Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.8 No.2 (2014) Hal. 15-25

PEMBENTUKAN FUNGSI PELUANG *BIRTH-DEATH PROCESS* MELALUI SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER HOMOGEN

Etza Budiarti, H. Karim, Dewi Sri Susanti
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Unlam
Jl. A. Yani Km 36 Kampus Unlam Banjarbaru, Kalsel

ABSTRAK

Proses Stokastik $\{X(t), t \in T\}$ didefinisikan sebagai koleksi variabel acak yang menggambarkan perkembangan suatu proses dimana himpunan $X(t)$ adalah ruang status dengan $t \in T$ adalah parameter waktu. *Birth-Death process* merupakan suatu rantai Markov waktu kontinu, yaitu proses Stokastik yang mempunyai status diskrit dan waktu kontinu dengan sifat status pada masa akan datang proses tidak tergantung pada waktu yang telah lalu, tetapi hanya bergantung pada waktu sekarang. Transisi dari status *i* (*i* = jumlah individu) hanya terjadi dari status *i* ke status *i*+1 yang menggambarkan bertambahnya 1 individu ke dalam suatu populasi pada waktu *t* (*Birth Process*) dan dari status *i* ke status *i*-1 yang menggambarkan berkurangnya 1 individu dari suatu populasi pada waktu *t* (*Death Process*). Diasumsikan individu yang masuk ataupun keluar mengikuti proses Poisson dan waktu antar kejadian berdistribusi Eksponensial dengan *rate Birth Process* $\lambda_i > 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ dan *rate Death Process* $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Jika proses terjadi dalam interval waktu $(t, t+\Delta t)$ yang sangat kecil, maka peluang sistem berada dalam status *i* pada waktu $(t + \Delta t)$ akan membentuk persamaan diferensial. Fungsi peluang *Birth-Death Process* diperoleh dari penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linier Homogen yang dibentuk dari peluang transisi setiap status dalam interval waktu $(t, t+\Delta t)$ dengan asumsi setiap kejadian berdistribusi Poisson dan waktu antar kejadian berdistribusi Eksponensial. Setelah dilakukan proses penyelesaian sistem Persamaan Diferensial Linier Homogen yang terbentuk dari peluang-peluang transisi, maka diperoleh fungsi peluang *Birth-Death Process* dengan *rate Birth Process* dan *rate Death Process* konstan untuk setiap proses Poisson dengan ruang status berhingga *n*, yaitu $P_i(t) = L_{i-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A(m,2i) \frac{t^{m+i}}{(m+i)!}$ dimana $A(m,i) = \sum_{j_1=0}^{i} a_{j_1} \sum_{j_2=0}^{j_1+1} a_{j_2} \sum_{j_3=0}^{j_2+1} a_{j_3} \cdots \sum_{j_m=0}^{j_{m-1}+1} a_{j_m}$ dengan $L_{i-1} = a_0 a_2 a_4 \ldots a_{2i-2}$, $L_{-1} = 1$, $A(0,i) = 1$, $a_{2i} = \lambda$ dan $a_{2i-1} = \mu$ untuk setiap konstanta $\lambda > 0$ dan $\mu > 0$, dan $a_i = 0$ jika $i \geq 2n$ untuk setiap $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Kata Kunci : *Proses Stokastik, Rantai Markov Waktu Kontinu, Peluang-peluang Transisi, Fungsi Peluang Birth-Death Process*

