Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.18 No.1 (Juni 2024) Hal. 1-13

# INTERPOLASI *SPLINE* KUBIK UNTUK MEMPERKIRAKAN KEDALAMAN LAUT DI PERAIRAN ANTARA TELUK SUAK DAN PULAU LEMUKUTAN

**Muhammad Hariski, Nilamsari Kusumastuti, Yudhi**

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Tanjungpura
Jl. Prof. Dr. H. Hadari Nawawi, 78124, Kalimantan Barat
email: *hariski@student.untan.ac.id*

## ABSTRACT

Interpolation is a technique that determines the value of a function at a point located between several known data points. Various interpolation methods include polynomial interpolation, Lagrange interpolation, Newton interpolation, and spline interpolation. Cubic spline interpolation aims to produce accurate approximations characterized by minimal oscillations in the resulting curve. This research uses the cubic spline interpolation method to estimate the sea depth in the waters between Teluk Suak and Pulau Lemukutan. The sea depth measurements are conducted to acquire information regarding the underwater topography. We collected data points using remote sensing techniques through Google Earth Pro. These points are selected based on the sea depth profile considerations, including steep areas and points of depth variation to maintain the seabed conditions within the interpolation curve, with a total of 31 data points. Subsequently, we subjected these data points to the conditions necessary for cubic spline interpolation, resulting in a system of 120 linear equations. After solving this system of linear equations, we obtained cubic spline interpolation polynomials for each subinterval and then estimated the sea depth at other points. Based on the cubic spline interpolation results, we achieved a Mean Average Percentage Error (MAPE) of 1.58%, indicating a highly accurate interpolation outcome.

**Keywords**: natural cubic spline, oscillation, MAPE, system of linear equation, topography

## ABSTRAK

Interpolasi adalah teknik untuk mengetahui nilai fungsi pada suatu titik yang berada di antara beberapa titik data yang sudah diketahui nilai fungsinya. Beberapa jenis metode interpolasi adalah interpolasi polinomial, interpolasi Lagrange, interpolasi Newton, dan interpolasi *spline*. Interpolasi *spline* kubik bertujuan untuk menghasilkan perkiraan yang akurat yang ditandai dengan tidak adanya osilasi yang besar pada kurva hasil interpolasi. Penelitian ini bertujuan untuk memperkirakan kedalaman laut di perairan antara Teluk Suak dan Pulau Lemukutan dengan menggunakan metode interpolasi *spline* kubik. Pengukuran kedalaman laut dilakukan untuk mendapatkan suatu informasi berupa bentuk topografi di dasar laut. Titik-titik data diambil dengan teknik penginderaan jarak jauh melalui Google Earth Pro. Pemilihan titik dilakukan dengan mempertimbangkan penampakan kedalaman laut, seperti titik pada daerah yang curam dan titik pada kenaikan atau penurunan kedalaman untuk mempertahankan keadaan dasar laut pada kurva hasil interpolasi. Titik-titik yang dipilih berjumlah 31. Kemudian, titik-titik tersebut dimasukkan ke kondisi-kondisi yang harus dipenuhi pada interpolasi *spline* kubik sehingga terbentuk sistem persamaan linear 120 variabel. Setelah menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut, diperoleh polinomial interpolasi *spline* kubik untuk setiap subinterval. Polinomial interpolasi *spline* kubik pada setiap subinterval tersebut digunakan untuk memperkirakan kedalaman laut pada titik-titik lainnya. Berdasarkan hasil interpolasi *spline* kubik, diperoleh nilai MAPE (*Mean Average Percentage Error*) sebesar 1,58% yang menandakan hasil interpolasi tergolong sangat akurat.

***Kata kunci:*** spline kubik natural, MAPE, osilasi, sistem persamaan linear, topografi

Received: 10 November 2023, Accepted: 10 Desember 2023, Published: 27 April 2024

## PENDAHULUAN

Pulau Lemukutan merupakan salah satu pulau kecil si Kalimantan Barat yang menjadi salah satu destinasi wisata favorit di Kalimantan Barat. Teluk Suak merupakan jalur untuk menuju Pulau Lemukutan dari pesisir pantai Kalimantan Barat. Teluk Suak dan Pulau Lemukutan dihubungkan oleh perairan dangkal sepanjang 15 km. Saat ini, informasi mengenai kedalaman laut di perairan antara Pulau Lemukutan dan Teluk Suak belum banyak diketahui. Pengukuran kedalaman laut dilakukan untuk mendapatkan suatu informasi sebuah bentuk topografi di dasar perairan. Selain itu, kedalaman laut memberikan berbagai informasi penting seperti navigasi pelayaran dan sebaran makhluk hidup yang tinggal di dalamnya (Pambuko dkk., 2013). Kedalaman laut dapat diukur dengan cara turun langsung ke lapangan, namun cara tersebut memakan biaya yang relatif tinggi dan hanya terbatas pada area tertentu saja. Cara lain yang dapat digunakan untuk pengukuran kedalaman laut adalah dengan metode penginderaan jarak jauh.

