Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.8 No.2 (2014) Hal. 26-38

UKURAN RISIKO BERDASARKAN PRINSIP PENENTUAN PREMI : *PROPORTIONAL HAZARD TRANSFORM*

Aprida Siska Lestia

Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Lambung Mangkurat.
Email : as_lestia@unlam.ac.id

ABSTRAK

Permasalahan yang akan dibahas di dalam tulisan ini adalah analisis terhadap salah satu jenis ukuran risiko yang penetapannya berdasarkan prinsip penentuan premi (*premium-based risk measures*), yaitu *Proportional Hazard* (PH) *transform*, baik berupa konsep dasar maupun sifat-sifatnya. Kemudian akan dilakukan penaksiran ukuran risiko tersebut untuk beberapa model distribusi data total klaim asuransi yang umumnya berekor tebal (*heavy tailed*). Di mana proses penaksiran dilakukan secara simulasi menggunakan metode Monte Carlo dan metode rekursif. Pembahasan yang dilakukan untuk distribusi total klaim dengan hanya akan dibatasi besar klaim berdistribusi gamma, Weibull, Pareto, lognormal, dan loglogistik dan distribusi banyak klaim yang digunakan berupa binomial, binomial negatif serta Poisson.

Kata kunci : *proportional hazard (PH) transform, ukuran risiko koheren, distribusi klaim*

1. PENDAHULUAN

Besarnya premi asuransi sebagai harga yang diminta oleh pihak perusahaan asuransi (*insurer*) untuk pengambilalihan risiko dari pemegang polis (*insured*), besarnya bergantung pada potensi kerugian yang dapat digambarkan oleh ukuran risiko (*risk measure*).

Pengukuran risiko merupakan bagian yang sangat penting dalam penentuan premi (sebagai harga yang pantas yang mampu merefleksikan kemungkinan terburuk yang akan perusahaan asuransi hadapi). Selain itu, pengukuran risiko juga bagian yang penting dalam penentuan kebutuhan modal atau kapital (*capital requirement*), yaitu berapa banyak kapital yang harus pihak perusahaan asuransi miliki sehingga kewajiban di masa yang akan datang (pembayaran klaim) dapat dijamin. Ukuran risiko juga dapat dimanfaatkan oleh perusahaan asuransi dalam melakukan evaluasi internal perusahaan dan pelaporan kepada pihak atau badan yang melakukan pengawasan terhadap berjalannya industri asuransi.

Sebelum diambil keputusan mengenai ukuran risiko apa yang akan dipakai, harus diketahui terlebih dahulu distribusi dari data klaim masa lalu yang dimiliki, yang umumnya merupakan suatu distribusi yang berekor tebal (*heavy tailed*), secara lebih tepatnya adalah ekor bagian kanan (*right tail*).

Dalam prakteknya, kesalahan pemilihan ukuran risiko dapat berakibat fatal, misalnya tidak sesuainya premi yang ditetapkan untuk pemegang polis atau tidak tepatnya pencadangan yang dilakukan sehingga perusahaan tidak memiliki dana yang cukup untuk membayar klaim-klaim bernilai ekstrim pada masa yang akan datang.

Risiko dapat dideskripsikan sebagai suatu kejadian yang mungkin terjadi atau tidak terjadi dan dapat membawa kerugian secara finansial (*risk exposure*). Ukuran risiko (*risk measure*) memberikan suatu bilangan yang dimaksudkan untuk mengukur *risk exposure* tersebut. Suatu ukuran risiko merupakan suatu pemetaan fungsional dari distribusi kerugian ke bilangan riil atau berdasarkan definisi dapat dinyatakan

Definisi 1 [3] *Jika, X merupakan peubah acak tak negatif yang menyatakan loss maka risk measure dari X, yang dinotasikan dengan $\mathcal{H}(X)$, merupakan suatu fungsi bernilai riil $\mathcal{H}: X \to \mathbb{R}$ dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan riil.*

Dalam pengukuran risiko asuransi, X merupakan peubah acak yang menyatakan kerugian yang tentunya bernilai tak negatif sehingga ukuran risiko $\mathcal{H}(X)$ juga ditentukan tak negatif.