ABSTRACT

Stochastic process {X(t), $t \in T$ *} defined as a random variable collection which describes the changes of a process where a set X(t) is called state space with* $t \in T$ *is called time parameter. Birth-Death process is a continuous time Markov chain, which is a Stochastic process that has discrete state and continuous time with characteristic the future state is independent of the past state, but only dependent of the present state. Transition of state i (i = number of individual) only occurs from state i to state i+1 that describes one individual comes into the population at time t (Birth Process) and from state i to state i-1 that describes one individual leaves from the population at time t (Death Process). Suppose every individual that comes or leaves according to Poisson Process and waiting time has Exponential distribution with rate Birth Process* $\lambda_i > 0$ *(*$i = 0, 1, 2, \ldots$*) and rate Death Process* $\mu_i > 0$ *(*$i = 1, 2, 3, \ldots$*). If the process occurs in very small time interval* $(t, t+\Delta t)$*, then the probability of system exist in state i at time* $(t+\Delta t)$ *will form a differential equation. The probability function of Birth-Death Process is obtained from Homogeneous Linear Differential Equation System solution which is formed from every state transition probability in time interval* $(t, t+\Delta t)$ *with assumption that every event has Poisson distribution and waiting time has Exponential distribution. After Homogeneous Linear Differential Equation System solution process which is formed from transition probabilities has been done, it is obtained the probability function of Birth-Death Process with constant rate Birth Process and rate Death Process for every Poisson process with n finite state space, that is*

$$P_i(t) = L_{i-1}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m A(m,2i)\frac{t^{m+i}}{(m+i)!}$$

where $A(m,i) = \sum_{j_1=0}^{i} a_{j_1} \sum_{j_2=0}^{j_1+1} a_{j_2} \sum_{j_3=0}^{j_2+1} a_{j_3} \ldots \sum_{j_m=0}^{j_{m-1}+1} a_{j_m}$ *with* $L_{i-1} = a_0 a_2 a_4 \ldots a_{2i-2}$ *,* $L_{-1} = 1$*,* $A(0,i) = 1$*,* $a_{2i} = \lambda$ *and* $a_{2i-1} = \mu$ *for every constant* $\lambda > 0$ *and* $\mu > 0$*, and* $a_i = 0$ *if* $i \geq 2n$ *for every* $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Keywords *: Stochastic Process, Continuous Time Markov Chain, Transition Probabilities, Probability Function of Birth-Death Process*

1. PENDAHULUAN

Model matematika yang mendasarkan pada teknik peluang dan memperhitungkan ketidakpastian disebut model probabilistik atau model stokastik. Proses stokastik merupakan penerapan dari model stokastik. Proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ adalah koleksi variabel acak yang menggambarkan perkembangan suatu proses dimana himpunan $X(t)$ adalah ruang status (*state space*) dengan $t \in T$ adalah indeks atau parameter waktu [4]. *Birth-Death Process* merupakan suatu rantai Markov waktu kontinu, yaitu proses Stokastik yang mempunyai status diskrit dan waktu kontinu dengan sifat status pada masa akan datang proses tidak tergantung pada waktu yang telah lalu, tetapi hanya bergantung pada waktu sekarang. Transisi dari status i hanya terjadi ke status $i+1$ (*Birth Process*) atau ke status i-1 (*Death Process*). Dalam penelitian ini, diasumsikan banyaknya individu yang masuk ataupun keluar berdistribusi Poisson dan waktunya berdistribusi Eksponensial dengan *rate Birth Process* $\lambda_i > 0$ ($i = 0$, 1, 2, …) dan *rate Death Process* $\mu_i > 0$ (i = 1, 2, 3, …). Apabila proses terjadi dalam interval waktu yang sangat kecil $(t, t+\Delta t)$, maka peluang *Birth-Death Process* berada dalam status *i* pada waktu t dapat dimodelkan ke dalam Sistem Persamaan Diferensial Linier Homogen.

2. METODE PENELITIAN

Materi penelitian yang digunakan dalam penelitian ini bersumber dari literatur, baik dari buku teks maupun dari paper yang terkait.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Salah salah satu asumsi yang digunakan dalam proses stokastik adalah variabel acak yang berdistribusi Eksponensial. Suatu ciri khusus dari Distribusi Eksponensial adalah *memoryless property* atau sifat pelupa [1]. Sifat ini menyatakan bahwa jika *T* merupakan usia pakai komponen tertentu, maka peluang komponen tersebut akan berfungsi baik dalam jangka waktu lebih dari (*s*+*t*) jika umurnya telah mencapai *t* adalah sama dengan peluang komponen itu berfungsi baik dalam jangka waktu lebih dari *s*. Jadi tidak tergantung pada kondisi awal *t*.

