



## ANALISIS KESTABILAN MODEL SI UNTUK PENYAKIT MENULAR DENGAN ADANYA TRANSMISI VERTIKAL DAN TINGKAT KEJADIAN JENUH

<sup>1</sup>Ana Rizki Mahmudah, <sup>1a</sup>Muhammad Ahsar Karim,  
<sup>1a</sup>Yuni Yulida

<sup>1</sup>Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lambung Mangkurat

<sup>a</sup>Kelompok Keahlian: Matematika Lingkungan dan Industri

Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan

email: [anarzkimhmdh@gmail.com](mailto:anarzkimhmdh@gmail.com)

### ABSTRACT

The transmission of infectious diseases can occur through two pathways: horizontal and vertical. Horizontal transmission occurs through direct or indirect physical contact with the infectious agent, while vertical transmission takes place when an infected mother transmits the disease to a fetus or a newborn. Within the context of disease transmission models, a critical feature is the saturation incidence rate, which refers to the impact of interventions that can reduce the rate of disease transmission among susceptible and infected individuals. This research aims to elucidate the formation of a model, determine equilibrium points, and calculate the basic reproduction number using the Next Generation Matrix method. The analysis involves assessing local stability through linearization methods and global stability using Lyapunov functions. Sensitivity analysis is conducted on the basic reproduction number, and numerical simulations are performed using the fourth-order Runge-Kutta method. The research findings indicate the establishment of an SIS (Susceptible-Infected) model for infectious diseases with vertical transmission and saturation incidence. This model depicts the spread of the disease in a population, where individuals can exist in susceptible or infected conditions. Equilibrium points include a disease-free equilibrium that is locally and globally stable when the basic reproduction number is less than one, and an endemic equilibrium that is locally and globally stable when the basic reproduction number exceeds one. Sensitivity analysis reveals that each parameter has varying influences on the basic reproduction number. An increase in the saturation incidence rate leads to a decrease in the number of infected subpopulations, while an increase in the vertical transmission rate results in a similar decline. Numerical simulations support stability analyses at equilibrium points. These findings provide a deeper understanding of the factors influencing the spread of diseases within a population.

**Keywords:** Mathematical Model, Vertical Transmission, Saturated Incidence Rate, Stability Analysis, Sensitivity Analysis.

### ABSTRAK

Penularan penyakit menular dapat terjadi melalui dua jalur, yaitu secara horizontal dan vertikal. Penularan horizontal terjadi melalui kontak fisik langsung atau tidak langsung dengan agen infeksi, sedangkan penularan vertikal terjadi ketika ibu yang terinfeksi menularkan penyakit kepada janin atau bayi yang baru lahir. Dalam konteks model penularan penyakit, fitur kritis adalah tingkat kejadian jenuh, yang merujuk pada dampak tindakan yang dapat mengurangi laju penularan penyakit di antara individu rentan dan terinfeksi. Penelitian ini bertujuan menjelaskan pembentukan model, menentukan titik keseimbangan dan bilangan reproduksi dasar dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix*. Analisis dilakukan terhadap kestabilan lokal dengan metode linearisasi dan kestabilan global dengan menggunakan fungsi Lyapunov. Sensitivitas analisis dilakukan terhadap

bilangan reproduksi dasar, dan simulasi numerik dijalankan menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat. Hasil penelitian menunjukkan pembentukan model SIS (*Susceptible-Infected*) untuk penyakit menular dengan transmisi vertikal dan tingkat kejadian jenuh. Model ini menggambarkan penyebaran penyakit dalam populasi, di mana individu dapat berada dalam kondisi rentan atau terinfeksi. Titik keseimbangan meliputi titik keseimbangan bebas penyakit yang stabil secara lokal dan global ketika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, serta titik keseimbangan endemik yang stabil secara lokal dan global ketika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu. Analisis sensitivitas menunjukkan bahwa setiap parameter memiliki pengaruh yang bervariasi terhadap bilangan reproduksi dasar. Peningkatan tingkat kejadian jenuh mengakibatkan penurunan jumlah subpopulasi terinfeksi, sementara peningkatan tingkat transmisi vertikal menyebabkan penurunan yang serupa. Simulasi numerik mendukung analisis kestabilan pada titik keseimbangan. Temuan ini memberikan pemahaman lebih mendalam tentang faktor-faktor yang memengaruhi penyebaran penyakit dalam suatu populasi.

**Kata Kunci:** Model Matematika, Transmisi Vertikal, Tingkat Kejadian Jenuh, Analisis Kestabilan, Analisis Sensitivitas.

Received: 13 November 2023, Accepted: 30 November 2023, Published: 1 Desember 2023

## PENDAHULUAN

Penyakit menular adalah penyakit yang dapat ditularkan atau berpindah dari satu orang ke orang lain atau hewan ke seseorang, baik secara langsung maupun melalui perantara (Irwan, 2016). Permasalahan penyebaran penyakit menular tidak hanya melalui jalur horizontal, tetapi juga melalui jalur vertikal sehingga mempersulit pengendalian penyakit tersebut. Penularan horizontal mengacu pada penularan penyakit melalui kontak fisik langsung (manusia ke manusia) atau tidak langsung (vektor ke manusia) dengan agen infeksi, sedangkan penularan vertikal mengacu pada penularan penyakit melalui transfer langsung infeksi dari ibu ke embrio selama kehamilan atau saat kelahiran anak. Dengan kata lain, penularan vertikal adalah penularan langsung penyakit dari orang tua yang terinfeksi kepada janin atau bayi baru lahir (Li *et al.*, 2001).

Salah satu fitur penting dalam model penularan penyakit adalah tingkat kejadian, yang didefinisikan sebagai jumlah kasus baru penyakit per satuan waktu dalam populasi tertentu (Hethcote, 2000). Tingkat kejadian penyakit diatur oleh interaksi antara individu yang rentan dan terinfeksi dalam suatu populasi. Tingkat kejadian jenuh adalah efek dari faktor kejenuhan atau *crowded*, yaitu ketika jumlah individu terinfeksi meningkat atau mencapai titik jenuh maka laju infeksi semakin menurun ditandai dengan adanya tindakan perlindungan terhadap individu yang rentan dan terinfeksi yang dinyatakan dengan konstanta jenuh (Suryani & Yuenita, 2016).

