\} \{\lambda^2 + (b_1 + d_1 + d_2)\lambda + d_2(d_1 + b_1) - r b_1\} \quad (11)$$

berdasarkan persamaan (11), terdapat dua nilai eigen yang bernilai negatif yaitu $\lambda_1 = -(b_2 + d_3)$ dan $\lambda_2 = -d_4$ dan $\lambda_{3,4}$ yang memenuhi persamaan kuadrat

$$\{\lambda^2 + \omega_1 \lambda + \omega_2\} = 0$$

dengan

$\omega_1 = (b_1 + d_1 + d_2) > 0$ dan $\omega_2 = d_2(d_1 + b_1) - r b_1$. Nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda_{3,4} = \frac{-(\omega_1) \pm \sqrt{(\omega_1)^2 - 4(\omega_2)}}{2} \quad (12)$$

Titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik lokal jika $Re(\lambda_{3,4}) < 0$. Nilai $\lambda_{3,4}$ memiliki beberapa kemungkinan

1. Jika $(\omega_1)^2 - 4(\omega_2) < 0$, maka $\lambda_{3,4} \in \mathbb{C}$ dengan $Re(\lambda_{3,4}) < 0$.
2. Jika $(\omega_1)^2 - 4(\omega_2) = 0$, maka $\lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{(\omega_1)}{2} < 0$.
3. Jika $(\omega_1)^2 - 4(\omega_2) > 0$, maka $\lambda_{3,4} \in \mathbb{R}$. $\lambda_{3,4} < 0$ jika $d_2(d_1 + b_1) > r b_1$ atau $R = \frac{d_2(d_1 + b_1)}{r b_1} > 1$.

Agar $\lambda_{3,4} \in \mathbb{R}$ bernilai negatif pada Persamaan (12), maka haruslah $d_2(d_1 + b_1) - r b_1 > 0$. Dengan demikian, kondisi yang diperlukan agar titik kesetimbangan E_1 menjadi stabil secara asimtotik adalah $R_1 = \frac{d_2(d_1 + b_1)}{r b_1} > 1$. Tingkat mortalitas alami prey dewasa (d_2) dan jumlah tingkat mortalitas alami prey muda (d_1) dan tingkat perubahan prey muda menjadi prey dewasa (b_1) harus cukup tinggi dibandingkan dengan tingkat intrinsik prey dewasa (r) dan tingkat transformasi dari populasi prey muda menjadi prey dewasa (b_1). Namun, hal ini menunjukkan akibat

dari tingkat transformasi dari populasi prey muda menjadi prey dewasa (b_1) yang mempengaruhi tingkat intrinsik prey dewasa (r) dan tingkat mortalitas alami prey dewasa (d_2) menyebabkan kematian di populasi tersebut dominan dibandingkan dengan faktor-faktor yang mendukung pertumbuhan.

Lemma 2. Titik Kesetimbangan $E_3(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ stabil asimtotik jika

$$\delta y_1 < d_4, d_2 + \frac{\alpha y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} > \frac{2 \alpha x_2^2 y_2 k_2}{(k_1 + k_2 x_2^2)^2}, \frac{\alpha \xi y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} > \frac{2 \xi \alpha x_2^2 y_2 k_2}{(k_1 + k_2 x_2^2)^2}, \frac{\alpha \xi x_2}{k_1 + k_2 x_2^2} > \beta y_1,$$

$$Q_5 Q_8 > Q_6 Q_7, \quad Q_1 Q_2 (Q_5 + Q_8) + Q_1 (Q_5 Q_8 + Q_6 Q_7) + Q_2 (Q_5 Q_8 - Q_6 Q_7) + Q_3 Q_4 Q_7 > r b_1 (Q_5 + Q_8), \text{ dan } Q_1 Q_2 (Q_5 Q_8 - Q_6 Q_7) + Q_1 Q_3 Q_4 Q_7 > r b_1 (Q_5 Q_8 + Q_6 Q_7)$$

Bukti. Matriks Jacobi pada sistem persamaan (10) di sekitar titik kesetimbangan interior $E_3(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$ yaitu

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} -Q_1 & r & 0 & 0 \\ b_1 & -Q_2 & 0 & -Q_3 \\ 0 & Q_4 & -Q_5 & Q_6 \\ 0 & 0 & Q_7 & -Q_8 \end{bmatrix},$$