3.1 Peluang transisi *Birth-Death Process*

Apabila proses terjadi dalam interval waktu yang sangat kecil $(t, t+\Delta t)$, maka dapat dinyatakan peluang-peluang transisi yang mungkin terjadi dalam interval waktu $(t, t+\Delta t)$ saat terdapat *i* individu sebagai berikut :

1. Peluang transisi *Birth Process* dengan *rate* $\lambda_i > 0$ untuk setiap i = 0, 1, 2, …

$$P(\text{muncul 1 individu}) = P(X(t+\Delta t) = i+1 \mid X(t) = i) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(\text{tidak ada individu muncul}) = P(X(t+\Delta t) = i \mid X(t) = i) = 1 - \lambda_i \Delta t + g(\Delta t)$$

$$P(\text{muncul lebih dari 1 individu}) = P(X(t+\Delta t) > i+1 \mid X(t) = i) = o(\Delta t)$$

2. Peluang transisi *Death Process* dengan *rate* $\mu_i > 0$ untuk setiap i = 1, 2, 3, …

$$P(\text{hilang 1 individu}) = P(X(t+\Delta t) = i-1 \mid X(t) = i) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(\text{tidak ada individu hilang}) = P(X(t+\Delta t) = i \mid X(t) = i) = 1 - \mu_i \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(\text{hilang lebih dari 1 individu}) = P(X(t+\Delta t) > i-1 \mid X(t) = i) = o(\Delta t)$$

Misalkan $P_i(t+\Delta t)$ menyatakan peluang sistem berada dalam status i pada waktu $(t+\Delta t)$, maka hanya ada peluang transisi yang terjadi dari status $i-1$ (*Birth Process*) atau dari status *i*+1 (*Death Process*).

3.2 Model Peluang *Birth-Death Process*

Berdasarkan peluang transisi yang diperoleh, peluang sistem berada dalam status = i pada waktu $(t+\Delta t)$ adalah :

$$
\begin{aligned}
P_i(t+\Delta t) &= P(X(t+\Delta t)=i, X(t)=i-1) + P(X(t+\Delta t)=i, X(t)=i+1) \\
&\quad + P(X(t+\Delta t)=i, X(t)=i) + P(X(t+\Delta t)=i, | X(t+\Delta t)-X(t)| > 1) \\
&= P(X(t+\Delta t)=i \mid X(t)=i-1)P_{i-1}(t) \\
&\quad + P(X(t+\Delta t)=i \mid X(t)=i+1)P_{i+1}(t) + P(X(t+\Delta t)=i \mid X(t)=i)P_i(t) \\
&\quad + P(\text{lebih dari satu transisi dalam interval}(t, t+\Delta t))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_i(t+\Delta t) &= (\lambda_{i-1}\Delta t + o(\Delta t))P_{i-1}(t) + (\mu_{i+1}\Delta t + o(\Delta t))P_{i+1}(t) + (1-(\lambda_i+\mu_i)\Delta t + o(\Delta t))P_i(t) \\
&\quad + o(\Delta t) \\
&= \lambda_{i-1}\Delta t P_{i-1}(t) + \mu_{i+1}\Delta t P_{i+1}(t) + P_i(t) - (\lambda_i+\mu_i)\Delta t P_i(t) \\
&\quad + o(\Delta t)P_{i-1}(t) + o(\Delta t)P_{i+1}(t) + o(\Delta t)P_i(t) + o(\Delta t) \\
&= \lambda_{i-1}\Delta t P_{i-1}(t) + \mu_{i+1}\Delta t P_{i+1}(t) + P_i(t) - (\lambda_i+\mu_i)\Delta t P_i(t) + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

akibatnya,

$$P_i(t+\Delta t) - P_i(t) = \lambda_{i-1}\Delta t P_{i-1}(t) - (\lambda_i+\mu_i)\Delta t P_i(t) + \mu_{i+1}\Delta t P_{i+1}(t) + o(\Delta t)$$

