Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.17 No.2 (Desember 2023) Hal. 228-238

ALJABAR C* DARI RUANG MATRIKS $\mathbb{M}_n(B(H))$

[1]Khaerudin Saleh, [2]Rustam, [3]Yulinda Eliskar

[123]Program Studi Teknik Telekomunikasi, Fakultas Teknik Elektro, Universitas Telkom
Jl. Telekomunikasi No. 1, Buah Batu, Bandung, Jawa Barat
email: *khaerudin@telkomuniversity.ac.id*

ABSTRACT

Let H be a Hilbert space. The set of bounded operators on the Hilbert space H denotes by $B(H)$ can be identified as an C*-Algebra. Let $\mathbb{M}_n(B(H))$ be a Matrix vector space over the field $\mathbb{C}$. By using *isomorphism it will be proven that $\mathbb{M}_n(B(H))$ is also a C*-algebra.

Keywords: Hilbert Space, Bounded Operator Space, Banach Space, *-isomorphism, C*-algebra

ABSTRAK

Misalkan H adalah suatu ruang Hilbert. Himpunan operator terbatas pada ruang Hilbert H ditulis $B(H)$ dapat diidentifikasi sebagai suatu Aljabar C*. Pandang himpunan matriks $\mathbb{M}_n(B(H))$ sebagai ruang vektor atas lapangan $\mathbb{C}$. Dengan mengunakan isomorfisma* akan dibuktikan bahwa $\mathbb{M}_n(B(H))$ juga merupakan suatu aljabar C*.

Kata kunci: Ruang Hilbert, Ruang Operator Terbatas, Ruang Banach, isomorphisma*, Aljabar C*

Received: 16 November 2023, Accepted: 28 November 2023, Published: 1 Desember 2023

PENDAHULUAN

Segal pada tahun 1947 memperkenalkan landasan dari mekanika kuantum pada analisis fungsional. Menurut Drago (2018) dengan mendefinisikan aljabar C* teorema Gelfand-Naimark-Segal dapat merepresentasikan aljabar ini ke dalam ruang Hilbert dengan tepat. Teori-teori seputar Aljabar C* dan ruang Hilbert menjadi bahasan yang cukup lama dibahas pada bidang analisis fungsional dan juga mekanika kuantum. Seiring dengan kemajuan teknologi informasi dan komputasi, teori-teori yang telah berkembang pesat pada mekanika quantum mulai diterapkan pada teknologi informasi dan komputasi. Heunen *et al*. (2022) berpendapat bahwa sifat-sifat matematika dari pemodelan sistem kuantum aljabar C* ekivalen dengan batasan pada sifat teori informasi secara alami. Sedangkan menurut Chien *et al*. (2021) penelitian terkait algoritma kuantum saat ini menjadi pusat perhatian, karena paralelisme komputasi kuantum yang kuat di ruang Hilbert. Masalah perhitungan yang biasanya sulit diselesaikan kini dapat diselesaikan dengan sangat efisien dengan cara non-klasik. Oleh karena itu pembahasan mengenai struktur dari Ruang Hilbert, Aljabar C* dan operator-operator pada ruang Hilbert yang telah banyak diulas pada mekanika quantum menjadi penting untuk diulas kembali.

Sebelumnya Rosjanuardi *et al.*, (2006) telah menjelaskan bahwa ruang operator terbatas pada ruang Hilbert ditulis $B(H)$ adalah suatu aljabar C*. Selanjutnya tulisan ini akan membahas salah satu cara untuk membuktikan bahwa ruang matriks persegi $\mathbb{M}_n(B(H)$ dengan entri-entri pada ruang Hilbert $B(H)$ adalah suatu aljabar C*.

TINJAUAN PUSTAKA

Misalkan $(V, \|\cdot\|)$ suatu ruang vektor bernorm atas lapangan F. Ruang vektor $(V, \|\cdot\|)$ dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy (v_n) di V konvergen di V. Ruang vektor bernorm lengkap disebut sebagai ruang Banach. Jika $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ suatu ruang hasilkali dalam, maka pemetaan $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ dengan $\|v\| = \langle v|v\rangle^{\frac{1}{2}}, \forall v \in V$ merupakan suatu fungsi norm. Dengan demikian $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ adalah suatu ruang bernorm. Jika $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ruang vektor bernorm lengkap maka V disebut ruang Hilbert. Jadi setiap ruang Hilbert adalah ruang Banach, namun tidak berlaku sebaliknya.