Penelitian yang membahas mengenai pemodelan matematika untuk penularan penyakit diantaranya dilakukan oleh Jiao *et al.*, (2016) meneliti model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) dengan menggambarkan penyebaran penyakit yang ditularkan secara vertikal antara dua wilayah yang terhubung dengan adanya

penyebaran impulsif. Kelatlhegile dan Kgosimore (2016) meneliti model matematika deterministik untuk pencegahan penyakit menular horizontal dan vertikal pada individu dalam populasi dengan ukuran yang bervariasi. Selanjutnya, Alzahrani *et al.*, (2020) menyajikan model matematika dengan strategi intervensi kontrol yang optimal untuk infeksi virus Zika dengan mutasi, yang menyebabkan komplikasi serius pada kelahiran baru dari ibu yang terinfeksi. Berdasarkan uraian tersebut, penulis mengkaji dan memaparkan penelitian (Adepoju & Olaniyi, 2021). Pada penelitian ini dipertimbangkan adanya efek perilaku pada populasi rentan dan infeksi ketika penularannya meningkat dan menyajikan kontrol optimal tetapi belum menyajikan analisis kestabilan lokal pada titik ekuilibrium. Pada artikel ini, penulis menambahkan analisis kestabilan lokal di titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik serta menyajikan simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat. Kemudian, pada simulasi juga diperlihatkan pengaruh tingkat transmisi vertikal dan tingkat kejadian jenuh terhadap perubahan populasi.

## TINJAUAN PUSTAKA

### 1. Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear dan titik ekuilibrium

Menurut Braun (2013), bentuk dari sistem persamaan diferensial nonlinear dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

terdapat  $f_i(x)$  untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, n$  merupakan fungsi nonlinier,

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ dan } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Titik ekuilibrium atau sering dikenal dengan titik kesetimbangan. Menurut Wiggins (2003), definisi titik ekuilibrium sebagai berikut.

#### Definisi 1

Titik ekuilibrium dari Sistem (1) adalah  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  sedemikian sehingga  $f(\hat{x}) = \mathbf{0}$ , yaitu solusi yang tidak berubah terhadap waktu.

### 2. Bilangan Reproduksi Dasar

Menurut Driessche dan Watmough (2002), Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*) dinotasikan dengan  $R_0$  adalah jumlah rata-rata individu infeksi sekunder akibat tertular individu infeksi primer yang masuk sepenuhnya ke dalam subpopulasi rentan (*Susceptible*).

Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menggunakan Metode *Next Generation Matriks* (Annas *et al.*, 2020). Misalkan diberikan  $a \in \mathbb{N}$  adalah banyaknya subpopulasi yang terinfeksi atau terpapar dan  $b \in \mathbb{N}$  adalah banyaknya subpopulasi yang tidak terinfeksi. Kemudian, dimisalkan  $x$  adalah subpopulasi

yang terinfeksi dan  $\mathbf{y}$  adalah subpopulasi tidak terinfeksi, dengan  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^a$  dan  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^b$ , sedemikian sehingga

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathcal{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3)$$

Selanjutnya,  $(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{y}})$  dapat dituliskan sebagai titik ekuilibrium bebas penyakit untuk Persamaan (2) dan (3), yang memenuhi  $\mathcal{F}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$  dan  $\mathcal{V}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$ . Kemudian, dari Persamaan (2), kemudian diperoleh linearisasi dari subpopulasi  $\mathbf{x}$  adalah  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{DF} - \mathbf{DV})\mathbf{x}$ . Selanjutnya,  $\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Big|_{(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{y}})}$  dan  $\mathbf{V} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}}\right)\Big|_{(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{y}})}$  merupakan matriks Jacobian di titik ekuilibrium bebas penyakit dari  $\mathbf{DF} = \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}}\right]$  dan  $\mathbf{DV} = \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}}\right]$ . Sehingga, diperoleh bentuk *Next Generation Matrix* adalah  $\mathbf{G} = \mathbf{FV}^{-1}$ . Bilangan Reproduksi Dasar merupakan nilai eigen dominan dari matriks  $\mathbf{G}$  (Jamil *et al.*, 2023)

### 3. Kriteria Routh-Hurwitz dan Jenis Kestabilan

Martcheva (2015) memberikan teorema tentang kriteria Routh-Hurwitz sebagai berikut.

**Teorema 2** (Martcheva, 2015)

*Diberikan persamaan polinomial karakteristik berderajat  $n$  dengan koefisien real konstan sebagai berikut,*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (3)$$

*dengan  $a_i$  bilangan real  $i = 1, 2, \dots, n$ . Persamaan (3) oleh Routh-Hurwitz didefinisikan sebagai  $n$  matriks menggunakan koefisien  $a_i$  dari polinomial sebagai berikut.*

$$\mathbf{H}_1 = (a_1), \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{H}_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

*dengan  $a_i = 0$  jika  $i > n$ . Semua akar-akar polinomial  $P(\lambda)$  bernilai negatif atau memiliki bagian real yang negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz bernilai positif atau  $\text{Det}(\mathbf{H}_i) > 0$ ; untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .*

Menurut Bellomo dan Preziosi (1995) untuk menentukan jenis kestabilan lokal sistem yang dilinierisasi digunakan teorema sebagai berikut.

**Teorema 3** (Bellomo & Preziosi, 1995)

*Jika  $\lambda_i$  merupakan nilai eigen dari suatu matriks Jacobian  $n \times n$  di titik kesetimbangan  $\hat{\mathbf{x}}$  dan  $\text{Re}(\lambda_i)$  merupakan bagian real dari  $\lambda_i$  maka,*

- a. *Jika untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  maka  $\hat{\mathbf{x}}$  stabil asimtotik.*
- b. *Jika terdapat  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$  untuk suatu  $i$  maka  $\hat{\mathbf{x}}$  tidak stabil.*

#### 4. Fungsi Lyapunov

Untuk menganalisis sifat kestabilan global di titik ekuilibrium pada Persamaan (1) diberikan teorema dari Wiggins (2003) merupakan analisis kestabilan untuk seluruh domain yang diselidiki, sebagai berikut.

**Teorema 4** (Wiggins, 2003)

Misalkan  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  merupakan titik ekuilibrium dari Persamaan (1) dan  $L: \Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  merupakan suatu fungsi dan turunan parsial pertamanya kontinu di  $\hat{x}$  yaitu:

- i.  $L(\hat{x}) = 0$  dan  $L(\hat{x}) > 0$  untuk setiap  $x \neq \hat{x}$  serta  $\frac{dL}{dt}(x) \leq 0$  pada  $\Gamma - \{\hat{x}\}$ , maka  $\hat{x}$  stabil global.
- ii.  $L(\hat{x}) = 0$  dan  $L(\hat{x}) > 0$  untuk setiap  $x \neq \hat{x}$  serta  $\frac{dL}{dt}(x) < 0$  pada  $\Gamma - \{\hat{x}\}$ , maka  $\hat{x}$  stabil asimtotik global.

#### 5. Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas dilakukan untuk mengetahui pengaruh perubahan parameter-parameter terhadap Bilangan Reproduksi Dasar.