Selanjutnya kedua ruas dibagi Δt dan diperoleh

$$\frac{P_i(t+\Delta t)-P_i(t)}{\Delta t} = \lambda_{i-1}P_{i-1}(t) - (\lambda_i+\mu_i)P_i(t) + \mu_{i+1}P_{i+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

maka untuk $\Delta t \to 0$, diperoleh persamaan diferensial orde satu dari $P_i(t)$ terhadap t :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_i(t+\Delta t)-P_i(t)}{\Delta t} = \lambda_{i-1}P_{i-1}(t) - (\lambda_i+\mu_i)P_i(t) + \mu_{i+1}P_{i+1}(t) + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}P_{i-1}(t) - (\lambda_i+\mu_i)P_i(t) + \mu_{i+1}P_{i+1}(t)$$

Diketahui status awal i = 0, maka pada saat i = 0 tidak mungkin terjadi kemunculan 1 individu dari status $i-1$ ke i sehingga λ_{i-1} = 0 dan tidak mungkin terjadi kehilangan 1 individu dari status i ke status i-1 sehingga $\mu_i = 0$, akibatnya:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}P_{i-1}(t) - (\lambda_i+\mu_i)P_i(t) + \mu_{i+1}P_{i+1}(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = 0 - (\lambda_0 + 0)P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$

diperoleh : $\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$

Diperoleh model peluang *Birth-Death process* pada waktu t berdasarkan beberapa status :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \quad (1)$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1} P_{i-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_i(t) + \mu_{i+1} P_{i+1}(t) \quad \text{, untuk setiap } i = 1, 2, \ldots \quad (2)$$

dimana kedua bentuk persamaan ini memenuhi membentuk Sistem Persamaan Diferensial Linier Homogen orde-1. Dengan demikian, untuk dapat membentuk fungsi peluang *Birth-Death Process* maka akan dicari solusi umumnya.

3.3 Fungsi peluang *Birth-Death Process*

Pada penelitian ini, dipilih metode Transformasi Laplace untuk mencari solusi umum dari Sistem Persamaan Diferensial Linier Homogen sebagai fungsi peluang *Birth-Death Process*. Didefinisikan Transformasi Laplace fungsi peluang *Birth-Death Process* pada waktu t :

$$\mathcal{L}\{P_i(t)\} = f_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} P_i(t)\, dt \quad (3)$$

untuk $\mathrm{Re}(s) > 0$ dan $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Diperoleh transformasi Laplace dari Persamaan Diferensial *Birth-Death Process*, yaitu : $\mathcal{L}\{P_i'(t)\} = -P_i(0) + sf_i(t)$ (4)

Diasumsikan bahwa status awal i = 0 yang berarti tidak ada individu pada waktu t = 0, sehingga nilai peluang setiap status i pada waktu t = 0 adalah :

$$P_i(0) = \begin{cases} 1 & , i = 0 \\ 0 & , i = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Terlebih dahulu diasumsikan *rate Birth Process* $\lambda_i = a_{2i}$ (berindeks genap) dan *rate Death Process* $\mu_i = a_{2i-1}$ (berindeks ganjil) untuk setiap $i = 0, 1, 2, \ldots$, sehingga persamaan (1) dan (2) menjadi :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -a_0 P_0(t) + a_1 P_1(t) \tag{5}$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = a_{2i-2} P_{i-1}(t) - (a_{2i-1} + a_{2i}) P_i(t) + a_{2i+1} P_{i+1}(t) \quad \text{, untuk setiap } i = 1,\ 2,\ \ldots \tag{6}$$

Dari transformasi Laplace persamaan (5), diperoleh :

$$f_0(s) = \frac{1}{s + a_0 - a_1 \dfrac{f_1(s)}{f_0(s)}} \tag{7}$$

Dari transformasi Laplace persamaan (6), diperoleh :

$$\frac{f_i(s)}{f_{i-1}(s)} = \frac{a_{2i-2}}{s + a_{2i-1} + a_{2i} - a_{2i+1} \dfrac{f_{i+1}(s)}{f_i(s)}} \quad \text{untuk setiap } i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{8}$$