Persamaan karakteristik untuk matriks Jacobi $J(E_3)$ adalah

$$\lambda^4 + A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0, \tag{13}$$

dengan

$$A = Q_1 + Q_2 + Q_5 + Q_8$$

$$B = Q_1(Q_2 + Q_5 + Q_8) + Q_2(Q_5 + Q_8) + Q_5 Q_8 + Q_6 Q_2 - r b_1$$

$$C = Q_1 Q_2 (Q_5 + Q_8) + Q_1 (Q_5 Q_8 + Q_6 Q_7) + Q_2 (Q_5 Q_8 - Q_6 Q_7) + Q_3 Q_4 Q_7 - r b_1 Q_5 - r b_1 Q_8$$

$$D = Q_1 Q_2 Q_5 Q_8 - Q_1 Q_2 Q_6 Q_7 + Q_1 Q_3 Q_4 Q_7 - r b_1 Q_5 Q_8 - r b_1 Q_6 Q_7$$

Berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz (Murray, 2002), bagian real akar persamaan (13) menjadi negatif jika dan hanya jika:

$$1. |H_1| = |A| = A > 0,$$

$$2. |H_2| = \begin{vmatrix} A & C \\ 1 & B \end{vmatrix} = AB - C > 0,$$

$$3. |H_3| = \begin{vmatrix} A & C & 0 \\ 1 & B & D \\ 0 & A & C \end{vmatrix} = ABC - A^2 D - C^2 > 0$$

$$3. |H_4| = \begin{vmatrix} A & C & 0 & 0 \\ 1 & B & D & 0 \\ 0 & A & C & 0 \\ 0 & 1 & B & D \end{vmatrix} = D(ABC - A^2 D - C^2) > 0, D > 0$$

dengan

$$Q_1 = b_1 + d_1$$

$$Q_2 = d_2 + \frac{\alpha y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} - \frac{2 \alpha x_2^2 y_2 k_2}{(k_1 + k_2 x_2^2)^2}$$

$$Q_3 = \frac{\alpha x_2}{k_1 + k_2 x_2^2}$$

$$Q_4 = \frac{\alpha \xi y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} - \frac{2 \xi \alpha x_2^2 y_2 k_2}{(k_1 + k_2 x_2^2)^2}$$

$$Q_5 = \beta y_2 + b_2 + d_3$$

$$Q_6 = \frac{\alpha \xi x_2}{k_1 + k_2 x_2^2} - \beta y_1$$

$$Q_7 = \delta y_2 + b_2$$

$$Q_8 = d_4 - \delta y_1$$

Jika memenuhi kondisi $\delta y_1 < d_4, d_2 + \frac{\alpha y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} > \frac{2 \alpha x_2^2 y_2 k_2}{(k_1 + k_2 x_2^2)^2}, \frac{\alpha \xi y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} >$

$\frac{2 \xi \alpha x_2^2 y_2 k_2}{(k_1 + k_2 x_2^2)^2}, \frac{\alpha \xi x_2}{k_1 + k_2 x_2^2} > \beta y_1, Q_5 Q_8 > Q_6 Q_7, Q_1 Q_2 (Q_5 + Q_8) + Q_1 (Q_5 Q_8 +$

$Q_6 Q_7) + Q_2 (Q_5 Q_8 - Q_6 Q_7) + Q_3 Q_4 Q_7 > r b_1 (Q_5 + Q_8),$ dan $Q_1 Q_2 (Q_5 Q_8 - Q_6 Q_7) + Q_1 Q_3 Q_4 Q_7 > r b_1 (Q_5 Q_8 + Q_6 Q_7)$ maka $A, C,$ dan D bernilai positif dan $ABC > C^2 + A^2 D.$ Kestabilan pada titik kesetimbangan ini, berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz (Murray, 2002), dapat dianggap sebagai stabil asimtotik.

Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk titik kesetimbangan yang eksis, titik kesetimbangan E_1 tidak eksis karena merupakan titik kesetimbangan trivial dan titik kesetimbangan E_2 tidak eksis karena memiliki y_2 yang selalu negatif. Dalam simulasi ini, nilai parameter yang digunakan sesuai dengan yang tertera pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai Parameter