**Definisi 5** (Chitnis *et al.*, 2008)

Indeks sensitivitas yang ternormalisasi dari Bilangan Reproduksi Dasar bergantung pada diferensial parameter  $p$ , yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\Upsilon_p^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial p} \times \frac{p}{R_0} \quad (5)$$

Dengan

- $\Upsilon$  : Indeks sensitivitas
- $p$  : Parameter yang ada pada rumus bilangan reproduksi dasar
- $R_0$  : Bilangan Reproduksi Dasar

### METODE PENELITIAN

Model SI (*Suceptible -Infected*) orang yang tertular akan mengalami infeksi seumur hidup. Misalnya, herpes adalah penyakit menular seumur hidup. Penelitian ini diawali dengan menjelaskan pembentukan model SI untuk penyakit menular dengan memperhatikan adanya transmisi vertikal dan tingkat kejadian jenuh, menentukan daerah penyelesaian model, dan menentukan titik ekuilibrium pada model berdasarkan Definisi 1 serta menentukan Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) menggunakan metode *Next Generation Matrix*. Kemudian Menentukan kestabilan lokal di titik ekuilibrium dengan menggunakan metode linearisasi dan kestabilan global titik ekuilibrium menggunakan fungsi Lyapunov. Selanjutnya, menentukan indeks sensitivitas parameter dari bilangan reproduksi dasar dengan menggunakan

Definisi 8 serta membuat simulasi numerik metode Runge-Kutta Orde Empat dan menginterpretasikan solusi numerik yang diperoleh.

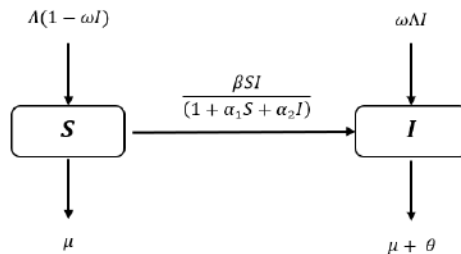
## HASIL DAN PEMBAHASAN

### 1. Pembentukan Model

Pembentukan model SI untuk penyakit menular dengan penularan melalui jalur vertikal dan memperhatikan tingkat kejadian jenuh dapat dikelompokkan menjadi dua Subpopulasi, yaitu subpopulasi *susceptible* (rentan), dinotasikan dengan  $S(t)$  menyatakan jumlah individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi penyakit menular pada saat  $t$ , dan subpopulasi *infected* (terinfeksi), dinotasikan dengan  $I(t)$  menyatakan jumlah individu yang terinfeksi penyakit menular pada saat  $t$ .

Adapun asumsi-asumsi yang digunakan pada model ini yaitu, jumlah pertambahan individu baru yaitu berupa kelahiran dari subpopulasi terinfeksi akan menjadi individu yang terinfeksi melalui penularan/transmisi secara vertikal sedangkan jumlah kelahiran yang terjadi selain dari subpopulasi terinfeksi akan menjadi individu yang rentan. Kemudian, individu yang terinfeksi penyakit dapat mengalami kematian akibat penyakit tersebut dan individu dari subpopulasi rentan dan terinfeksi dapat mengalami kematian secara alami. Selanjutnya, laju penularan penyakit antara subpopulasi rentan dan terinfeksi berdasarkan (Adepoju & Olaniyi, 2021), (Abta *et al.*, 2012), (Lahrouz *et al.*, 2011) berbentuk  $\frac{\beta SI}{(1+\alpha_1 S+\alpha_2 I)}$  dengan  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  konstanta saturasi (jenuh). Ini merupakan bentuk perumuman dari  $\beta SI$  yaitu ketika  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Laju penularan  $\frac{\beta SI}{(1+\alpha_1 S+\alpha_2 I)}$  dalam model ini berarti bahwa  $\beta SI$  untuk mengukur infeksi penyakit akibat interaksi subpopulasi rentan dan terinfeksi sedangkan  $\frac{1}{(1+\alpha_1 S+\alpha_2 I)}$  adalah efek penghambatan perilaku dari individu subpopulasi rentan dan terinfeksi ketika jumlah infeksi meningkat.

Berikut disajikan Gambar 1 yang merupakan diagram alir model SI untuk penyakit menular dengan transmisi vertikal dan tingkat kejadian jenuh.



**Gambar 1.** Diagram alir model SI untuk penyakit menular dengan transmisi vertikal dan tingkat kejadian jenuh

Variabel dan parameter – parameter yang digunakan pada model ini yaitu

$S(t)$  : Jumlah subpopulasi rentan pada saat  $t$

- $I(t)$  : Jumlah subpopulasi yang terinfeksi pada saat  $t$
- $\beta$  : Laju penularan penyakit
- $\omega$  : Tingkat transmisi vertikal
- $\Lambda$  : Tingkat kelahiran
- $\alpha_1, \alpha_2$  : Konstanta saturasi (jenuh)
- $\mu$  : Laju kematian alami
- $\theta$  : Laju kematian akibat penyakit

Model SI untuk penyakit menular dengan transmisi vertikal dan tingkat kejadian jenuh (Adepoju & Olaniyi, 2021), yang berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \omega \Lambda I - \frac{\beta SI}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} - \mu S \quad (6)$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega \Lambda I + \frac{\beta SI}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} - (\mu + \theta) I \quad (7)$$

Total populasi pada saat  $t$  dinyatakan sebagai jumlah subpopulasi *susceptible* dan *infected* pada saat  $t$  dan dinotasikan dengan  $N(t)$ . Secara matematis  $N(t)$  dapat dinyatakan  $N(t) = S(t) + I(t)$ , sehingga perubahan total populasi terhadap waktu dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} \quad (8)$$

## 2. Daerah Penyelesaian Model

Persamaan (8) dapat dinyatakan

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = \Lambda - \theta I - \mu N \leq \Lambda - \mu N \quad (9)$$

Persamaan (9) merupakan pertidaksamaan. Jika diambil untuk tanda sama dengan maka Persamaan (9) adalah persamaan diferensial biasa orde satu yang dapat ditentukan penyelesaian melalui pemisahan variabel yaitu

$$N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{Ke^{-\mu t}}{\mu}$$

Untuk  $t \rightarrow \infty$  maka nilai  $Ke^{-\mu t}$  akan semakin kecil akibatnya  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{Ke^{-\mu t}}{\mu} \right) = \frac{\Lambda}{\mu}$ . Karena  $N(t)$  paling besar bernilai  $\frac{\Lambda}{\mu}$ , maka diperoleh  $N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$  yang menunjukkan batas jumlah populasi. Sehingga daerah penyelesaian model dinyatakan  $\Gamma$  adalah

$$\Gamma = \left\{ (S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2 : N(t) = S(t) + I(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\} \quad (10)$$

### 3. Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar

Berdasarkan Definisi 1, titik ekuilibrium pada Persamaan (6) dan (7) dapat ditentukan dengan menyelesaikan  $\frac{dS}{dt} = 0$  dan  $\frac{dI}{dt} = 0$  secara simultan. Titik ekuilibrium pertama diperoleh  $E_0(S_0, I_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$  yang disebut sebagai titik ekuilibrium bebas penyakit.