Menurut Lillesand dkk. (2015), penginderaan jauh adalah ilmu dan seni yang dipergunakan untuk memperoleh informasi tentang suatu objek atau fenomena dengan alat, tanpa kontak langsung dengan objek, daerah, atau fenomena tersebut. Informasi yang didapat dengan teknik penginderaan jauh bukan hanya pada permukaan objek, daerah, atau fenomena yang tampak langsung di atas permukaan bumi, tetapi hingga kedalaman tertentu juga dapat dideteksi. Salah satu teknik penginderaan jauh adalah melalui citra satelit. Contoh hasil dari penginderaan jarak jauh melalui citra satelit adalah kedalaman laut berdasarkan titik koordinat lintang dan bujur. Salah satu sumber untuk mendapatkan data citra satelit adalah *Google Earth*. Menurut Nur dkk. (2021), *Google Earth* memiliki kelebihan berupa akurasi rekaman data lampau yang baik, kemudahan akses, tidak berbayar, dan resolusi yang cukup baik untuk pemetaan detail. Jika dari sekumpulan titik sudah diketahui nilai kedalamannya, maka untuk memperkirakan kedalaman di suatu titik lain dapat dilakukan dengan metode interpolasi.

Salah satu peneliti yang menggunakan interpolasi *spline* kubik adalah (Erfianto & Setiawan, 2020) yang menerapkan interpolasi *spline* kubik untuk memetakan *heatmap* atau distribusi panas pada permukaan panel sel surya. *Heatmap* adalah sebuah peta perseberan panas yang dibentuk oleh metode interpolasi dua dimensi yang dalam hal ini adalah peta sebaran suhu dari sensor yang telah diletakkan pada permukaan PV. Tujuan interpolasi *spline* kubik pada penelitian ini adalah untuk meminimalisir biaya karena sensor yang akan digunakan tidak banyak, melainkan hanya pada beberapa titik saja. Variabel bebas pada penelitian tersebut adalah arus (mA) dan variabel terikatnya adalah arus (mA) dan

tegangan (V). Teknik interpolasi ini juga memungkinkan untuk memvisualisasikan *heatmap* yang lebih halus dan jika titik sensor semakin banyak maka semakin akurat hasil interpolasi dan visualisasi yang dihasilkan.

Pada penelitian ini, akan digunakan metode interpolasi *spline* kubik untuk memperkirakan kedalaman laut di perairan antara Teluk Suak dan Pulau Lemukutan. Kemudian, membandingkan hasil perkiraan kedalaman laut dengan menggunakan interpolasi *spline* kubik dengan nilai sebenarnya. Selanjutnya, menghitung galat mutlak rata-rata dari hasil perkiraan yang diperoleh untuk menyimpulkan hasil perkiraan kedalaman laut dengan menggunakan interpolasi *spline* kubik apakah termasuk sangat baik, baik, atau buruk.

## TINJAUAN PUSTAKA

Pada metode numerik, interpolasi merupakan sebuah cara untuk membentuk titik data baru di antara titik-titik data yang sudah diketahui nilainya (Sofiyani & Permanasari, 2023). Interpolasi digunakan untuk memperkirakan nilai fungsi di antara titik-titik data yang sudah diketahui nilainya tanpa mengetahui nilai sebenarnya (Chikwendu dkk., 2015). Beberapa jenis metode interpolasi adalah interpolasi polinomial, interpolasi Lagrange, interpolasi Newton, dan interpolasi *spline*. Interpolasi polinomial merupakan metode interpolasi yang paling sederhana karena jumlah kondisi yang harus dipenuhi relatif sedikit. Meskipun begitu, interpolasi polinomial tidak dapat digunakan pada semua jenis data. Jika titik data yang digunakan sangat banyak, maka derajat polinomial interpolasinya akan sangat tinggi. Pada interpolasi polinomial berderajat tinggi, perubahan kecil pada suatu titik dapat mengarah ke perubahan nilai fungsi yang sangat besar (Epperson, 2013). Hal ini dapat memicu adanya osilasi yang cukup besar pada subinterval tertentu yang disebut sebagai *Runge's Phenomenon* (Gandha, 2021). Hal yang sama juga dapat terjadi pada interpolasi Lagrange dan interpolasi Newton. Untuk mengatasi kekurangan dari interpolasi polinomial, maka dapat digunakan metode interpolasi *spline*.

Berdasarkan derajatnya, ada tiga jenis interpolasi *spline*, yaitu interpolasi *spline* linear, *spline* kuadratik, dan *spline* kubik (Burden & Faires, 2010). Interpolasi *spline* linear pada dasarnya merupakan interpolasi dengan membentuk fungsi linear pada setiap subinterval. Bentuk umum dari fungsi *spline* linear adalah $y_i = a_i x + b_i, x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1,2, \dots, n$ (1). Hasilnya berupa grafik fungsi linear yang tidak *differentiable* yang ditandai dengan kurva yang tidak *smooth* pada setiap titik dalam. Hal ini menyebabkan perkiraan nilai fungsi yang dihasilkan cenderung kurang akurat. Interpolasi *spline* kuadratik merupakan interpolasi dengan menerapkan polinomial kuadrat pada setiap subinterval sedemikian sehingga hubungan antar fungsi kuadrat pada setiap subinterval adalah kontinu diferensiabel. Bentuk umum dari fungsi *spline* kuadratik adalah $y_i = a_i x^2 + b_i x + c_i, x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1,2, \dots, n$ (2). Walaupun kontinu diferensiabel, kurva *spline*

kuadratik dapat menghasilkan titik ekstrem pada subinterval tertentu sehingga hasil perkiraan yang diperoleh dapat melenceng dari yang seharusnya. Oleh karena itu, digunakan interpolasi *spline* kubik. Fungsi *spline* kubik adalah fungsi *piecewise* atau bagian demi bagian yang didefinisikan berbeda pada setiap subinterval sedemikian sehingga hubungan antar fungsi *spline* kubik pada setiap titik dalam adalah kontinu diferensiabel. Bentuk umum dari fungsi *spline* kubik adalah $y_i = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1,2,\dots,n$ (3). Fungsi *spline* kubik memiliki derajat 3 yang tergolong kecil sehingga kurva hasil interpolasinya tidak mengalami osilasi atau naik turunnya kurva secara cepat pada subinterval tertentu. Interpolasi *spline* kubik dapat digunakan pada data geospasial.