Suatu pemetaan $T: V \to V$ dikatakan operator linier jika $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v), \forall \alpha, \beta \in F, u, v \in V$. Operator linier pada ruang vektor V juga bisa disebut sebagai suatu endomorfisma pada ruang vektor V. Misalkan H merupakan suatu ruang Hilbert, suatu operator $T: H \to H$ dikatakan operator terbatas jika terdapat konstanta $k > 0$ sedemikian sehingga $\|T(x)\| \leq k\|x\|, \forall\, x \in H$.

Selanjutnya himpunan semua operator terbatas pada H kita tulis sebagai $B(H)$. Kemudian definisikan operasi penjumlahan pada $B(H)$ sebagai $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$ untuk setiap $T_1, T_2 \in B(H)$ dan $x \in H$, maka $B(H)$ adalah grup aditif abelian. Selain itu karena $B(H)$ dilengkapi dengan perkalian scalar, maka $B(H)$ merupakan suatu ruang vektor atas lapangan F. Operator $T^*: H \to H$ dikatakan operator adjoin dari $T: H \to H$ jika $\langle T(x)|y\rangle = \langle x|T^*(y)\rangle \forall x, y \in H$. Norm dari operator T didefinisikan sebagai $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| | \|x\| \leq 1, x \in H\}$.

Teorema 1 (Rosjanuardi *et al.*, 2006)
Misalkan H ruang Hilbert dan $T_1, T_2 \in B(H)$, maka berlaku sifat:

1) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
2) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
3) $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$
4) $T^{**} = T$
5) $\|T^*\| = \|T\|$
6) $\|T^*T\| = \|T\|^2$

Definisi 2 (Rosjanuardi *et al.*, 2006)
Misalkan $T: H \to H$ merupakan operator pada Ruang Hilbert H. Operator T disebut sebagai operator uniter jika $TT^* = T^*T = I$.

Operator $T^*: H \to H$ dikatakan operator adjoin dari $T: H \to H$ jika $\langle T(x)|y\rangle = \langle x|T^*(y)\rangle \forall x, y \in H$. Jika T adalah operator uniter maka $\|T(x)\| =$

$\langle T(x)|T(x)\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle x|T^{*}T(x)\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle x|x\rangle^{\frac{1}{2}} = \|x\|, \forall\, x \in H$. Sehingga setiap operator uniter adalah operator terbatas. Selanjutnya akan diulas operator linier pada ruang bernorm yang berdimensi hingga.

Teorema 3 (Jan Derezi´nski, 2007)
Jika suatu ruang bernorm X berdimensi hingga, maka setiap operator linier di X adalah operator terbatas.

Misalkan V adalah ruang vektor berdimensi n dan W ruang vektor berdimensi m. Selanjutnya $T: V \to W$ adalah suatu transformasi linier dengan $T(x) = y \in W, \forall x \in V$ maka terdapat matriks transformasi A sehingga $T(x) = Ax$. Kemudian berdasarkan Teorema 3 matriks A adalah suatu operator linier yang terbatas.

Teorema 4 (Anton & Rorres, 2011**)**
Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan entri bilangan kompleks, maka pernyataan berikut equivalent

- *a) A adalah uniter*
- *b) $\|Ax\| = \|x\|, \forall x \in \mathbb{C}^n$.*

Berdasarkan Teorema 4, sifat dari matriks A sebagi operator pada ruang vektor $\mathbb{C}^n$ serupa dengan operator linier T pada ruang Hilbert H. Selanjutnya akan diulas struktur dari ruang operator terbatas $B(H)$.

Teorema 5 (Rosjanuardi *et al*., 2006)
Misalkan H adalah ruang Hilbert, himpunan $B(H) \coloneqq \{T: H \to H; T\ linier\ dan\ terbatas\}$ disebut himpunan dari semua operator terbatas pada H. Ruang operator terbatas $B(H)$ dengan norm supremum adalah ruang Banach.