Selanjutnya, bilangan reproduksi dasar ditentukan menggunakan metode *Next Generation Matrix*. Berdasarkan Persamaan (2), bagian pertama dapat dinyatakan sebagai  $\frac{dI}{dt} = \mathcal{F}(S, I) - \mathcal{V}(S, I)$ , dengan  $\mathcal{F}(S, I) = \left[\frac{\beta SI}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)}\right]$  dan  $\mathcal{V}(S, I) = [(\mu + \theta)I - \omega \Lambda I]$ . Kemudian, matriks Jacobian  $\mathcal{F}(S, I)$  dan  $\mathcal{V}(S, I)$  dapat dinyatakan sebagai

$$D\mathcal{F}(S, I) = \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial I}\right] = \left[\frac{\beta S + \beta \alpha_1 S^2}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2}\right], D\mathcal{V}(S, I) = \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial I}\right] = [\mu + \theta - \omega \Lambda]$$

Selanjutnya, titik ekuilibrium bebas penyakit disubstitusi ke  $D\mathcal{F}$  dan  $D\mathcal{V}$  diperoleh  $F$  dan  $V$  yaitu  $F = \frac{\beta \Lambda}{\mu + \alpha_1 \Lambda}$ ,  $V = \mu + \theta - \omega \Lambda$ . Setelah itu, diperoleh *Next Generation Matrix* dengan bentuk  $G = FV^{-1} = \left[\frac{\beta \Lambda}{(\mu + \alpha_1 \Lambda)(\mu + \theta - \omega \Lambda)}\right]$ . Sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar  $R_0 = \frac{\beta \Lambda}{(\mu + \alpha_1 \Lambda)(\mu + \theta - \omega \Lambda)}$ .

Selanjutnya, titik ekuilibrium kedua dari model diperoleh  $E^* = (S^*, I^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{(\mu + \theta)I^*}{\mu}, \frac{(R_0 - 1)\Lambda(\mu + \alpha_1 \Lambda)}{(\mu + \theta)[\mu R_0 + \alpha_1 \Lambda(R_0 - 1)] + \alpha_2 \mu \Lambda}\right)$  yang disebut sebagai titik ekuilibrium endemik.

### 4. Analisis Kestabilan Lokal di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Matriks Jacobian dari Persamaan (6) dan (7) dinyatakan sebagai

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I + \beta \alpha_2 I^2}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} - \mu & \frac{\beta I + \beta \alpha_2 I^2}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} \\ -\omega \Lambda - \frac{\beta S + \beta \alpha_1 S^2}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} & \omega \Lambda + \frac{\beta S + \beta \alpha_1 S^2}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)^2} - (\mu + \theta) \end{pmatrix}$$

Matriks Jacobian di titik ekuilibrium bebas penyakit dapat dinyatakan sebagai berikut

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ \frac{(-\omega \mu - \omega \alpha_1 \Lambda - \beta)\Lambda}{\mu + \alpha_1 \Lambda} & \frac{(\omega \mu + \omega \alpha_1 \Lambda + \beta - \alpha_1 \mu - \alpha_1 \theta)\Lambda - \mu(\mu + \theta)}{\mu + \alpha_1 \Lambda} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Teorema 2, diperoleh persamaan karakteristik yaitu

$$\begin{vmatrix} J_{E_0} - \lambda I & \\ \frac{-\mu - \lambda}{\mu + \alpha_1 \Lambda} & \frac{0}{\mu + \alpha_1 \Lambda} \\ \frac{(-\omega \mu - \omega \alpha_1 \Lambda - \beta)\Lambda}{\mu + \alpha_1 \Lambda} & \frac{(\omega \mu + \omega \alpha_1 \Lambda + \beta - \alpha_1 \mu - \alpha_1 \theta)\Lambda - \mu(\mu + \theta)}{\mu + \alpha_1 \Lambda} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$



Nilai eigen dari Persamaan (11) adalah  $\lambda_1 = -\mu < 0$  dan  $\lambda_2 = \frac{(\omega\mu + \omega\alpha_1\Lambda + \beta - \alpha_1\mu - \alpha_1\theta)\Lambda - \mu(\mu + \theta)}{\mu + \alpha_1\Lambda} = (\mu + \theta - \omega\Lambda)(R_0 - 1) < 0$ , jika  $R_0 < 1$  dan  $\mu + \theta > \omega\Lambda$ . Kemudian, berdasarkan Teorema 3 titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$  stabil asimtotik lokal.

### 5. Analisis Kestabilan Lokal di Titik Ekuilibrium Endemik

Matriks Jacobian di persekitaran titik ekuilibrium endemik ( $E^*$ ) adalah

$$J_{E^*} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I^* + \beta \alpha_2 I^{*2}}{(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)^2} - \mu & \frac{\beta I^* + \beta \alpha_2 I^{*2}}{(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)^2} \\ -\omega\Lambda - \frac{\beta S^* + \beta \alpha_1 S^{*2}}{(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)^2} & \omega\Lambda + \frac{\beta S^* + \beta \alpha_1 S^{*2}}{(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)^2} - (\mu + \theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -p - \mu & p \\ -\omega\Lambda - q & \omega\Lambda + q - (\mu + \theta) \end{pmatrix}$$

dengan

$$p = \frac{\beta I^* + \beta \alpha_2 I^{*2}}{(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)^2} > 0 \text{ dan } q = \frac{\beta S^* + \beta \alpha_1 S^{*2}}{(1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*)^2} > 0$$

Persamaan karakteristik  $J_{E^*}$  sebagai berikut

$$\begin{vmatrix} -p - \mu - \lambda & p \\ -\omega\Lambda - q & \omega\Lambda + q - (\mu + \theta) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  ditentukan melalui persamaan berikut

$$(-p - \mu - \lambda)(\omega\Lambda + q - (\mu + \theta) - \lambda) - p(-\omega\Lambda - q) = 0$$

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

Dengan  $a_1 = p + 2\mu - \omega\Lambda - q + \theta$  dan  $a_2 = (\mu + \theta)(p + \mu) - \mu(\omega\Lambda + q)$

Berdasarkan Kriteria Routh-Hurwitz pada Teorema 2, dapat dibuktikan bahwa  $Re(\lambda_1, \lambda_2) < 0$  dengan syarat  $R_0 > 1, p + 2\mu + \theta > \omega\Lambda + q$ , dan  $(\mu + \theta)(p + \mu) > \mu(\omega\Lambda + q)$ . Kemudian karena  $Re(\lambda_1, \lambda_2)$  bernilai negatif maka berdasarkan Teorema 3 titik ekuilibrium endemik  $E^*$  stabil asimtotik lokal.