Penelitian mengenai interpolasi *spline* kubik telah banyak dilakukan oleh peneliti sebelumnya. Salah satunya adalah (Erfianto & Setiawan, 2020) menggunakan interpolasi *spline* kubik untuk memetakan distribusi panas pada permukaan panel sel surya di mana variabel bebasnya adalah waktu (jam) dan variabel terikatnya adalah arus (mA) dan tegangan (V). Hasilnya adalah visualisasi dalam peta distribusi atau sebaran *heatmap* 2D. Visualisasi warna pada *heatmap* merepresentasikan data suhu pada permukaan PV. Metode interpolasi *spline* kubik juga memungkinkan untuk memvisualisasikan *heatmap* yang lebih halus dan semakin banyak titik sensor yang digunakan, maka semakin akurat hasil interpolasi dan visualisasi yang dihasilkan.

Kemudian dari (Roe & Brooks, 2021) menganalisis peningkatan kecepatan pada pembuatan peta kepadatan volumetrik dengan metode interpolasi *spline* kubik. Visualisasi data pada simulasi dinamika molekul dapat menjadi lebih sulit terutama jika terdapat ribuan hingga jutaan lintasan *frame*. Dengan menggunakan interpolasi *spline* kubik, maka perhitungan peta volumetrik dari data lintasan dinamika mokeluler dapat dipercepat karena tidak perlu menghitung pada semua titik. Setelah dibandingkan dengan nilai data aslinya, diperoleh nilai RMSE (*Root Mean Square Error*) yang dihasilkan adalah $10^{-7}$ yang tergolong sangat kecil sehingga hasil prediksi tergolong akurat. RMSE adalah rata-rata dari kuadrat dari selisih antara nilai asli dan nilai aproksimasi. Semakin kecil nilai RMSE, semakin akurat hasil perkiraan yang diperoleh.

## METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, data yang digunakan adalah data primer berupa kedalaman laut di perairan antara Teluk Suak dan Pulau Lemukutan hasil penginderaan jarak jauh melalui aplikasi *Google Earth Pro*. Langkah pertama adalah menentukan titik awal dan titik akhir pada aplikasi *Google Earth Pro*. Selanjutnya, menentukan titik-titik yang akan digunakan di sepanjang garis yang menghubungkan titik awal dan titik akhir. Titik-titik tersebut diperoleh dengan mempertimbangkan penampakan kedalaman di laut tersebut, seperti pada daerah yang curam atau daerah yang mengalami perubahan kemiringan. Setelah

mendapatkan titik-titik yang diperlukan, langkah selanjutnya adalah mengurutkan titik-titik yang diperoleh berdasarkan jarak dari titik mulai (Teluk Suak) hingga menuju titik akhir (Pulau Lemukutan).

Berikutnya, merumuskan kondisi-kondisi yang harus dipenuhi pada interpolasi *spline* kubik. Interpolasi *spline* kubik adalah interpolasi dengan menerapkan polinomial berderajat 3 pada setiap subinterval. Bentuk umum fungsi *spline* kubik adalah sebagai berikut.

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \qquad x_{i-1} \le x \le x_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Berikut adalah kondisi-kondisi yang harus dipenuhi pada interpolasi *spline* kubik.

(i) Kekontinuan fungsi *spline* kubik pada setiap titik dalam $x_i, i = 1, 2, \dots, (n-1)$. Kondisi ini dinyatakan ke dalam persamaan:

$$a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x_i + d_i = f_i(x_i), \text{ dan}$$
$$a_{i+1} x_i^3 + b_{i+1} x_i^2 + c_{i+1} x_i + d_{i+1} = f_{i+1}(x_i)$$

Kondisi (i) menghasilkan $2(n-1)$ persamaan.

(ii) Kekontinuan turunan pertama fungsi *spline* kubik pada setiap titik dalam $x_i, i = 1, 2, \dots, (n-1)$. Kondisi ini dinyatakan ke dalam persamaan:

$$3a_i x_i^2 + 2b_i x_i + c_i = 3a_{i+1} x_i^2 + 2b_{i+1} x_i + c_{i+1}$$

Kondisi (ii) menghasilkan $(n-1)$ persamaan.

(iii) Kekontinuan turunan kedua fungsi *spline* kubik pada setiap titik dalam $x_i, i = 1, 2, \dots, (n-1)$. Kondisi ini dinyatakan ke dalam persamaan:

$$6a_i x_i + 2b_i = 6a_{i+1} x_i + 2b_{i+1}$$

Kondisi (iii) menghasilkan $(n-1)$ persamaan.

(iv) Pada kedua titik batas $x_0$ dan $x_n$, kondisinya adalah sebagai berikut.

$$f_1(x_0) = a_1 x_0^3 + b_1 x_0^3 + c_1 x_0 + d_1, \text{ dan}$$
$$f_n(x_n) = a_n x_n^3 + b_n x_n^2 + c_n x_n + d_n$$

Kondisi (iv) menghasilkan 2 persamaan.

Kondisi (i) hingga (iv) menghasilkan $(4n-2)$ persamaan. Untuk mendapatkan solusi tunggal, maka diperlukan dua persamaan tambahan. Ada dua pilihan kondisi tambahan berdasarkan syarat titik batas yang diketahui.