Berdasarkan Teorema 5 Ruang operator terbatas $B(H)$ merupakan ruang vektor bernorm lengkap. Selanjutnya akan dibahas cara memandang ruang Banach $B(H)$ sebagai suatu aljabar C*.

Definisi 6 (Roman, 2008)
Misalkan F suatu lapangan. Suatu aljabar $\mathbb{A}$ atas F adalah himpunan tak kosong $\mathbb{A}$ yang disertai dengan tiga operasi, yaitu penjumlahan, perkalian dan perkalian scalar, dengan memenuhi sifat-sifat berikut:

1) *$\mathbb{A}$ adalah ruang vektor di bawah penjumalahan dan perkalian scalar*
2) *$\mathbb{A}$ adalah ring di bawah penjumlahan dan perkalian*
3) *Jika $r \in F$ dan $a, b \in \mathbb{A}$ maka*

$$r(a, b) = (ra)b = a(rb)$$

Jadi suatu aljabar adalah suatu ruang vektor yang tertutup terhadap perkalian atas vektor-vektor atau suatu ring dimana kita dapat mengalikan setiap elemennya dengan suatu skalar.

Definisi 7 (Roman, 2008)

Jika $\mathbb{A}$ dan $\mathbb{B}$ suatu aljabar, suatu pemetaan $\varphi: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ disebut homomorfisma aljabar jika $\forall a, b \in \mathbb{A}$ dan $\alpha \in F$ berlaku:

1) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
2) $\varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$
3) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

Berdasarkan Definisi 7 dapat disimpulkan bahwa homomorfisma aljabar mengawetkan operasi aljabar dari suatu aljabar terhadap aljabar lainnya.

Definisi 8 (Murphy, 1990).
Suatu involusi pada aljabar $\mathbb{A}$ adalah suatu pemetaan konjugat linear (yaitu $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$) sedemikian sehingga $(ab)^* = b^* a^*$ dan $a^{**} = a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{A}$ dan scalar $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Suatu aljabar $(\mathbb{A},^*)$ yang dilengkapi dengan involusi disebut Aljabar*. Contoh dari aljabar* adalah ruang matrik persegi atas bilangan kompleks (ditulis $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$). Involusi pada aljabar ini adalah conjugate transpose yang biasa kita kenal dalam operasi matriks. Selanjutnya misalkan $\mathbb{A}$ adalah suatu aljabar* dan $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$ dikatakan suatu subaljabar* jika $\mathbb{S}^* = \{a^* | a \in \mathbb{S}\} = \mathbb{S}$. Subaljabar* disebut juga sebagai subaljabar *Self-adjoint.*

Definisi 9 (Rosjanuardi *et al*., 2006)
Misalkan $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ adalah ruang Banach atas $\mathbb{C}$. Jika di $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ terdefinisi operasi perkalian yang memenuhi sifat $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|; \forall a, b \in \mathbb{A}$, maka $\mathbb{A}$ disebut aljabar Banach.

Selanjutnya dengan mendefinisikan operasi komposisi di ruang vektor bernorm lengkap $B(H)$, ruang vektor ini dapat dipandang sebagai suatu aljabar Banach.

Teorema 10 (Rosjanuardi *et al*., 2006)
Misalkan H adalah ruang Hilbert. Komposisi operator merupakan suatu operasi pada $B(H)$ yang memenuhi sifat $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|; \forall S, T \in B(H)$. Dengan demikian ruang operator terbatas $B(H)$ yang dilengkapi dengan operasi komposisi adalah aljabar Banach.

Berdasarkan Teorema 10 dengan operasi komposisi dan norm supremum maka ruang operator $B(H)$ adalah suatu aljabar Banach.

Definisi 11 (Rosjanuardi *et al*., 2006)
Misalkan A adalah suatu aljabar Banach. Suatu pemetaan $*: A \to A$ dengan $a \mapsto a^* \forall a \in A$ disebut involusi pada aljabar Banach A apabia untuk setiap $a, b \in A$ dan scalar $\lambda, \mu \in C$ memenuhi:

1) $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*)$
2) $(ab)^* = b^* a^*$
3) $(a^*)^* = a$
4) $\|a^*\| = \|a\|$

Selanjutnya suatu aljabar Banach A yang dilengkapi dengan involusi aljabar disebut aljabar Banach.*

Selanjutnya dengan mendefinisikan adjoint di $B(H)$ sebagai suatu involusi, maka $B(H)$ adalah suatu aljabar Banach*.