Telah banyak dilakukan penelitian mengenai penentuan kualitas suatu ukuran risiko melalui berbagai sifat. Namun yang paling umum dijadikan tolak ukur adalah kemampuan ukuran risiko untuk memenuhi sifat *coherent* (koheren). Di mana suatu ukuran risiko dianggap sudah cukup baik jika dapat memenuhi sifat-sifat pada definisi berikut,

Definisi 2 [1] *Ukuran risiko yang koheren merupakan suatu ukuran risiko $\mathcal{H}(X)$ yang memenuhi keempat sifat berikut ini untuk sebarang variabel acak kerugian X dan Y:*

1. *Subadditivity,* $\mathcal{H}(X+Y) \leq \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$
2. *Monotonicity, Jika* $X \leq Y$ *maka* $\mathcal{H}(X) \leq \mathcal{H}(Y)$
3. *Positive Homogenity atau Scale Invariance, untuk sebarang* $a \geq 0, \mathcal{H}(aX) = a\mathcal{H}(X)$
4. *Translational Invariance , untuk sebarang kontanta* $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(X+a) = \mathcal{H}(X) + a$

Sifat *subadditivity* menyatakan bahwa risiko tidak bisa berkurang dengan cara membagi bisnis menjadi bagian-bagian kecil dan dapat berarti juga bahwa *merger* tidak akan memunculkan risiko tambahan.
Sifat *monotonicity* menyatakan bahwa jika salah satu risiko (kerugian) lebih besar dari yang lain, ukuran risiko pun akan sama (kondisinya).
Sifat *positive homogenity* menyatakan bahwa mengubah unit kerugian tidak mengubah ukuran risiko, misalnya terjadi perubahan mata uang.
Sifat *translational invariance* menyatakan bahwa, penambahan sejumlah konstanta a (positif maupun negatif) kepada risiko mengakibatkan ukuran risiko bertambah dengan jumlah yang sama.

Jika, sifat *translational invariance* diapplikasikan ke suatu ukuran risiko, $\mathcal{H}(X)$, yang koheren dan diasumsikan $X = 0$ untuk sebarang konstanta $a \geq 0$, maka $\mathcal{H}(a) = \mathcal{H}(X+a) = \mathcal{H}(X) + a = \mathcal{H}(0) + a = a$ (1)

Hasil di atas menunjukkan bahwa jika suatu risiko merupakan konstanta, maka ukuran risiko koheren dari risiko tersebut adalah konstanta yang sama. Dengan demikian, untuk ukuran risiko yang didasarkan pada prinsip penentuan premi, *loading* untuk risiko yang berupa konstanta harus sama dengan 0. Ukuran risiko koheren yang demikian dikatakan memiliki *no unjustified loading*.

Jika, risiko X mempunyai *support* yang finit dengan nilai maksimum x_U, maka suatu risiko yang didefinisikan dengan $Y = x_U$ memenuhi $X \leq Y$. Dari sifat *monotonicity*, suatu ukuran risiko koheren harus memenuhi $\mathcal{H}(X) \leq \mathcal{H}(Y) = \mathcal{H}(x_U) = x_U$. Dengan demikian, ukuran risiko terbatas di atas oleh nilai maksimum dan premium yang memenuhi kondisi tersebut dikatakan mempunyai sifat *no ripoff* **[3]**.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Total Klaim

Total klaim (*aggregate claim* atau *aggregate loss*) dari suatu portofolio merupakan jumlah semua kerugian yang terjadi dalam portofolio tersebut. Dalam *collective risk model*, total klaim diasumsikan mengikuti suatu distribusi *compound*. Misal, N merupakan peubah acak yang menyatakan banyaknya *claim* dalam portofolio dan X_i merupakan peubah acak yang menyatakan besarnya klaim dari *loss* ke-i, untuk $i = 1,2, \dots , N$. Maka total klaim dinyatakan dengan

$$S = X_1 + \cdots + X_N, \qquad N = 0,1,2, \dots \tag{2}$$

dengan $S = 0$ saat $N = 0$.

Distribusi S pada persamaan (2) diperoleh dari distribusi N dan distribusi X_i, di mana S mengikuti suatu distribusi *compound* dengan *primary distribution N* dan *secondary distribution* X. X_i *merupakan peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi identik (i.i.d), kecuali dikhususkan*. Pada model *collective risk model* ini *secondary distribution* adalah suatu distribusi kontinu. Beberapa distribusi yang umumnya digunakan dalam memodelkan distribusi banyak klaim adalah distribusi binomial, binomial negatif, dan Poisson, yang termasuk dalam suatu kelas distribusi untuk peubah acak dengan *support* berupa bilangan bulat tak negatif, yang dalam literatur aktuaria disebut dengan kelas $(a, b, 0)$, yang merupakan kelas distribusi dengan dua parameter, yaitu a dan b.

Definisi 3 [1] *Misalkan* p_k *adalah fungsi peluang dari suatu peubah acak diskrit, yang merupakan anggota dari kelas distribusi* $(a, b, 0)$, *maka terdapat konstanta* a *dan* b *sedemikian sehingga*

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \quad , k = 1,2,3, \dots \tag{3}$$

Tabel 1. Kelas $(a, b, 0)$

Distribusi	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{p_0}$
Binomial	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$
Binomial negatif	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-r}$
Poisson	0	λ	$e^{-\lambda}$

dengan p_0 merupakan nilai awal untuk persamaan rekursif **[1, halaman 81]**.