(a) Kondisi *spline* kubik natural (*natural cubic spline*)

Diasumsikan turunan kedua pada kedua titik batas adalah nol. Dengan demikian, kondisi *spline* kubik natural dapat dinyatakan ke dalam persamaan:

$$f_1''(x_0) = 0, \text{ dan}$$
$$f_n''(x_n) = 0$$

(b) Kondisi *spline* kubik terapit (*clamped cubic spline*).

Kondisi ini digunakan jika diketahui informasi berupa nilai turunan pertama fungsi *spline* kubik atau gradien garis singgung pada kedua titik batas. Misalkan nilai turunan pertama fungsi *spline* kubik di $x_0$ dan $x_n$ berturut-turut adalah $m_0$ dan $m_n$, maka kondisi *spline* kubik terapit dapat dinyatakan ke dalam persamaan:

$$f_1'(x_0) = m_0, \text{ dan}$$
$$f_n'(x_n) = m_n$$

Masing-masing dari kondisi tambahan tersebut memberikan dua persamaan. Dengan demikian, ada $4n$ persamaan yang harus diselesaikan untuk mencari nilai $a_i, b_i, c_i,$ dan $d_i, i = 1, 2, \dots, n$ sehingga terbentuk polinomial *spline* kubik untuk setiap subinterval (Visca dkk., 2019).

Langkah selanjutnya adalah menghitung galat pada beberapa titik. Galat mutlak adalah selisih antara nilai asli dengan nilai hampiran, sedangkan galat relatif merupakan perbandingan antara galat mutlak dan nilai asli (Purwati & Erawati, 2020). Misalkan $\hat{y}$ adalah nilai hampiran terhadap nilai asli $y$, maka $\varepsilon$ merupakan selisih antara $y$ dan $y$ atau $\varepsilon = |y - \hat{y}|$. Galat relatif dirumuskan sebagai berikut.

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{y} \tag{4}$$

Apabila ingin menentukan galat pada banyak titik data, dapat digunakan nilai MAPE. Nilai MAPE (*Mean Average Percentage Error*) adalah rata-rata dari galat relatif dibagi dengan nilai asli. Nilai MAPE menggambarkan perbandingan antara nilai asli dan nilai perkiraan pada sekelompok titik data. Nilai MAPE dirumuskan sebagai berikut.

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y_i}}{y_i}\right| \times 100\% \tag{5}$$

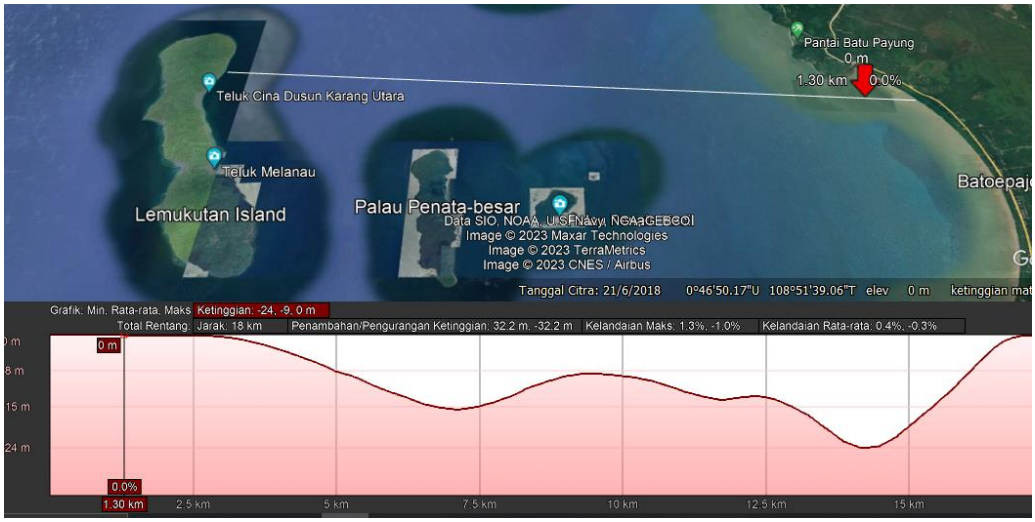
Setelah mendapatkan nilai MAPE, langkah berikutnya adalah mengkategorikan nilai MAPE yang diperoleh. Menurut (Lewis, 1982), nilai MAPE dapat dikategorikan sebagai berikut.

**Tabel 1**. Kategori Nilai MAPE

| MAPE | Akurasi |
|---|---|
| < 10% | Sangat Baik |
| 10% sampai 20% | Baik |
| 20% sampai 50% | Layak |
| > 50% | Tidak Akurat |

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada artikel ini, titik-titik yang akan digunakan adalah titik-titik di sepanjang garis yang menghubungkan titik awal dan titik akhir. Titik awal yang digunakan berada di pesisir Teluk Suak dengan koordinat $0°46'50{,}17'' \, LU, 108°51'39{,}06'' BT$. Titik akhir yang digunakan berada di pesisir Pulau Lemukutan dengan koordinat $0°47'19{,}77'' LU, 108°43'99'' BT$. Diperoleh titik-titik yang digunakan berjumlah 31. Titik-titik tersebut diperoleh dengan mempertimbangkan penampakan kedalaman di laut tersebut. Setelah mendapatkan titik-titik yang diperlukan, langkah selanjutnya adalah mengurutkan titik-titik yang diperoleh berdasarkan jarak dari titik mulai (Teluk Suak) hingga menuju titik akhir (Pulau Lemukutan).




**Gambar 1**. Antarmuka Google Earth Pro

Keterangan: Tanda panah merah menunjukkan titik awal.