Teorema 12 (Rosjanuardi *et al*., 2006)
Ruang operator terbatas $B(H)$ adalah aljabar Banach.*

Definisi 13 (Rosjanuardi *et al*., 2006)
Suatu aljabar Banach A disebut aljabar C* jika berlaku* $\|a^*a\| = \|a\|^2, \forall a \in A$.

Teorema 14 (Rosjanuardi *et al*., 2006)
*Ruang operator terbatas $B(H)$ adalah Aljabar C**

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang dilakukan adalah dengan melakukan studi literatur mengenai definisi dan teorema yang mendukung pembahasan, di antaranya konsep ruang Hilbert, Ruang Banach, Konsep Aljabar* sampai Aljabar C*. Selanjutnya teorema dan definisi tersebut digunakan untuk membuktikan bahwa ruang matriks $\mathbb{M}_n(B(H))$ merupakan suatu Aljabar C*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas salah satu cara untuk membuktikan ruang matriks $\mathbb{M}_n(B(H))$ adalah suatu aljabar C*. Berdasarkan Teorema 14 harus dibuktikan bahwa ruang matriks $\mathbb{M}_n(B(H))$ merupakan suatu ruang operator terbatas pada suatu ruang Hilbert. Pertama akan dibuktikan bahwa ruang Hilbert $n-tuple$ adalah suatu ruang Hilbert. Selanjutnya jika H^n adalah suatu ruang Hilbert, maka $B(H^n)$ adalah suatu aljabar C*. Kemudian melalui suatu isomorfisma* antara $\mathbb{M}_n(B(H))$ dengan $B(H^n)$ akan dibuktikan bahwa $\mathbb{M}_n(B(H))$ adalah suatu aljabar C*.

Lemma 15
Diberikan suatu ruang hasilkali dalam H atas lapangan $\mathbb{C}$ dan $n \in \mathbb{N}$. Ruang vektor H $n-$tuple (H^n) merupakan ruang hasilkali dalam dengan hasilkali dalam

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i|y_i\rangle \tag{1}$$

Bukti:
Telah diketahui bahwa ruang $n-$tuple atas suatu ruang vektor merupakan ruang vektor juga dengan lapangan yang sama.

Ambil sembarang vektor $x, y, z \in H^n$ dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa (1) memenuhi aksioma-aksioma hasilkali dalam

i) $\langle \alpha x + \beta y|z\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha x_i + \beta y_i|z_i\rangle$
$= \sum_{i=1}^{n} (\langle \alpha x_i|z_i\rangle + \langle \beta y_i|z_i\rangle) \ldots\ldots$ (hasil kali dalam di H)

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n}\langle x_i|z_i\rangle + \beta \sum_{i=1}^{n}\langle y_i|z_i\rangle$$
$$= \alpha\langle x|z\rangle + \beta\langle y|z\rangle$$

ii) $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x_i|y_i\rangle$
$$= \sum_{i=1}^{n}\overline{\langle y_\iota|x_\iota\rangle}$$
$$= \overline{\langle y|x\rangle}$$

Karena H adalah ruang hasilkali dalam maka $\langle x_i|x_i\rangle \geq 0$ dan $\langle x_i|x_i\rangle = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \forall x_i \in H$. Dengan demikian karena $\langle x_i|x_i\rangle \geq 0$ maka $\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x_i|x_i\rangle \geq 0$, selanjutnya karena $\langle x_i|x_i\rangle = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \forall x_i \in H$ maka $\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x_i|x_i\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in H^n$. ■

Berdasarkan Lemma 15 ruang Hilbert H^n adalah suatu ruang hasilkali dalam. Selanjutnya melalui hasilkali dalam tersebut akan kita definisikan norm di H^n. Kemudian akan dibuktikan bahwa norm di H^n adalah lengkap.

Lemma 16

Diberikan suatu ruang Hilbert H atas lapangan $\mathbb{C}$ dan $n \in \mathbb{N}$. Ruang Hilbert n −tuple (H^n) merupakan ruang Hilbert juga dengan ruang hasilkali dalam

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x_i|y_i\rangle \tag{1}$$

dan norm di H^n

$$\|x\| = \langle x|x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\langle x_i|x_i\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

dengan $x, y \in H$.