### 6. Analisis Kestabilan Global di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

#### Teorema 6.1

Jika  $R_0 < 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik global

pada  $\Gamma$ . Bukti. Diketahui  $E_0(S, I) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$  adalah titik ekuilibrium bebas penyakit

dan  $\Gamma = \left\{ (S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2 : N(t) = S(t) + I(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$ . Akan dibuktikan bahwa titik  $E_0$  stabil asimtotik global jika  $R_0 < 1$ .

Diberikan fungsi  $L: \Gamma \subset \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sebagai berikut (Adepoju & Olaniyi, 2021).

$$L(S, I) = \frac{1}{(\mu + \theta - \omega\Lambda)} I$$

Turunan parsial  $L(S, I)$  yaitu  $\frac{\partial L(S, I)}{\partial S} = 0$  dan  $\frac{\partial L(S, I)}{\partial I} = \frac{1}{(\mu + \theta - \omega\Lambda)}$ , keduanya kontinu.

Selanjutnya,

a. Akan dibuktikan  $L(S_0, I_0) = 0$  sebagai berikut

Diberikan titik ekuilibrium bebas penyakit  $(S, I) = (S_0, I_0)$  maka  $L(S_0, I_0) = \frac{1}{(\mu + \theta - \omega\Lambda)} I_0 = 0$

b. Akan dibuktikan  $L(S, I) = \frac{1}{(\mu + \theta - \omega\Lambda)} I > 0$  jika  $(S, I) \neq (S_0, I_0)$  dengan  $(S_0, I_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ .

Diberikan titik ekuilibrium bebas penyakit  $(S, I) \neq (S_0, I_0)$  atau ditulis

$(S, I) \neq \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$  dengan  $I \neq 0$  maka  $L(S, I) = \frac{1}{(\mu + \theta - \omega\Lambda)} I > 0$ .

Selanjutnya, turunan total dari fungsi  $L(S, I)$

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{1}{(\mu + \theta - \omega\Lambda)}\right) \left(\omega\Lambda I + \frac{\beta SI}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} - (\mu + \theta)I\right)$$

Karena  $S < \frac{\Lambda}{\mu}$  dan  $\frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I} < \frac{\beta SI}{1 + \alpha_1 S}$  maka berlaku

$$\frac{dL}{dt} < \frac{1}{(\mu + \theta - \omega\Lambda)} \left(\omega\Lambda + \frac{\beta \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{1 + \alpha_1 \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)} - (\mu + \theta)\right) I$$

$$= -\left(1 - \frac{\beta\Lambda}{(\mu + \theta - \omega\Lambda)(\mu + \alpha_1\Lambda)}\right) I$$

$$= -(1 - R_0)I < 0 \text{ jika } R_0 < 1$$

Sehingga terbukti bahwa  $\frac{dL}{dt} < 0$  pada  $\Gamma - \{(S_0, I_0)\}$ . Berdasarkan Teorema 7 terbukti bahwa  $L(S, I)$  merupakan fungsi Lyapunov dan titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$  stabil asimtotik global pada  $\Gamma$  dengan syarat  $R_0 < 1$ .

## 7. Analisis Kestabilan Global di Titik Ekuilibrium Endemik ( $E^*$ )

### Teorema 7.2

*Jika  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik global pada  $\Gamma$ .*

Bukti. Diketahui  $E^* = \left(\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{(\mu + \theta)I^*}{\mu}, \frac{(R_0 - 1)\Lambda(\mu + \alpha_1\Lambda)}{(\mu + \theta)[\mu R_0 + \alpha_1\Lambda(R_0 - 1)] + \alpha_2\mu\Lambda}\right)$  adalah titik ekuilibrium endemik dan

$\Gamma = \left\{(S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2 : N(t) = S(t) + I(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}\right\}$ . Akan dibuktikan bahwa titik

$E^*$  stabil asimtotik global pada  $\Gamma$ .

Diberikan fungsi  $L: \Gamma \subset \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sebagai berikut (Adepoju & Olaniyi, 2021).

$$L(S, I) = \frac{1}{2} [(S - S^*) + (I - I^*)]^2$$

Turunan parsial  $L(S, I)$  yaitu  $\frac{\partial L(S, I)}{\partial S} = \frac{\partial L(S, I)}{\partial I} = (S - S^*) + (I - I^*)$  kontinu.

Selanjutnya,

a. Dibuktikan bahwa  $L(S^*, I^*) = 0$  sebagai berikut.

Diberikan titik ekuilibrium endemik  $(S, I) = (S^*, I^*)$  maka

$$L(S^*, I^*) = \frac{1}{2} [(S^* - S^*) + (I^* - I^*)]^2 = \frac{1}{2} [0 + 0]^2 = 0$$

- b. Dibuktikan bahwa  $L(S, I) > 0$  jika  $(S, I) \neq (S^*, I^*)$ . Diberikan titik ekuilibrium endemik  $(S, I) \neq (S^*, I^*)$  dengan  $S \neq S^*$  dan  $I \neq I^*$  maka  $L(S, I) = \frac{1}{2} [(S - S^*) + (I - I^*)]^2 > 0$ .

Selanjutnya, turunan total fungsi  $L(S, I)$

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{\partial L}{\partial I} \cdot \frac{dI}{dt} = [(S - S^*) + (I - I^*)] \left[ \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} \right] \\ &= [(S - S^*) + (I - I^*)] \left[ \Lambda - \omega \Lambda I - \frac{\beta SI}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} - \mu S + \omega \Lambda I \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta SI}{(1 + \alpha_1 S + \alpha_2 I)} - (\mu + \theta) I \right] \\ &= [(S - S^*) + (I - I^*)] [\Lambda - \mu S - (\mu + \theta) I] \\ &= [(S - S^*) + (I - I^*)] \left[ \omega \Lambda I^* + \frac{\beta S^* I^*}{1 + \alpha_1 S^* + \alpha_2 I^*} + \mu S^* - \mu S \right. \\ &\quad \left. - (\mu + \theta) I \right] \\ &= [(S - S^*) + (I - I^*)] [\omega \Lambda I^* + (\mu + \theta) I^* - \omega \Lambda I^* + \mu S^* - \mu S \\ &\quad - (\mu + \theta) I] \\ &= [(S - S^*) + (I - I^*)] [-\mu(S - S^*) - \mu(I - I^*) - \theta(I - I^*)] \end{aligned}$$

Jika  $I > I^*$  maka berlaku

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &< [(S - S^*) + (I - I^*)] [-\mu(S - S^*) - \mu(I - I^*)] \\ &= -\mu [(S - S^*) + (I - I^*)]^2 < 0, \text{ dengan syarat } R_0 > 1. \end{aligned}$$

Turunan total fungsi  $L(S, I)$  terbukti bahwa  $\frac{dL}{dt} < 0$  pada  $\Gamma - \{(S^*, I^*)\}$ . Berdasarkan Teorema 4 terbukti bahwa  $L(S, I)$  merupakan fungsi Lyapunov dan titik ekuilibrium endemik  $E^*$  stabil asimtotik global pada  $\Gamma$  dengan syarat  $R_0 > 1$ .