Selanjutnya, fungsi distribusi dari S dinyatakan dengan

$$F_S(x) \;= Pr(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Pr(S \leq x|N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x) \quad (4)$$

Dengan $F_X(x) = Pr(X \leq x)$ adalah fungsi distribusi dari X_i dan $p_n = \Pr(N = n)$. Sedangkan $F_X^{*n}(x)$ pada persamaan di atas merupakan *n-fold convolution* dari fungsi distribusi X, dengan

$$F_X^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

dan

$$F_X^{*k}(x) = \int_0^x F_X{}^{*(k-1)}(x-y) f_X(y) dy \quad (6)$$

untuk $k = 2,3, ...$ dan saat $k = 1$, $F_X^{*1}(x) = F_X(x)$.
Dari sini diperoleh fungsi kepadatan peluang yaitu

$$f_X{}^{*k}(x) = \int_0^x f_X{}^{*(k-1)}(x-y) f_X(y) dy \quad (7)$$

untuk $k = 2,3, ...$.
Sedangkan jika X berupa peubah acak diskrit dengan $x = 0,1,2, ...$, maka

$$F_X^{*k}(x) = \sum_{y=0}^{x} F_X{}^{*(k-1)}(x-y) f_X(y) \quad (8)$$

dan

$$f_X{}^{*k}(x) = \sum_{y=0}^{x} f_X{}^{*(k-1)}(x-y)\, f_X(y) \quad (9)$$

untuk $k = 2,3, ...$
Dari persamaan (4) diperoleh fungsi kepadatan peluang dari S yaitu

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{*n}(x) \quad (10)$$

Karena total klaim berdistribusi *compound*, maka fungsi pembangkit peluang dari S berupa

$$P_S(z) = P_N[P_X(z)] \quad (11)$$

[1, halaman 140-141].

2.2 METODE REKURSIF

Metode alternatif yang dapat digunakan agar evaluasi total klaim, yang berupa fungsi konvolusi, dapat dilakukan dengan lebih cepat (dengan mengurangi banyaknya perhitungan) di antaranya adalah metode rekursif. Misalkan, peubah acak X yang menyatakan besar klaim mempunyai fungsi kepadatan peluang $f_X(x)$ yang terdefinisi pada $0,1,2, \dots, m$, di mana m menyatakan pembayaran terbesar yang mungkin terjadi dan dapat bernilai takhingga (*infinite*). Selanjutnya, misalkan distribusi banyak klaim, p_k , merupakan anggota dari kelas $(a, b, 0)$ sehingga memenuhi definisi 3 maka teorema berikut berlaku,

Teorema 4 *Untuk kelas (a,b,0)* ,

$$f_S(x) = \frac{\sum_{y=1}^{x \wedge m} \left(a + \frac{by}{x}\right) f_X(y) f_S(x-y)}{1 - a f_X(0)} \quad (12)$$

dengan $x \wedge m = \min(x, m)$.

Pembuktian dapat dilihat di **[1**, **halaman 91]**

Perlu diperhatikan bahwa distribusi *severity* tidak mempunyai peluang di titik nol, sehingga penyebut dari persamaan (12) sama dengan 1 **[1,halaman 162]**.

Metode rekursif dibangun untuk distribusi diskrit, sedangkan distribusi besar klaim biasanya merupakan suatu distribusi kontinu. Sehingga diperlukan suatu cara untuk mendiskritkan distribusi besar klaim tersebut yaitu agar peubah acak besar klaim terdefinisi pada bilangan bulat tak negatif, yang disebut dengan distribusi aritmatika. Metode yang digunakan untuk mengkonstruksi distribusi aritmatika adalah metode pembulatan (*rounding method*). Cara ini dilakukan untuk menghindari perhitungan yang rumit dari fungsi kepadatan peluang total klaim. Pendekatan dilakukan dengan menggunakan suatu unit pengali, yang biasanya berupa *monetary unit* h, yang dapat bernilai $10, 100, 1000, \dots$. Misalkan f_j menyatakan peluang pada titik h, $j = 0,1,2, \dots$. Maka tetapkan

$$f_0 = \Pr\left(X < \frac{h}{2}\right) = F_X\left(\frac{h}{2} - 0\right) \tag{13}$$

$$\begin{aligned} f_j &= \Pr\left(jh - \frac{h}{2} \leq X < jh + \frac{h}{2}\right) \\ &= F_X\left(jh + \frac{h}{2} - 0\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2} - 0\right),\ j = 1,2, \dots \end{aligned} \tag{14}$$