Bukti:

Telah diketahui bahwa ruang n −tuple atas suatu ruang vektor merupakan ruang vektor juga dengan lapangan yang sama. Berdasarkan lemma 16 karena H adalah ruang hasilkali dalam maka H^n juga merupakan ruang hasil kali dalam. Selanjutnya karena H^n merupakan ruang hasilkali dalam maka H^n juga merupakan ruang vektor bernorm dengan norm yang didefinisikan sesuai dengan persamaan [2]. Selanjutnya Ambil sembarang x_k suatu barisan Cauchy di H^n. Kemudian akan dibuktikan x_k konvergen di H^n.

i) Akan dibuktikan bahwa jika $x_k = (x_{1_k}, x_{2_k}, x_{3_k}, \dots, x_{n_k})$ adalah suatu barisan Cauchy di H^n, maka x_{i_k} juga barisan Cauchy di ruang Hilbert H, $\forall i \in \{1,2,3, \dots n\}$.

Misalkan x_k merupakan barisan Cauchy di H^n, maka $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $k, l \geq K$ berlaku $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$. Kemudian

$$\|x_k - x_l\| = \langle x_k - x_l|x_k - x_l\rangle^{\frac{1}{2}}.$$
$$. \qquad = \left(\sum_{i=1}^{n}\langle x_{i_k} - x_{i_l}|x_{i_k} - x_{i_l}\rangle\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$. \qquad = \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i_k} - x_{i_l}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dengan demikian $\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i_k} - x_{i_l}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \Leftrightarrow \left|x_{i_k} - x_{i_l}\right| < \varepsilon, \forall i \in \{1,2,3,\dots,n\}$. Jadi jika $x_k = (x_{1_k}, x_{2_k}, x_{3_k}, \dots, x_{n_k})$ adalah suatu barisan Cauchy di H^n maka x_{i_k} juga barisan Cauchy di ruang Hilbert H, $\forall i \in \{1,2,3,\dots n\}$.

ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa setiap barisan Cauchy $x_k = (x_{1_k}, x_{2_k}, x_{3_k}, \dots, x_{n_k})$ di H^n konvergen menuju $x = (x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \in H^n$.
Ambil sembarang barisan Cauchy $x_k = (x_{1_k}, x_{2_k}, x_{3_k}, \dots, x_{n_k})$ di H^n, maka x_{i_k} adalah barisan Cauchy di H. Karena H adalah ruang Hilbert maka x_{i_k} konvergen menuju $x_i \in H$.
Artinya $\forall \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0, \exists K(\varepsilon_0) > 0$ sedemikian sehingga jika $i_k \geq K(\varepsilon_0)$ berlaku

$$\left\|x_{i_k} - x_i\right\| < \varepsilon_0$$

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, sehingga untuk suatu $N(\varepsilon) > 0$ jika $k \geq N(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
\|x_k - x\| &= \langle x_k - x | x_k - x\rangle^{\frac{1}{2}}. \\
. \qquad &= \left(\sum_{i=1}^{n}\langle x_{i_k} - x_i | x_{i_k} - x_i\rangle\right)^{\frac{1}{2}}. \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\left\|x_{i_k} - x_i\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&< \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Jadi setiap barisan Cauchy $x_k = (x_{1_k}, x_{2_k}, x_{3_k}, \dots, x_{n_k})$ di H^n konvergen menuju $x = (x_1, x_2, x_3, \dots x_n) \in H^n$ ■

Berdasarkan Lemma 16, ruang hasilkali dalam H^n adalah ruang vektor bernorm lengkap. Jadi jika H adalah suatu ruang Hilbert maka H^n merupakan ruang Hilbert juga. Selanjutnya akan dibahas ruang operator terbatas dari H^n.