## 8. Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas terhadap  $R_0$  dilakukan untuk mengetahui pengaruh perubahan parameter – parameter terhadap bilangan reproduksi dasar. Langkah pertama dalam mencari analisis sensitivitas adalah dengan menghitung indeks sensitivitas dari semua parameter yang ingin dicari dengan menggunakan Persamaan (5). Disajikan rumus indeks sensitivitas setiap parameter dalam Tabel 1 berikut berdasarkan Definisi 5.

**Tabel 1.** Indeks sensitivitas setiap parameter

Parameter ( $p$ )	Indeks Sensitivitas
$\beta$	$\Upsilon_{\beta}^{R_0} = 1$
$\omega$	$\Upsilon_{\omega}^{R_0} = \frac{\omega\Lambda}{(\mu + \theta - \omega\Lambda)}$
$\Lambda$	$\Upsilon_{\Lambda}^{R_0} = \frac{[(\mu + \alpha_1\Lambda)(\mu + \theta - \omega\Lambda) - \Lambda(\alpha_1(\mu + \theta - \omega\Lambda) - \omega(\mu + \alpha_1\Lambda))]}{(\mu + \alpha_1\Lambda)(\mu + \theta - \omega\Lambda)}$
$\alpha_1$	$\Upsilon_{\alpha_1}^{R_0} = -\frac{\alpha_1\Lambda}{(\mu + \alpha_1\Lambda)}$
$\mu$	$\Upsilon_{\mu}^{R_0} = -\frac{\mu(2\mu + \theta - \omega\Lambda + \alpha_1\Lambda)}{(\mu + \alpha_1\Lambda)(\mu + \theta - \omega\Lambda)}$
$\theta$	$\Upsilon_{\theta}^{R_0} = -\frac{\theta}{(\mu + \theta - \omega\Lambda)}$

Diberikan nilai parameter pada Tabel 2 untuk mencari nilai indeks sensitivitas pada Bilangan Reproduksi Dasar dan simulasi numerik di titik  $E_0$  sebagai berikut.

**Tabel 2.** Parameter yang digunakan untuk analisis sensitivitas dan simulasi numerik di titik  $E_0$

Parameter ( $p$ )	Nilai
$\beta$	0.04
$\omega$	0.015
$\Lambda$	20
$\alpha_1$	1
$\alpha_2$	0.65
$\mu$	0.02
$\theta$	0.35

Sumber: Adepoju & Olaniyi (2021)

Hasil perhitungan indeks sensitivitas berdasarkan Tabel 1 dan Tabel 2 sebagai berikut.

**Tabel 3.** Nilai indeks sensitivitas terhadap Bilangan Reproduksi Dasar

Parameter ( $p$ )	Nilai indeks sensitivitas ( $\Upsilon_p^{R_0}$ )	Nilai awal $R_0 = 0.5709$	
		$p + 10\%p$	$p - 10\%p$
$\Lambda$	+4.2867	0.9991	0.3996
$\omega$	+4.2857	0.9990	0.3996

$\beta$	+1	0.6279	0.5138
$\theta$	-5	0.3806	1.1417
$\alpha_1$	-0.9990	0.5190	0.6342
$\mu$	-0.2867	0.5549	0.5877

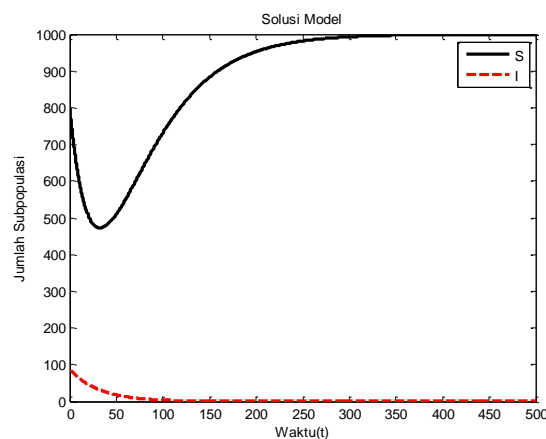
Berdasarkan Tabel 3, dapat disimpulkan bahwa setiap parameter memberikan pengaruh yang bervariasi terhadap  $R_0$ . Dari hasil indeks sensitivitas pada Tabel 3 terlihat bahwa parameter  $\Lambda$ ,  $\omega$  dan  $\beta$  dengan indeks sensitivitas bernilai positif hal ini berarti jika meningkatkan nilai parameter tersebut maka menyebabkan bilangan reproduksi dasar juga meningkat (dan sebaliknya). Sebagai ilustrasi, jika nilai parameter ditambah 10%p maka menyebabkan peningkatan nilai  $R_0$ , sebaliknya jika nilai parameter dikurangi 10%p akan menurunkan nilai  $R_0$ . Sedangkan parameter  $\theta$ ,  $\alpha_1$  dan  $\mu$  dengan indeks sensitivitas bernilai negatif hal ini berarti jika menurunkan nilai parameter tersebut maka menyebabkan peningkatan  $R_0$  dan sebaliknya jika meningkatkan nilai parameter tersebut akan menurunkan  $R_0$ . Sebagai ilustrasi, jika nilai parameter ditambah 10%p maka akan menurunkan nilai  $R_0$ , sebaliknya jika nilai parameter dikurangi 10%p akan menaikkan nilai  $R_0$ .

## 9. Simulasi Numerik

Simulasi numerik untuk model SI untuk penyakit menular dengan transmisi vertikal dan tingkat kejadian jenuh dilakukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat (Sudiarta, 2019).

### 9.1 Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Diberikan nilai awal  $S(0) = 800$  dan  $I(0) = 90$  serta nilai parameter yang memenuhi syarat  $R_0 < 1$  pada Tabel 2. Berdasarkan nilai awal dan parameter yang diberikan, disajikan dalam bentuk grafik solusi sebagai berikut.