Dari hubungan antara persamaan (7) dan persamaan (8), jika diiterasi terus-menerus, akan menjadi :

$$f_0(s) = \cfrac{1}{s + a_0 - \cfrac{a_0 a_1}{s + a_1 + a_2 - \cfrac{a_2 a_3}{s + a_3 + a_4 - \ldots}}} \tag{9}$$

$$\frac{f_i(s)}{f_{i-1}(s)} = \cfrac{a_{2i-2}}{s + a_{2i-1} + a_{2i} - \cfrac{a_{2i} a_{2i+1}}{s + a_{2i+1} + a_{2i+2} - \cfrac{a_{2i+2} a_{2i+3}}{s + a_{2i+3} + a_{2i+4} - \ldots}}} \tag{10}$$

Persamaan (9) dan (10) disebut sebagai fraksi-*J* atau fraksi Jacobi.

Pada teorema 4.3.1, dinyatakan fraksi Jacobi dari persamaan (10) ke dalam suatu bentuk formal deret pembangkit.

Teorema 2.3.1 [3]

Jika $$\frac{f_i(s)}{f_{i-1}(s)} = a_{2i-2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m B(m,i) \frac{1}{s^{m+1}} \tag{11}$$

dengan $B(0,i)=1$, *maka untuk* $m=1,2,3,\ldots,$

$$B(m,i)=\sum_{j_1=2i-1}^{2i} a_{j_1} \sum_{j_2=2i-1}^{j_1+1} a_{j_2} \sum_{j_3=2i-1}^{j_2+1} a_{j_3} \ldots \sum_{j_m=2i-1}^{j_{m-1}+1} a_{j_m} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots \qquad (12)$$

Teorema 2.3.2 berikut merupakan solusi Persamaan Diferensial Linier Homogen dari persamaan (5), sebagai fungsi peluang *Birth-Death Process* saat status i = 0 pada waktu t.

Teorema 2.3.2 [3]

Jika $$P_0(t)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m A(m,0)\frac{t^m}{m!} \qquad (13)$$

dengan $A(0,0)=1$, *maka untuk* $m=1,2,3,\ldots,$

$$A(m,0)=a_0\sum_{j_1=0}^{1} a_{j_1} \sum_{j_2=0}^{j_1+1} a_{j_2} \sum_{j_3=0}^{j_2+1} a_{j_3} \ldots \sum_{j_{m-1}=0}^{j_{m-2}+1} a_{j_{m-1}} \qquad (14)$$

Teorema 2.3.3 berikut merupakan solusi Sistem Persamaan Diferensial Linier Homogen dari persamaan (6), sebagai fungsi peluang *Birth-Death Process* saat status $i=1,\ 2,\ 3,\ldots$ pada waktu t.

Teorema 2.3.3 [3]

Jika $$P_i(t)=L_{i-1}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m A(m,2i)\frac{t^{m+i}}{(m+i)!} \qquad (15)$$

dimana

$$A(m,i)=\sum_{j_1=0}^{i} a_{j_1} \sum_{j_2=0}^{j_1+1} a_{j_2} \sum_{j_3=0}^{j_2+1} a_{j_3} \ldots \sum_{j_m=0}^{j_{m-1}+1} a_{j_m} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots \qquad (16)$$