Teorema 17

Jika $\mathbb{M}_n(B(H))$ adalah suatu ruang matriks berukuran $n \times n$, dan $B(H^n)$ adalah ruang operator terbatas pada ruang Hilbert H^n, maka $\mathbb{M}_n\big(B(H)\big)$ adalah suatu subaljabar dari $B(H^n)$.*

Bukti:

Karena $B(H)$ adalah suatu aljabar maka ruang matriks persegi $\mathbb{M}_n(B(H))$ juga merupakan suatu aljabar. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mathbb{M}_n(B(H))$ adalah suatu subaljabar* dari $B(H^n)$. Ambil sembarang $x \in H^n$ dan $u \in \mathbb{M}_n(B(H))$, kemudian definisikan

$$u(x)=\begin{pmatrix}u_{11} & \dots & u_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{n1} & \dots & u_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}u_{1j}(x_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}u_{nj}(x_j)\end{pmatrix}\in H^n \tag{3}$$

i) Selanjutnya akan dibuktikan setiap $u\in\mathbb{M}_n(B(H))$ merupakan suatu pemetaan. Ambil sembarang $x,y\in H^n$ dengan $x=y$, (artinya $x_j=y_j,\forall j\in\{1,2,3,\dots,n\}$). Karena $u_{ij}\in B(H)$ adalah suatu operator linier maka $\sum_{j=1}^{n}u_{ij}(x_j)=\sum_{j=1}^{n}u_{ij}(y_j)$. Sehingga jika $x=y$ maka:

$$u(x)=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}u_{1j}(x_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}u_{nj}(x_j)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}u_{1j}(y_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}u_{nj}(y_j)\end{pmatrix}=u(y) \tag{4}$$

Jadi setiap $u\in\mathbb{M}_n(B(H))$ merupakan suatu pemetaan

ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa setiap u element $\mathbb{M}_n(B(H))$ merupakan suatu operator linier. Ambil sembarang $u\in\mathbb{M}_n\big(B(H)\big),\alpha\in\mathbb{C}$ dan $x,y\in H^n$.

$$u(x+y)=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}u_{1j}(x_j+y_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}u_{nj}\big(x_j+y_j\big)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}(u_{1j}(x_j)+u_{1j}(y_j))\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}(u_{nj}(x_j)+u_{nj}(y_j))\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}u_{1j}\big(x_j\big)+\sum_{j=1}^{n}u_{1j}(y_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}u_{nj}(x_j)+\sum_{j=1}^{n}u_{nj}(y_j)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}u_{1j}(x_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}u_{nj}(x_j)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}u_{1j}(y_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}u_{nj}(y_j)\end{pmatrix}=u(x)+u(y)$$

$$u(\alpha x)=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}u_{1j}(\alpha x_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}u_{nj}(\alpha x_j)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}u_{1j}(\alpha x_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}u_{nj}(\alpha x_j)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\alpha u_{1j}(x_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}\alpha u_{nj}(x_j)\end{pmatrix}$$

$$=\alpha\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}u_{1j}(x_j)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}u_{nj}(x_j)\end{pmatrix}=\alpha u(x)$$

Jadi setiap u element $\mathbb{M}_n(B(H))$ merupakan suatu operator linier. Karena setiap operator linier pada ruang bernorm yang berdimensi hingga adalah terbatas, maka u adalah operator linier yang terbatas. Dengan demikian $u\in B(H^n)$.

iii) Selanjutnya ambil sembarang $u=[u_{ij}]\in\mathbb{M}_n(B(H))$, akan dicari $u^*\in B(H^n)$, sehingga $\langle u(x)|y\rangle=\langle x|u^*(y)\rangle,\forall x,y\in H^n$.