Cara mendapatkan titik-titik yang diperlukan adalah dengan mengukur jarak dari titik awal ke beberapa titik yang mengalami perubahan kemiringan atau gradien. Berikut adalah data kedalaman laut antara Teluk Suak dan Pulau Lemukutan berdasarkan jarak dari titik awal ke titik akhir.

**Tabel 2.** Data Kedalaman Laut Antara Teluk Suak dan Pulau Lemukutan

| $n$ | Jarak (km) $x_n$ | Kedalaman Laut (m) $y_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,325 | -0,02 |
| 2 | 0,812 | -0,04 |
| 3 | 1,06 | -0,06 |
| 4 | 1,2 | -0,07 |
| 5 | 1,48 | -0,17 |
| 6 | 2 | -0,86 |
| 7 | 3 | -4,19 |
| 8 | 3,7 | -7,59 |
| 9 | 4 | -8,7 |
| 10 | 5 | -13,4 |
| 11 | 5,5 | -15,2 |
| 12 | 5,83 | -15,62 |
| 13 | 6 | -15,33 |
| 14 | 7 | -11,33 |

| $n$ | Jarak (km) $x_n$ | Kedalaman Laut (m) $y_n$ |
|---|---|---|
| 15 | 8,19 | -8,13 |
| 16 | 9 | -9,11 |
| 17 | 9,5 | -10,71 |
| 18 | 10,4 | -13,61 |
| 19 | 11 | -12,67 |
| 20 | 11,5 | -13,97 |
| 21 | 12 | -16,97 |
| 22 | 12,5 | -22,07 |
| 23 | 12,9 | -23,67 |
| 24 | 13,2 | -23,26 |
| 25 | 14 | -16,4 |
| 26 | 15 | -5,2 |
| 27 | 15,5 | -0,8 |
| 28 | 15,6 | -0,4 |
| 29 | 15,7 | -0,2 |
| 30 | 15,9 | 0 |

Berdasarkan titik-titik pada Tabel 2, akan dibuat fungsi *spline* kubik yang memenuhi kondisi-kondisi sebagai berikut.

(i) Kekontinuan fungsi *spline* kubik pada setiap titik dalam $x_i, i = 1, 2, \dots, 29$

$$(0{,}325)^3 a_1 + (0{,}325)^2 b_1 + 0{,}325 c_1 + d_1 = -0{,}02$$
$$(0{,}325)^3 a_2 + (0{,}325)^2 b_2 + 0{,}325 c_2 + d_2 = -0{,}02$$
$$\vdots$$
$$(15{,}7)^3 a_{29} + (15{,}7)^2 b_{29} + 15{,}7 c_{29} + d_{29} = -0{,}2$$
$$(15{,}7)^3 a_{30} + (15{,}7)^2 b_{30} + 15{,}7 c_{30} + d_{30} = -0{,}2$$

(ii) Kekontinuan turunan pertama fungsi *spline* kubik pada setiap titik dalam $x_i$, $i = 1, 2, \dots, 29$

$$3(0{,}325)^2 a_1 + 2(0{,}325) b_1 + c_1 = 3(0{,}325)^2 a_2 + 2(0{,}325) b_2 + c_2$$
$$3(0{,}812)^2 a_2 + 2(0{,}812) b_2 + c_2 = 3(0{,}812)^2 a_3 + 2(0{,}812) b_3 + c_3$$
$$\vdots$$
$$3(15{,}6)^2 a_{28} + 2(15{,}6) b_{28} + c_{28} = 3(15{,}6)^2 a_{29} + 2(15{,}6) b_{29} + c_{29}$$
$$3(15{,}7)^2 a_{29} + 2(15{,}7) b_{29} + c_{29} = 3(15{,}7)^2 a_{30} + 2(15{,}7) b_{30} + c_{30}$$

(iii) Kekontinuan turunan kedua fungsi *spline* kubik pada titik dalam $x_i, i = 1, 2, \dots, 29$

$$6(0{,}325) a_1 + 2 b_1 = 6(0{,}325) a_2 + 2 b_2$$
$$6(0{,}812) a_2 + 2 b_2 = 6(0{,}812) a_3 + 2 b_3$$
$$\vdots$$
$$6(15{,}6) a_{28} + 2 b_{28} = 6(15{,}6) a_{29} + 2 b_{29}$$
$$6(15{,}7) a_{29} + 2 b_{29} = 6(15{,}7) a_{30} + 2 b_{30}$$