**Gambar 2.** Grafik solusi untuk Titik Ekuilibrium  $E_0$

Pada Gambar 2, dapat dilihat pada awal waktu kedua subpopulasi turun. Kemudian subpopulasi *Susceptible* mengalami kenaikan dan dari waktu ke waktu konvergen menuju nilai 1000. Sedangkan subpopulasi *Infected* mengalami penurunan dan dari waktu ke waktu juga konvergen tetapi menuju nilai 0. Hal ini

menunjukkan ilustrasi analisis kestabilan di titik ekuilibrium  $E_0(S_0, I_0) = (1000, 0)$ .

### 9.2 Simulasi Numerik Titik Ekuilibrium Endemik

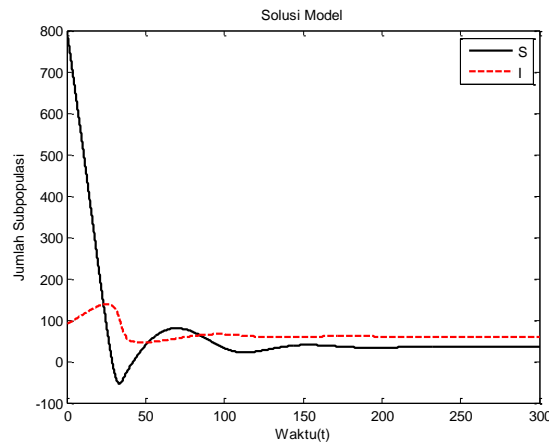
Diberikan nilai awal sebesar  $S(0) = 800$  dan subpopulasi terinfeksi sebesar  $I(0) = 90$  serta parameter yang memenuhi syarat  $R_0 > 1$  yang ditunjukkan pada Tabel 4 sebagai berikut.

**Tabel 4.** Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi numerik di titik  $E^*$

Parameter	Nilai
$\beta$	0.04
$\omega$	0.015
$\Lambda$	20
$\alpha_1$	0.85
$\alpha_2$	0.65
$\mu$	0.02
$\theta$	0.3

Sumber: Adepoju & Olaniyi (2021)

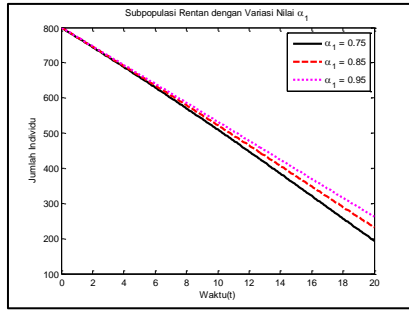
Berdasarkan nilai awal dan parameter yang diberikan, disajikan dalam bentuk grafik solusi sebagai berikut.



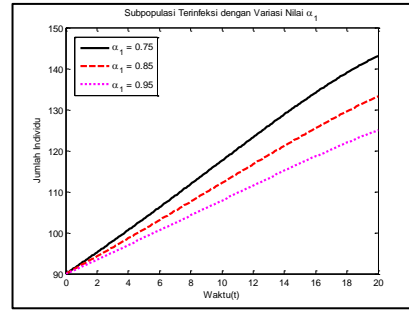
**Gambar 3.** Grafik solusi untuk Titik Ekuilibrium  $E^*$

Pada Gambar 3, dapat dilihat grafik subpopulasi *Susceptible* stabil menuju nilai 34.9606. Sedangkan grafik subpopulasi *stabil* menuju nilai 60.3150. Hal ini menunjukkan ilustrasi analisis kestabilan di titik ekuilibrium  $E^*(S^*, I^*) = (34.9606, 60.3150)$ .

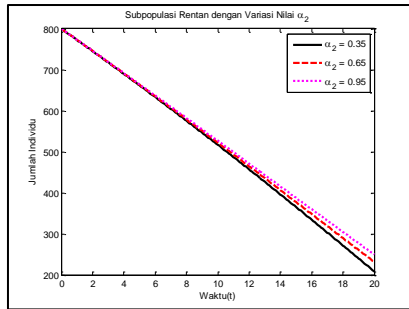
Gambar 4-9 disajikan untuk menyajikan pengaruh parameter  $\alpha_1, \alpha_2$  dan  $\omega$  terhadap perubahan jumlah subpopulasi rentan dan terinfeksi pada model. Sedangkan Gambar 10-11 disajikan untuk mengilustrasikan efek  $\alpha_1$  dan  $\omega$  terhadap bilangan reproduksi dasar.



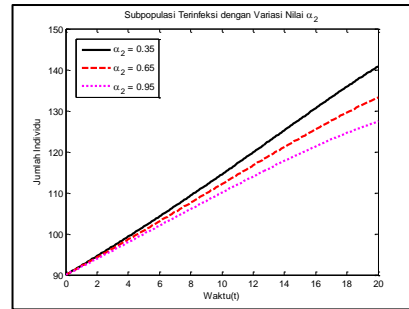
Gambar 4. Grafik pengaruh nilai  $\alpha_1$  terhadap subpopulasi rentan



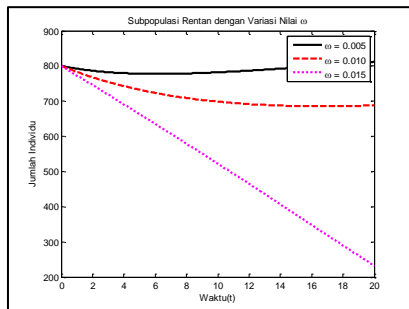
Gambar 5. Grafik pengaruh nilai  $\alpha_1$  terhadap subpopulasi terinfeksi



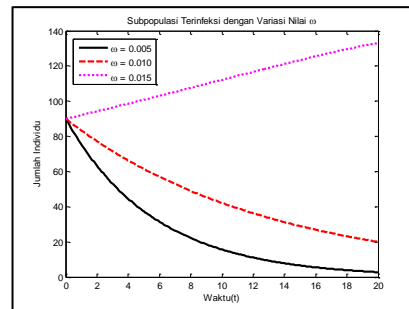
Gambar 6. Grafik pengaruh nilai  $\alpha_2$  terhadap subpopulasi rentan



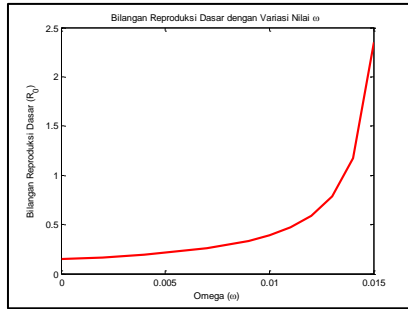
Gambar 7. Grafik pengaruh nilai  $\alpha_2$  terhadap subpopulasi terinfeksi