$$\begin{aligned}
\langle u(x)|y\rangle &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\left\langle\sum_{j=1}^{n}u_{ij}(x_j)\,\middle|\,y_i\right\rangle\\
&= \left\langle\textstyle\sum_{j=1}^{n}u_{1j}(x_j))\middle|y_1\right\rangle+\left\langle\textstyle\sum_{j=1}^{n}u_{2j}(x_j))\middle|y_2\right\rangle+\cdots\left\langle\textstyle\sum_{j=1}^{n}u_{nj}(x_j))\middle|y_n\right\rangle\\
&= (\langle u_{11}(x_1)|y_1\rangle+\cdots+\langle u_{1n}(x_n)|y_1\rangle)\\
&\qquad+(\langle u_{21}(x_1)|y_2\rangle+\cdots+\langle u_{2n}(x_n)|y_2\rangle)+\cdots\\
&\qquad+(\langle u_{n1}(x_1)|y_n\rangle+\cdots+\langle u_{nn}(x_n)|y_n\rangle)\\
&= (\langle x_1|u_{11}^*(y_1)\rangle+\cdots+\langle x_n|u_{1n}^*(y_1)\rangle)\\
&\qquad+(\langle x_1|u_{21}^*(y_2)\rangle+\cdots+\langle x_n|u_{2n}^*(y_2)\rangle)+\cdots\\
&\qquad+(\langle x_1|u_{n1}^*(y_n)\rangle+\cdots+\langle x_n|u_{nn}^*(y_n)\rangle)\\
&= (\langle x_1|u_{11}^*(y_1)\rangle+\cdots+\langle x_1|u_{n1}^*(y_n)\rangle)+(\langle x_2|u_{i2}^*(y_1)\rangle+\cdots+\\
&\quad\langle x_2|u_{n2}^*(y_n)\rangle)+\cdots+(\langle x_n|u_{1n}^*(y_n)\rangle+\cdots+\langle x_n|u_{nn}^*(y_n)\rangle)\\
&= \langle x_1|\textstyle\sum_{i=1}^{n}u_{i1}^*(y_i)\rangle+\langle x_2|\sum_{i=1}^{n}u_{i2}^*(y_i)\rangle+\cdots+\langle x_n|\sum_{i=1}^{n}u_{in}^*(y_i)\rangle\\
&= \left\langle x\middle|[u_{ij}^*]^T y\right\rangle
\end{aligned}$$

Jadi $u^*=[u_{ij}^*]^T$ dengan u_{ij}^* adjoin dari $u_{ij}\in B(H)\forall i,j\in\{1,2,3,\dots n\}$. Karena untuk setiap $u\in\mathbb{M}_n(B(H))$ adjoinnya berada di $\mathbb{M}_n(B(H))$ maka $\mathbb{M}_n(B(H))$ merupakan subaljabar self adjoin dari $B(H^n)$. Jadi maka $\mathbb{M}_n(B(H))$ adalah suatu subaljabar* dari $B(H^n)$. ∎

Berdasarkan Teorema 17 ruang $\mathbb{M}_n(B(H)$ merupakan suatu aljabar* dan dapat dipandang sebagai operator terbatas pada ruang Hilbert *n-tuple.* Namun norm pada $\mathbb{M}_n(B(H)$ perlu didefinisikan dengan jelas sehingga $\mathbb{M}_n(B(H)$ juga bisa dipandang sebagai Aljabar C*

Teorema 18

Jika $\mathbb{M}_n(B(H)$ adalah suatu ruang matriks persegi dengan entri-entri yang berasal dari aljabar operator $B(H)$, maka $\mathbb{M}_n(B(H)$ adalah suatu Aljabar C.*

Bukti:

Telah diketahui bahwa $\mathbb{M}_n\big(B(H)\big)$ adalah suatu aljabar*, akan dibuktikan $\mathbb{M}_n\big(B(H)\big)$ juga merupakan aljabar Banach. Misalkan H^n adalah ruang Hilbert $n-tuple$. Jika $u \in \mathbb{M}_n(B(H))$ kita definisikan $f(u) \in B(H^n)$ dengan

$$\big(f(u)\big)(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} u_{1j}(x_1), \sum_{j=1}^{n} u_{2j}(x_2), \dots \sum_{j=1}^{n} u_{nj}(x_n)\right)$$

Untuk semua $(x_1, x_2, \dots x_n) \in H^n$, maka pemetaan

$$f: \mathbb{M}_n\big(B(H)\big) \to B(H^n), u \mapsto f(u)$$

adalah suatu isomorfisma*(Murphy, 1990)

Selanjutnya definisikan norm pada $\mathbb{M}_n(B(H))$sebagai berikut:

$$\|u\| = \|f(u)\|, \forall u \in \mathbb{M}_n\big(B(H)\big), f(u) \in B(H^n).$$

Ambil sembarang barisan Cauchy u_n di $\mathbb{M}_n\big(B(H)\big)$, artinya $\forall \varepsilon \geq 0, \exists K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall m, n \geq K$ berlaku $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$.