(iv) Kondisi kedua titik batas $x_0$ dan $x_{30}$

$$(0)^3 a_1 + (0)^2 b_1 + 0 c_1 + d_1 = 0$$

$(15{,}9)^3 a_{30} + (15{,}9)^2 b_{30} + 15{,}9 c_{30} + d_{30} = 0$

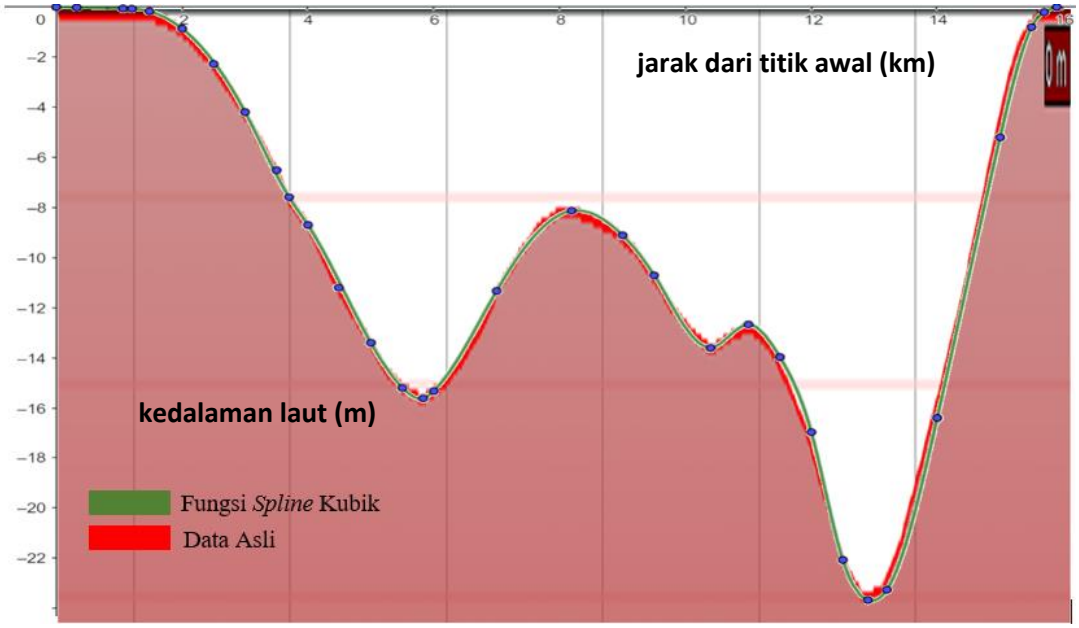
(v) Kondisi tambahan yang digunakan adalah kondisi *spline* kubik natural. Kondisi *spline* kubik natural menghasilkan 2 persamaan sebagai berikut.
$6(0)a_1 + 2b_1 = 0$
$6(15{,}9)a_{30} + 2b_{30} = 0$

Dari kondisi (i) sampai (v), diperoleh 120 persamaan linear 120 variabel. Sistem persaman linear tersebut dapat diselesaikan dengan operasi baris elementer. Setelah menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut, diperoleh fungsi *spline* kubik yang terbentuk adalah sebagai berikut.

**Tabel 3**. Fungsi *Spline* Kubik untuk Setiap Subinterval

| $i$ | $f_i(x)$ | Subinterval |
|---|---|---|
| 1 | $0{,}0816993340250626x^3 - 0{,}0701679536948588x$ | $0 \le x \le 0{,}325$ |
| 2 | $-0{,}150024543088535x^3 + 0{,}225930780185758x^2 - 0{,}14359545725523x + 0{,}14359545725523$ | $0{,}325 \le x \le 0{,}812$ |
| 3 | $0{,}445422243084366x^3 - 1{,}22457759093143x^2 + 1{,}03421734009193x - 0{,}310840017596257$ | $0{,}812 \le x \le 1{,}06$ |
| 4 | $-1{,}93019569517385x^3 + 6{,}32988745272971x^2 - 6{,}97351560618888x + 2{,}51855895675630$ | $1{,}06 \le x \le 1{,}2$ |
| 5 | $-0{,}811772453868676x^3 + 2{,}30356378403107x^2 - -2{,}14192720375051x + 0{,}585923595780948$ | $1{,}2 \le x \le 1{,}48$ |
| 6 | $0{,}0264110530812045x^3 - 1.4179709868264x^2 + 3{,}36594425711854x - 2.13129299158112$ | $1{,}48 \le x \le 2$ |
| 7 | $-0{,}0814882784482223x^3 - 0{,}770574997649839x^2 + 2{,}0711522787654x - 1{,}2680983393457$ | $2 \le x \le 3$ |
| 8 | $1{,}93493269524785x^3 - 18{,}9183637609145x^2 + 56{,}5145185685595x - 55{,}711464629139$ | $3 \le x \le 3{,}7$ |
| 9 | $-5{,}04588087247053x^3 + 58{,}5686668407595x^2 - 230{,}187494657634x + 297{,}887685016499$ | $3{,}7 \le x \le 4$ |
| 10 | $1{,}12234543903052x^3 - 15{,}4500488972531x^2 + 65{,}8873682944158x - 96{,}8787989195676$ | $4 \le x \le 5$ |
| 11 | $0{,}57858562689365x^3 - 7{,}29365171520001x^2 + 25{,}1053823841506x - 28{,}9088224024589$ | $5 \le x \le 5{,}5$ |
| 12 | $5{,}52727178423886x^3 - 88{,}9469733113961x^2 + 474{,}198651163229x - 852{,}246481830769$ | $5{,}5 \le x \le 5{,}83$ |
| 13 | $-9{,}75694029407555x^3 + 178{,}373895938323x^2 - 1084{,}28201656263x + 2176{,}40094911649$ | $5{,}83 \le x \le 6$ |
| 14 | $-1{,}20415358204686x^3 + 24{,}423735121806x^2 - 160{,}581051663535x + 328{,}999019318292$ | $6 \le x \le 7$ |
| 15 | $-0{,}440671301614456x^3 + 8{,}3906072327261x^2 - 48{,}3491564399719x + 67{,}1245971299793$ | $7 \le x \le 8{,}19$ |
| 16 | $0{,}534044341112367x^3 - 15{,}5581561090719x^2 + 147{,}791215329354x - 468{,}338617800281$ | $8{,}19 \le x \le 9$ |
| 17 | $-0{,}590803227386267x^3 + 14{,}8127282403912x^2 - 125{,}546743815814 + 351{,}675259635223$ | $9 \le x \le 9{,}5$ |
| 18 | $3{,}29050149024139x^3 - 95{,}8044562119968x^2 + 925{,}316508481873x - 2976{,}05837264078$ | $9{,}5 \le x \le 10{,}4$ |