dan $L_{i-1}=a_0a_2a_4\ldots a_{2i-2}$, $L_{-1}=1$ *dengan* $A(0,i)=1$

Setelah dilakukan pembuktian pada ketiga teorema, telah diperoleh solusi Persamaan Diferensial Linier Homogen sebagai fungsi peluang dari *Birth-Death Process* saat status *i* = 0, 1, 2, 3, … pada waktu *t*. Pada penelitian ini, fungsi peluang yang terbentuk diasumsikan terjadi pada populasi dengan jumlah individu berhingga untuk $i=0,1,\ 2,\ldots,n$ dimana *rate Birth Process* $\lambda_i=\lambda$ (i = 0, 1, 2, …, *n*-1) dan *rate Death Process* $\mu_i=\mu$ (i = 1, 2, 3, …, *n*) bersifat konstan untuk setiap konstanta $\lambda>0$ dan $\mu>0$. Dalam proses penyelesaian fungsi peluang *Birth-Death Process*, digunakan asumsi untuk *rate Birth Process* $\lambda_i=a_{2i}$ dan *rate Death Process* $\mu_i=a_{2i-1}$, sehingga fungsi peluang *Birth-Death Process* menjadi :

$$P_i(t)=L_{i-1}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m A(m,2i)\frac{t^{m+i}}{(m+i)!} \quad , \quad i=0,1,\ 2,\ldots,n \qquad (17)$$

dimana

$$A(m,i)=\sum_{j_1=0}^{i} a_{j_1} \sum_{j_2=0}^{j_1+1} a_{j_2} \sum_{j_3=0}^{j_2+1} a_{j_3} \ldots \sum_{j_m=0}^{j_{m-1}+1} a_{j_m} \quad \text{dan } L_{i-1}=a_0 a_2 a_4 \ldots a_{2i-2}\ ,\ L_{-1}=1$$

dengan $A(0,i)=1$, $a_{2i}=\lambda$ dan $a_{2i-1}=\mu$ untuk setiap konstanta $\lambda>0$ dan $\mu>0$, dan $a_i=0$ jika $i\geq 2n$.

3.4 Penerapan Fungsi Peluang *Birth-Death Process*

Salah satu contoh dari bentuk model antrian *Birth-Death Process* digambarkan dalam proses kedatangan dan pelayanan pelanggan pada suatu stasiun pompa gas yang hanya memiliki satu pompa untuk melayani pelanggan. Misalkan pelanggan potensial datang mengikuti distribusi Poisson dengan *rate* $\lambda=20$ mobil/jam. Stasiun tersebut menyediakan tempat mengantri hanya untuk satu buah mobil. Diasumsikan waktu pelayanan setiap mobil berdistribusi Eksponensial dengan *mean* 5 menit (Ross, 2003).

Penyelesaian :
rate kedatangan pelanggan , $\lambda=20$ mobil/jam
rate pelayanan pelanggan , $\mu=12$ mobil/jam
Karena hanya satu buah mobil yang dapat mengantri, maka proses antrian ini merupakan *Birth-Death Process* dengan jumlah individu berhingga *n* = 1. Terdapat dua status yaitu status *i* = 0 (tidak ada mobil yang sedang mengantri) dan status *i* = 1 (ada satu buah mobil yang sedang mengantri).
Peluang masing-masing status berdasarkan persamaan (17) adalah :

1. Peluang status *i* = 0, tidak ada mobil yang sedang mengantri pada waktu *t*.

   $$P_0(t)=L_{-1}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m A(m,0)\frac{t^m}{m!} \quad \text{dimana } A(m,0)=a_0(a_0+a_1)^{m-1}$$

   untuk m = 1, 2, 3, … dan $L_{-1}=1$, sehingga dengan $a_0=\lambda=20$ mobil/jam dan $a_1=\mu=12$ mobil/jam, diperoleh :

   $$P_0(t)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m A(m,0)\frac{t^m}{m!}=\frac{a_1}{(a_0+a_1)}+\frac{a_0}{(a_0+a_1)}\ e^{-(a_0+a_1)t}\ =\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\ e^{-32t}$$

   Hasil perhitungan yang diperoleh dalam interval waktu $0\leq t\leq 1$ jam ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Hasil perhitungan fungsi $P_0(t)$ dengan $\lambda = 20$ dan $\mu = 12$