Selanjutnya karena $\|f(u_n - u_m)\| = \|f(u_n - u_m)\| = \|u_n - u_m\| < \varepsilon$ maka $f(u_n)$ merupakan barisan Cauchy di ruang vektor bernorm lengkap $B(H^n)$. Dengan demikian $f(u_n)$ konvergen di $B(H_n)$.

Misalkan $f(u_n)$ konvergen menuju $b \in B(H^n)$, artinya untuk setiap $\varepsilon \geq 0, \exists k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq k$ berlaku $\|f(u_n) - b\| < \varepsilon$.

Karena f onto, terdapat $u \in \mathbb{M}_n\big(B(H)\big) \ni b = f(u)$.

Selanjutnya $\|f(u_n) - b\| = \|f(u_n) - f(u)\| = \|f(u_n - u)\| = \|u_n - u\| < \varepsilon$. Dengan demikian barisan Cauchy u_n konvergen menuju $u \in \mathbb{M}_n\big(B(H)\big)$ jadi $\mathbb{M}_n\big(B(H)\big)$ adalah ruang bernorm lengkap.

Selanjutnya ambil sembarang $u, v \in \mathbb{M}_n\big(B(H)\big)$. Maka

i) $\|uv\| = \|f(uv)\| = \|f(u)f(v)\| \leq \|f(u)\|\|f(v)\| = \|u\|\|v\|$.

ii) $\|u^*\| = \|f(u^*)\| = \|f(u)^*\| = \|f(u)\| = \|u\|$

iii) $\|u^*u\| = \|f(u^*u)\| = \|f(u^*)f(u)\| = \|f(u^*)\|\|f(u)\| = \|f(u)^*\|\|f(u)\| = \|f(u)\|\|f(u)\| = \|u\|\|u\| = \|u\|^2$

Jadi $\mathbb{M}_n\big(B(H)\big)$ adalah suatu aljabar C*. ∎

Berdasarkan Teorema 18, setiap ruang matriks persegi $\mathbb{M}_n\big(B(H)\big)$ adalah suatu aljabar C*.

KESIMPULAN

Jika H adalah ruang Hilbert maka H^n juga merupakan ruang Hilbert. Selanjutnya karena ruang operator terbatas pada ruang Hilbert $B(H)$ adalah aljabar

C* maka $B(H^n)$ adalah aljabar C*. Ruang matriks $\mathbb{M}_n\big(B(H)\big)$ dengan entri-entri operator terbatas pada ruang Hilbert H dapat dapat diidentifikasi sebagai suatu subaljabar* dari $B(H^n)$. Selanjutnya dengan menggunakan sifat isomorfisma* dan norm yang diinduksi dari $B(H^n)$ maka $\mathbb{M}_n\big(B(H)\big)$ adalah suatu aljabar C*.

REFERENSI

Anton, H. & Rorres, C. (2011). *Elementary Linear Algebra, 10 th Edition*. New York: John Willeys & Sons.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis*, Third Edition. Canada: John Wiley & Sons.

Chien-Hung Cho, Chih-Yu Chen, *et al*. (2021). Quantum computation: Algorithms and Applications. *Chinese. Journal of Physics*. Vol. 72, 248-269, https://doi.org/10.1016/j.cjph.2021.05.001.

Drago, A. (2018). Is the C*-Algebraic Approach to Quantum Mechanics an alternative Formulation to the Dominant One. *Advances in Historical Studies*. Vol. 7(2), 58-78. https://doi.org/10.4236/ahs.2018.72005

Effros, E. G. & Ruan, Z. J. (2000) *Operator Space*. London: Oxford University Press.

Heunen. C., & Kissinger. A., (2022). The CBH Characterization Theorem Beyond Algebraic Quantum Theory. *Information and Computation*. Vol. 285, Part B, 104828. https://doi.org/10.1016/j.ic.2021.104828.

Jan Derezi´nski. (2007). *Bounded Operator, Lecture notes, version of Jan. 2007*. Warszawa: Department of Mathematical Methods in Physics, Warszawa University

Murphy, G. J. (1990). *C* Algebra and Operator Theory*. Sand Diego: Academic Press

Roman, S. (2008). *Advanced Linear Algebra, Third Edition*. New York: Springer

Rosjanuardi, R., Sumiaty. E., & Muhtar, S. (2006). *Aljabar Operator dan Mekanika Kuantum*. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.