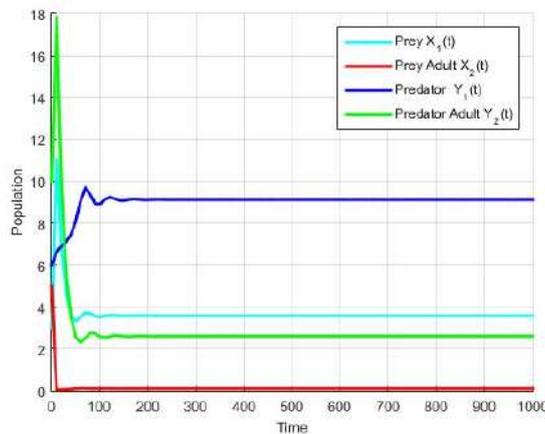
Parameter	Nilai Parameter
r	2.1
b_1	0.06
b_2	0.005
α	0.08
ξ	0.8
β	0.05
δ	0.02
d_1	0.001
d_2	0.005
d_3	0.1
d_4	0.2
k_1	0.1
k_2	0.1

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 2 terdapat satu titik kesetimbangan E_3 yang eksis dan memenuhi kriteria Routh Hurwitz (Murray, 2002) dengan kondisi:

- i. $\delta y_1 = 0.18248 < d_4 = 0.2,$
- ii. $d_2 + \frac{\alpha y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} = 2.065 > \frac{2 \alpha x_2^2 y_2 k_2}{(k_1 + k_2 x_2^2)^2} = 0.1782066,$
- iii. $\frac{\alpha \xi y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} = 10.3023467 > \frac{2 \xi \alpha x_2^2 y_2 k_2}{(k_1 + k_2 x_2^2)^2} = 0.891033,$

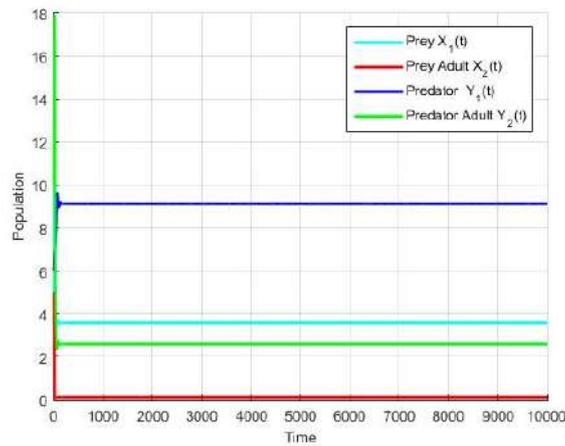
- iv. $\frac{\alpha \xi x_2}{k_1 + k_2 x_2^2} = 0.813625 > \beta y_1 = 0.4575,$
- v. $Q_5 Q_8 = 0.23960 > Q_6 Q_7 = 0.0209544,$
- vi. $(Q_1 Q_2 (Q_5 + Q_8) + Q_1 (Q_5 Q_8 + Q_6 Q_7) + Q_2 (Q_5 Q_8 - Q_6 Q_7) + Q_3 Q_4 Q_7) = 0.09344076377 > r b_1 (Q_5 + Q_8) = 0.03233160,$
- vii. $Q_1 Q_2 (Q_5 Q_8 - Q_6 Q_7) + Q_1 Q_3 Q_4 Q_7 = 0.003705379694 > r b_1 (Q_5 Q_8 + Q_6 Q_7) = 0.00315796$

sehingga $A = 2.335524653 > 0, C = 0.06159804377 > 0, D = 0.000547415690 > 0,$ dan $ABC = 0.1826511441 > C^2 + A^2 D = 0.006780293897$ maka titik kesetimbangan $E_3(3.585; 0.104; 9.124; 2.604),$ dengan Nilai awal $N(3; 5; 6; 10)$ ini stabil asimtotik. Gambar 1 menampilkan hasil simulasi dalam bentuk solusi dari sistem (7).



Gambar 1. Simulasi Titik $E_3(x^*, y^*)$ dengan $t = 1000$

Dari Gambar 1, dapat disimpulkan bahwa hasil simulasi menunjukkan tingkat pertumbuhan predator dewasa yang lebih rendah dibandingkan dengan pertumbuhan predator muda. Hal ini disebabkan oleh tingkat mortalitas alami yang lebih tinggi pada predator dewasa dibandingkan dengan predator muda. Selain itu, pengaruh kanibalisme oleh predator dewasa terhadap predator muda tidak terlalu signifikan dalam mengurangi jumlah populasi. Adanya fungsi respon Monod-Haldane mengurangi tingkat predasi pada *prey* dewasa sehingga tidak mengalami kepunahan oleh *predatoran predator* muda.



Gambar 2. Simulasi Titik $E_3(x^*, y^*)$ dengan $t = 10.000$

Pada Gambar 2 terlihat bahwa ketika waktu diperpanjang tingkat pertumbuhan populasi konstan menuju ke titik kesetimbangan.