| $i$ | $f_i(x)$ | Subinterval |
|---|---|---|
| 19 | $-7{,}87386202588098x^3 + 252.523685491021x^2 - 2697{,}29616522951x + 9582{,}33222955868$ | $10{,}4 \leq x \leq 11$ |
| 20 | $4{,}17552201349083x^3 - 145.105987808249x^2 + 1676{,}63024106245x - 6455{,}39792684519$ | $11 \leq x \leq 11{,}5$ |
| 21 | $5{,}22256461524858x^3 + 179{,}128000883261x^2 - 2052{,}06062888991x + 7837{,}91707463886$ | $11{,}5 \leq x \leq 12$ |
| 22 | $13{,}5147364475035x^3 - 495{,}414837375814x^2 + 6042{,}45343021899x - 24540{,}1391617967$ | $12 \leq x \leq 12{,}5$ |
| 23 | $-4{,}18948345709147x^3 + 168{,}493409046498x^2 - 2256{,}3996500599x + 10038{,}4153393653$ | $12{,}5 \leq x \leq 12{,}9$ |
| 24 | $2{,}71188703990896x^3 - 98{,}5896291874191x^2 + 1188{,}97154315762x - 4776{,}68079147004$ | $12{,}9 \leq x \leq 13{,}2$ |
| 25 | $-3{,}4825065396061x^3 + 146{,}708356561379x^2 - 2048{,}96186872651x + 9470{,}22622082017$ | $13{,}2 \leq x \leq 14$ |
| 26 | $-0{,}401351601605303x^3 + 17{,}2998491653435x^2 - 237{,}242765182015x + 1015{,}53707094584$ | $14 \leq x \leq 15$ |
| 27 | $-6{,}63956896505029x^3 + 298{,}019630520368x^2 - 4448{,}03948550738x + 22069{,}5206725727$ | $15 \leq x \leq 15{,}5$ |
| 28 | $-2{,}76964285802216x^3 + 118{,}06806654356x^2 - 1658{,}79024386686x + 7658{,}3995907633$ | $15{,}5 \leq x \leq 15{,}6$ |
| 29 | $28{,}2547413795226x^3 - 1333{,}87311577353x^2 + 20991{,}4922002798x - 110123{,}069118799$ | $15{,}6 \leq x \leq 15{,}7$ |
| 30 | $5{,}1246613300341x^3 - 244{,}446345442627x^2 + 3887{,}49190608456x - 20612{,}1342458442$ | $15{,}7 \leq x \leq 15{,}9$ |




**Gambar 2**. Kurva perbandingan hasil interpolasi *spline* kubik dengan data sebenarnya

Gambar 2 menunjukkan bahwa nilai hasil perkiraan dengan interpolasi *spline* kubik mendekati nilai aslinya dengan galat atau selisih antara nilai asli dengan nilai perkiraan yang cukup kecil.

Langkah terakhir adalah menghitung galat pada beberapa titik. Berikut ini adalah perbandingan antara nilai sebenarnya dan nilai hasil interpolasi *spline* kubik dari beberapa titik.

**Tabel 4**. Nilai Galat pada Beberapa Titik

| $x$ | $f(x)$ | Nilai Asli | Galat Mutlak | Galat Relatif (%) |
|---|---|---|---|---|
| 1,75 | -0,44 | -0,45 | 0,01 | 2,22 |
| 2,26 | -1,464 | -1,5 | 0,036 | 2,4 |
| 2,5 | -2,18 | -2,2 | 0,02 | 0,9 |
| 2,76 | -3,13 | -3,21 | 0,08 | 2,5 |
| 3,27 | -5,54 | -5,37 | 0,17 | 3,17 |
| 3,86 | -8,19 | -8,18 | 0,01 | 0,12 |
| 4,2 | -9,54 | -9,64 | 0,1 | 1,038 |
| 4,5 | -10,98 | -11,2 | 0,22 | 1,96 |
| 4,75 | -12,22 | -12,3 | 0,08 | 0,65 |
| 5,25 | -14,41 | -14,4 | 0,01 | 0,07 |
| 5,5 | -14,59 | -14,6 | 0,01 | 0,07 |
| 6,26 | -14,53 | -14,68 | 0,15 | 1,02 |
| 6,5 | -13,57 | -13,88 | 0,31 | 2,23 |
| 7,25 | -10,3 | -10,24 | 0,06 | 0,586 |
| 7,5 | -9,43 | -9,3 | 0,13 | 1,4 |
| 7,76 | -8,72 | -8,54 | 0,18 | 2,1 |
| 8,01 | -8,28 | -8,17 | 0,11 | 1,35 |
| 8,5 | -8,22 | -8,31 | 0,09 | 1,08 |
| 8,75 | -8,57 | -8,61 | 0,04 | 0,47 |
| 9,2 | -9,657 | -9,51 | 0,147 | 1,546 |
| 9,76 | -11,85 | -11,71 | 0,14 | 1,2 |
| 10 | -12,84 | -12,51 | 0,33 | 2,64 |
| 10,5 | -13,52 | -13,53 | 0,01 | 0,074 |
| 11,3 | -13,21 | -13,17 | 0,04 | 0,3 |
| 12,3 | -20,14 | -19,47 | 0,67 | 3,44 |
| 13,5 | -21,43 | -21,3 | 0,13 | 0,61 |
| 13,8 | -18,59 | -18,2 | 0,39 | 2,14 |
| 14,5 | -10,76 | -11,2 | 0,44 | 3,93 |
| 14,8 | -7,4 | -7,6 | 0,2 | 2,63 |
| 15,2 | -3,11 | -3 | 0,11 | 3,7 |
| | | | MAPE | 1,58 |

Diperoleh nilai MAPE sebesar 1,58%. Berdasarkan kategori nilai MAPE, hasil perkiraan kedalaman laut dengan interpolasi *spline* kubik tergolong sangat baik.