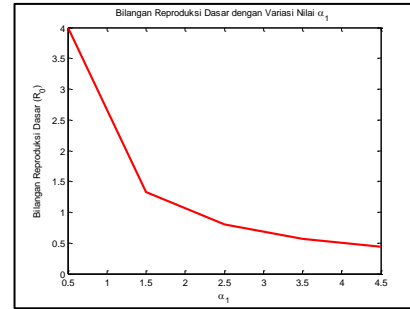
Gambar 8. Grafik pengaruh nilai  $\omega$  terhadap subpopulasi rentan



Gambar 9. Grafik pengaruh nilai  $\omega$  terhadap subpopulasi terinfeksi



**Gambar 10.** Pengaruh nilai  $\omega$  terhadap Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ )



**Gambar 11.** Pengaruh nilai  $\alpha_1$  terhadap Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ )

Pada Gambar 4 dan 6 dapat dilihat bahwa jika nilai  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  ditingkatkan maka jumlah subpopulasi rentan berkurang lebih lambat dan berlaku sebaliknya jika nilai  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  diturunkan maka menyebabkan jumlah subpopulasi rentan semakin cepat menurun. Gambar 5 dan 7 dapat dilihat bahwa jika nilai  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  ditingkatkan maka menyebabkan jumlah subpopulasi terinfeksi semakin berkurang dan berlaku sebaliknya jika nilai  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  diturunkan maka menyebabkan jumlah subpopulasi terinfeksi semakin meningkat. Selanjutnya, pada Gambar 8 dapat dilihat bahwa jika nilai  $\omega$  ditingkatkan maka menyebabkan jumlah subpopulasi rentan semakin menurun dan berlaku sebaliknya jika nilai  $\omega$  diturunkan maka menyebabkan jumlah subpopulasi rentan semakin meningkat. Sedangkan pada Gambar 9 dapat dilihat bahwa jika nilai  $\omega$  ditingkatkan maka menyebabkan jumlah subpopulasi terinfeksi semakin meningkat dan berlaku sebaliknya jika nilai  $\omega$  diturunkan maka menyebabkan jumlah subpopulasi terinfeksi semakin menurun. Kemudian, Gambar 10 menunjukkan bahwa semakin besar nilai  $\omega$  maka akan menyebabkan peningkatan pada Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) sedangkan Gambar 11 menunjukkan bahwa semakin besar nilai  $\alpha_1$  maka akan menyebabkan penurunan pada Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ ).

### KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan yaitu terbentuknya model SI untuk penyakit menular dengan transmisi vertikal (yaitu penularan dari ibu yang hamil kepada bayi yang dilahirkannya) dan tingkat kejadian jenuh (mempertimbangkan perubahan perilaku *susceptible* dan *infected* ketika penularan meningkat). Model tersebut memiliki dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, dan keduanya stabil asimtotik lokal dan global. Selanjutnya, analisis sensitivitas menunjukkan bahwa parameter paling sensitif terhadap perubahan Bilangan Reproduksi Dasar dapat diurutkan dari yang terbesar adalah  $\Lambda, \omega, \beta, \theta, \alpha_1$  dan  $\mu$ . Hasil simulasi numerik yaitu mendukung analisis kestabilan titik ekuilibrium. Kemudian, simulasi juga disajikan untuk



memperlihatkan pengaruh parameter  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  dan  $\omega$  terhadap subpopulasi rentan dan terinfeksi, dan pengaruh parameter  $\omega$  dan  $\alpha_1$  terhadap bilangan reproduksi dasar.

## REFERENSI

- Abta, A., Kaddar, A., & Alaoui, H. T. (2012). Global Stability for Delay Sir and Seir Epidemic Models with Saturated Incidence Rates. *Electronic Journal of Differential Equations*. Vol. 2012(23), 1–13.
- Adepoju, O. A., & Olaniyi, S. (2021). Stability and optimal control of a disease model with vertical transmission and saturated incidence. *Scientific African*. Vol. 12, 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.sciaf.2021.e00800>
- Alzahrani, E. O., Ahmad, W., Khan, M. A., & Malebary, S. J. (2020). Optimal Control Strategies of Zika Virus Model with Mutant. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. Vol. 93, 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105532>
- Annas, S., Isbar Pratama, M., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*. Vol. 139. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110072>
- Bellomo, N., Preziosi, L. uigi, & Romano, A. (2005). *Modeling and Simulation in Science , Engineering and Technology*. Springer, New York City.
- Bellomo, N., & Preziosi, L. (1995). *Modelling Mathematical Methods Scientific Computation*.
- Braun, M. (1992). *Differential Equations and their Applications* (4th ed.). Springer Science. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4360-1>
- Chitnis, N., Hyman, J. M., & Cushing, J. M. (2008). Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model. *Bulletin of Mathematical Biology*. Vol. 70(5), 1272–1296. <https://doi.org/10.1007/s11538-008-9299-0>
- Driessche, P. Van Den, & Watmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. Vol. 180(1–2), 29–48. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- Hethcote, H. W. (2000). The Mathematical Models of Diseases. *SIAM Review*. Vol. 42(4), 599–653.
- Irwan. (2016). Epidemiologi Penyakit Menular. In *Pengaruh Kualitas Pelayanan... Jurnal EMBA*. Vol. 109(117).
- Jamil, A. K., Yulida, Y., & Karim, M. A. (2023). Analisis Kestabilan dan Solusi Numerik pada Model SEIR untuk Penyakit Tuberkulosis. Vol. 17(1), 14–29.
- Jiao, J., Cai, S., & Li, L. (2016). Dynamics of an SIR model with vertical transmission and impulsive dispersal. *Journal of Applied Mathematics and Computing*. Vol. 52(1–2), 139–155. <https://doi.org/10.1007/s12190-015-0934-2>

- Kelatlhegile, G. R., & Kgosimore, M. (2016). Bifurcation analysis of vertical transmission model with preventive strategy. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. Vol. 24(0), 492–498. <https://doi.org/10.1016/j.joems.2015.10.001>
- Lahrouz, A., Omari, L., & Kiouach, D. (2011). Global analysis of a deterministic and stochastic nonlinear SIRS epidemic model. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. Vol. 16(1), 59–76. <https://doi.org/10.15388/na.16.1.14115>
- Li, M. Y., Smith, H. A. L. L., & Wang, L. (2001). Global Dynamics of an Seir Epidemic Model With. *SIAM J. Appl. Math.* Vol. 62(1), 58–69.
- Martcheva, M. (2015). in An Introduction to Mathematical Epidemiology. In *An Introduction to Mathematical Epidemiology*.
- Sudiarta, I. W. (2019). *Metode Numerik*. Arga Puji Press.
- Suryani, I., & Yuenita.E, M. (2016). Analisis Kestabilan Model MSEIR Penyebaran Penyakit Difteri Dengan Saturated Incidence Rate. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. Vol. 2(1), 75–85.
- Wiggins, S. (2003). Texts in Applied Mathematics 2 Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. In *Texts in Applied Mathematics 2*.