KESIMPULAN

Telah dibuat suatu model matematika untuk menggambarkan dinamika hubungan *predator* dan *prey* dengan memasukkan unsur tingkatan usia, yang mencakup empat jenis populasi: *prey* muda, *prey* dewasa, *predator* muda, dan *predator* dewasa yang diformulasikan sebagai sistem persamaan diferensial non-linier. Model ini memiliki tiga titik kesetimbangan, termasuk titik kesetimbangan trivial $E_1 = (0,0,0,0)$, titik kepunahan *prey* $E_2 = (0,0, y_1, y_2)$ dan titik interior $E_3 = (x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$. Titik kesetimbangan E_1 dan E_2 tidak eksis, dan E_3 eksis dengan syarat $\delta y_1 < d_4$. Titik kesetimbangan E_3 stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika

- i. $\delta y_1 < d_4$,
 - ii. $d_2 + \frac{\alpha y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} > \frac{2 \alpha x_2^2 y_2 k_2}{(k_1 + k_2 x_2^2)^2}$,
 - iii. $\frac{\alpha \xi y_2}{k_1 + k_2 x_2^2} > \frac{2 \xi \alpha x_2^2 y_2 k_2}{(k_1 + k_2 x_2^2)^2}$,
 - iv. $\frac{\alpha \xi x_2}{k_1 + k_2 x_2^2} > \beta y_1$,
 - v. $Q_5 Q_8 > Q_6 Q_7$,
 - vi. $(Q_1 Q_2 (Q_5 + Q_8) + Q_1 (Q_5 Q_8 + Q_6 Q_7) + Q_2 (Q_5 Q_8 - Q_6 Q_7) + Q_3 Q_4 Q_7) > r b_1 (Q_5 + Q_8)$,
- $Q_1 Q_2 (Q_5 Q_8 - Q_6 Q_7) + Q_1 Q_3 Q_4 Q_7 > r b_1 (Q_5 Q_8 + Q_6 Q_7)$ sehingga kriteria Routh Hurwitz terpenuhi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Fakultas MIPA Universitas Palangka Raya yang telah memberi dukungan dana pada penelitian ini yang berdasar pada Surat Perjanjian Penerima Dana Hibah Penelitian Dana PNPB Universitas Palangka Raya melalui Anggaran Fakultas MIPA Nomor: 614/UN24.10/PL/2023.

REFERENSI

- Amalia, D., & Savitri, D. (2023). Analisis Dinamik Model *Predator-Prey* Dengan Fungsi Respon Monod-Haldane. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*. Vol. 11(2), 287–294. <https://doi.org/10.26740/mathunesa.v11n2.p287-294>
- Anton, H., & Rorres, C. (2010). *Elementary Linear Algebra: With Supplemental Applications*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118369575>
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2013). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems: International Student Version (10th edition)*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:115454180>
- Finizio, N., & Ladas, G. E. (1982). *Ordinary differential equations with modern applications* (2nd ed.). Wadsworth Pub.
- Hidayati, S. N. (2020). *Analisis Dinamik Model Matematika Predator-Prey Akibat Rasa Takut dan Pertahanan Kelompok* [Thesis]. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
- Holling, C. S. (1959). Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism. *The Canadian Entomologist*. Vol. 91(7), 385–398. <https://doi.org/10.4039/Ent91385-7>
- Liu, X., & Huang, Q. (2018). The dynamics of a harvested *predator-prey* system with Holling type IV functional response. *Biosystems*. Vol. 169–170, 26–39. <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2018.05.005>
- Mattheij, R., & Molenaar, J. (2002). *Ordinary Differential Equations in Theory and Practice*. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719178>
- Mortoja, S. G., Panja, P., & Mondal, S. K. (2018). Dynamics of a *predator-prey* model with stage-structure on both species and anti-*predator* behavior. *Informatics in Medicine Unlocked*. Vol. 10, 50–57. <https://doi.org/10.1016/J.IMU.2017.12.004>
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology* (Vol. 17). Springer New York. <https://doi.org/10.1007/b98868>
- Zhang, F., Chen, Y., & Li, J. (2019). Dynamical analysis of a stage-structured *predator-prey* model with cannibalism. *Mathematical Biosciences*. Vol. 307, 33–41. <https://doi.org/10.1016/J.MBS.2018.11.004>
- Zhang, L., & Zhang, C. (2010). Rich dynamic of a stage-structured *prey-predator* model with cannibalism and periodic attacking rate. *Communications in*

Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol. 15(12), 4029–4040.
<https://doi.org/10.1016/J.CNSNS.2010.02.009>