## KESIMPULAN

Interpolasi *spline* kubik merupakan metode interpolasi yang digunakan untuk mengatasi kekurangan dari interpolasi polinomial yang dapat menimbulkan *Runge's Phenomenon* atau osilasi yang besar pada subinterval tertentu. Interpolasi *spline* kubik memastikan fungsi, turunan pertama, dan turunan keduanya kontinu pada setiap titik dalam agar kurva yang dihasilkan *smooth* dan tidak ada osilasi yang besar pada subinterval tertentu sehingga diharapkan galat interpolasi yang dihasilkan relatif kecil.

Pada penelitian ini, data yang digunakan adalah data kedalaman laut di perairan antara Teluk Suak dan Pulau Lemukutan dengan titik-titiknya di sepanjang garis lurus yang menghubungkan Teluk Suak dan Pulau Lemukutan. Titik terdalam di perairan tersebut adalah 23,67 meter.

Berdasarkan hasil interpolasi *spline* kubik untuk memperkirakan kedalaman laut antara Teluk Suak dan Pulau Lemukutan, diperoleh nilai MAPE sebesar 1,58% sehingga hasil interpolasi *spline* kubik terbilang sangat baik. Kelebihan dari metode interpolasi *spline* kubik adalah tidak menghasilkan osilasi yang besar pada subinterval tertentu dan kurva yang dihasilkan *smooth*. Namun, interpolasi *spline* kubik juga memiliki kekurangan, yaitu apabila jarak antar variable bebasnya sangat besar, maka kurva yang dihasilkan juga dapat melenceng dari yang seharusnya. Pada artikel ini, metode interpolasi *spline* kubik hanya sebatas pada data dua dimensi atau dengan satu variabel bebas saja. Harapan kedepannya, metode interpolasi *spline* kubik dapat digunakan untuk objek atau data geospasial lainnya, seperti data kandungan suatu unsur di permukaan tanah, data ketinggian, data sebaran panas, dan lain sebagainya. Selain itu, penulis juga berharap dapat mengkombinasikan metode interpolasi *spline* kubik dengan metode lainnya agar hasil yang didapatkan lebih valid.

## REFERENSI

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). *Numerical Analysis* (9 ed.). Richard Stratton.

Chikwendu, C. R., Oduwole, H. K., & Okoro, S. I. (2015). An Application of Spline and Piecewise Interpolation to Heat Transfer (Cubic Case). *Mathematical Theory and Modeling*. Vol. 5(6), 28–39.

Epperson, J. F. (2013). *An Introduction to Numerical Methods and Analysis* (7 ed.). John Wiley & Sons, Inc.

Erfianto, B., & Setiawan, A. H. (2020). Interpolasi Cubic Spline untuk Memetakan Distribusi Panas pada Permukaan Panel Sel Surya. *ELKOMIKA: Jurnal Teknik Energi Elektrik, Teknik Telekomunikasi, & Teknik Elektronika*. Vol. 8(3), 467–476. https://doi.org/10.26760/elkomika.v8i3.467

Gandha, G. I. (2021). The modelling of nonlinear distance sensor using piecewise newton polynomial with vertex algorithm. *JURNAL INFOTEL*. Vol. 13(3), 160–166. https://doi.org/10.20895/infotel.v13i3.67.

Lewis, C. D. (1982). *Industrial and Business Forecasting Methods: A Practical Guide to Exponential Smoothing and Curve Fitting*. Butterworth Scientific. https://books.google.co.id/books?id=t8W4AAAAIAAJ

Lillesand, T. M., Kiefer, R. W., & Chipman, J. W. (2015). *Remote Sensing and Image Interpretation*.

Nur, I. R., Syamsidik, S., & Syahreza, S. (2021). Pemanfaatan Citra Satelit Google Earth untuk Penilaian Progres Pemulihan Lahan Pasca 15 Tahun Tsunami Aceh di Kecamatan Lhoong, Aceh Besar. *Jurnal Rekayasa Elektrika*. Vol. 17(1), 62–69. https://doi.org/10.17529/jre.v17i1.19402

Pambuko, D. M., Umbara, R. F., & Telekomunikasi Terusan Buah Batu Bandung, J. (2013). *Identifikasi Kedalaman Laut (Bathymetry) berdasarkan Warna Permukaan Laut pada Citra Satelit menggunakan Metode ANFIS*. Vol. 9(2).

Purwati, N. K. R., & Erawati, N. K. (2020). *Pengantar Metode Numerik*. Klik Media.

Roe, D. R., & Brooks, B. R. (2021). Improving the speed of volumetric density map generation via cubic spline interpolation. *Journal of Molecular Graphics and Modelling*. Vol. 104, 1–6. https://doi.org/10.1016/j.jmgm.2021.107832

Sofiyani, S., & Permanasari, Y. (2023). Penerapan Metode Cubic Spline Interpolation untuk Menentukan Peluang Kematian pada Tabel Mortalita. *Jurnal Riset Matematika*. 29–36. https://doi.org/10.29313/jrm.v3i1.1735

Visca, A. S., Syafwan, M., & Putri, A. R. (2019). Interpolasi Splin Kubik Terapit. *Jurnal Matematika UNAND*. Vol. VIII (2).