No.	***t***	$P_0(t)$
1.	0	1
2.	0,01	0,828843
3.	0,02	0,704558
4.	0,03	0,614308
5.	0,04	0,548773
6.	0,05	0,501185
7.	0,06	0,466629
8.	0,07	0,441537
9.	0,08	0,423315
10.	0,09	0,410084
11.	0,1	0,400476
12.	0,2	0,376038
13.	0,3	0,375042
14.	0,4	0,375002
15.	0,5	0,375
16.	0,6	0,375
17.	0,7	0,375
18.	0,8	0,375
19.	0,9	0,375
20.	1	0,375

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa nilai peluang pada interval waktu $0 \le t \le 1$ jam, pada waktu awal *t* = 0 peluangnya $P_0(t) = 1$ yang menyatakan pasti tidak terdapat mobil yang mengantri, kemudian pada waktu-waktu berikutnya mobil pelanggan mulai berdatangan dan semakin lama semakin kecil peluang tidak ada mobil yang mengantri pada waktu *t* hingga mencapai nilai peluang tetap atau stasionernya sebesar 0,375.

2. Peluang status *i* = 1, ada satu buah mobil yang sedang mengantri pada waktu *t*.

$P_1(t) = L_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A(m,2) \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}$ dimana $A(m,2) = (a_0 + a_1)^m$ untuk m = 0, 1, 2, … dan $L_0 = a_0$, sehingga dengan $a_0 = \lambda = 20$ mobil/jam dan $a_1 = \mu = 12$ mobil/jam, diperoleh :

$$P_1(t) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (a_0 + a_1)^m \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{a_0}{(a_0 + a_1)} - \frac{a_0}{(a_0 + a_1)} e^{-(a_0 + a_1)t} = \frac{5}{8} - \frac{5}{8} e^{-32t}$$

Hasil perhitungan yang diperoleh dalam interval waktu $0 \le t \le 1$ jam ditunjukkan pada Tabel 2.

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa nilai peluang pada interval waktu $0 \leq t \leq 1$ jam, pada waktu awal t = 0 peluangnya $P_1(t) = 0$ yang menyatakan pasti tidak mungkin terdapat satu mobil yang mengantri, kemudian pada waktu-waktu berikutnya mobil pelanggan mulai berdatangan dan semakin lama semakin besar peluang ada satu mobil yang mengantri pada waktu t hingga mencapai nilai peluang tetap atau stasionernya sebesar 0,625.

Tabel 2. Hasil perhitungan fungsi $P_1(t)$ dengan $\lambda = 20$ dan $\mu = 12$

No.	***t***	$P_1(t)$
1.	0	0
2.	0,01	0,171157
3.	0,02	0,295442
4.	0,03	0,385692
5.	0,04	0,451227
6.	0,05	0,498815
7.	0,06	0,533371
8.	0,07	0,558463
9.	0,08	0,576685
10.	0,09	0,589916
11.	0,1	0,599524
12.	0,2	0,623962
13.	0,3	0,624958
14.	0,4	0,624998
15.	0,5	0,625
16.	0,6	0,625
17.	0,7	0,625
18.	0,8	0,625
19.	0,9	0,625
20.	1	0,625

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa nilai peluang pada interval waktu $0 \leq t \leq 1$ jam, pada waktu awal t = 0 peluangnya $P_1(t) = 0$ yang menyatakan pasti tidak mungkin terdapat satu mobil yang mengantri, kemudian pada waktu-waktu berikutnya mobil pelanggan mulai berdatangan dan semakin lama semakin besar peluang ada satu mobil yang mengantri pada waktu t hingga mencapai nilai peluang tetap atau stasionernya sebesar 0,625.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Haryono. 1995. *Proses Stokastik Terapan.* Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya.

[2] Taylor, M.H. & Karlin, S. (1998) *An Introduction to Stochastis Modelling*. Academic Press. San Diego. California.

[3] Parthasarathy, P. R. & Sudhesh, R. 2006. *Exact Transient Solution Of A State-Dependent Birth-Death Process.* http://www.emis.de/journals/HOA/JAMSA/e628.pdf Diakses tanggal 4 Maret 2009

[4] Ross, S. M. 2003. *Introduction to Probability Models 8th Edition*. Academic Press, USA.