Metode ini membagi peluang antara $(j+1)h$ dan jh serta menetapkannya ke $j+1$ dan j **[1, halaman 167]**.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur. Metodologi yang digunakan adalah mengumpulkan bahan tulisan mengenai ukuran risiko *Proportional Hazard Transform*. Pada tahap awal dipelajari tentang konsep dasar dari ukuran risiko, sifat koheren pada ukuran risiko, dan metode-metode simulasi. Konsep dasar ini yang nantinya akan digunakan dalam pemaparan jenis ukuran risiko *Proportional Hazard Transform*, yang dikenal dengan istilah *Risk Adjusted Premium*, baik konsep dasar maupun sifat-sifatnya. Selanjutnya, dilakukan perhitungan ukuran risiko untuk beberapa contoh distribusi kerugian (*total loss*) dilakukan secara simulasi. Hasil perhitungan tersebut akan dikaji dalam pembahasan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 *Proportional Hazard Transform* dan *Risk Adjusted Premium (PH-Mean)*

Suatu peubah acak tak negatif, X mempunyai fungsi dekumulatif (fungsi *survival*) sebagai berikut

$$S_X(t) = \Pr(X > t) = 1 - F_X(t) \tag{15}$$

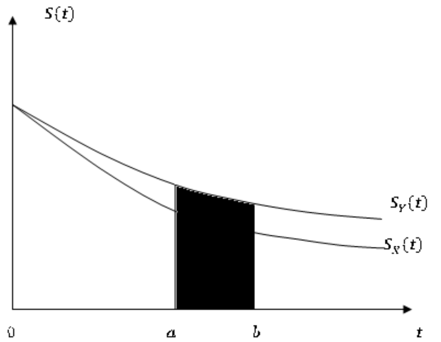
Definisi 5 *Diberikan suatu best-estimate loss distribution,* $S_X(t) = \Pr(X > t)$, *untuk sebarang indeks* r , *di mana* $0 \leq r \leq 1$. *Proportional hazard (PH) transform menyatakan pemetaan*

$$S_Y(t) = [S_X(t)]^r \tag{16}$$

dan PH-mean menyatakan ekspektasi atas distribusi yang ditransformasi , yaitu

$$\mathcal{H}(X) = \int_0^\infty S_Y(t)dt = \int_0^\infty [S_X(t)]^r\, dt \tag{17}$$

PH-*mean* yang diperkenalkan oleh Wang ini menunjukkan premi yang telah dipengaruhi risiko atau dikenal dengan istilah *risk-adjusted premium*. Secara umum, untuk $0 \leq r \leq 1$, ukuran risiko PH-*transform* mempunyai sifat $E(X) \leq \mathcal{H}(X) \leq \max(X)$. Saat r menurun dari satu menuju nol, $\mathcal{H}(X)$ meningkat dari *expected loss*, $E(X)$, ke *maksimum possible loss*, $\max(X)$. Artinya, PH-*mean* nilainya akan selalu lebih besar dibandingkan premi murni (*pure premium*) atau $E(X) = \int_0^\infty S_X(t)dt$ **[5, halaman 303]**.



Gambar 1. Margin untuk ketidakpastian parameter dari PH-*transform*

Pada gambar di atas, semakin kecil nilai index r akan menyebabkan rentang yang semakin besar antara kurva S_Y dan S_X.

Indeks r , yang disebut pula sebagai *exogenous index* atau index yang dihubungkan dengan faktor eksternal, dapat ditetapkan berdasarkan tingkat kepercayaan dalam mengestimasi distribusi kerugian. Semakin ambigu situasi, maka semakin rendah nilai dari r yang harus digunakan. Tingkat kepercayaan mengenai taksiran terbaik (data masa lalu) mempunyai dua skenario, yaitu:

1. Tidak ambigu, di mana terdapat keambiguan kecil mengenai *best-estimate loss distribution.*
2. Ambigu, yaitu terdapat keambiguan yang pantas dipertimbangkan mengenai *best-estimate loss distribution*.

Pada tabel berikut ini ditunjukkan berbagai indeks r berdasarkan perbedaan level keambiguan.

Tabel 2. Penentuan Indeks r Berdasarkan Level Keambiguan

Level keambiguan	**Indeks r**
Tidak ambigu	$0.96 - 1.00$
Sedikit ambigu	$0.90 - 0.95$
Cukup ambigu	$0.80 - 0.89$
Ambigu (*highly*)	$0.50 - 0.79$
Sangat ambigu (*extremely*)	$0.00 - 0.49$

[5, halaman 294].

Perlu diperhatikan bahwa berbagai indeks r yang terdapat pada tabel di atas tidak mutlak berlaku untuk semua situasi. Terdapat cukup banyak faktor yang mendasari penentuan indeks r seperti investasi dan operasional perusahaan. Oleh karena itu, diperlukan kajian yang lebih mendalam untuk dapat menentukan nilai r yang paling proporsional dengan keadaan perusahaan. Meskipun demikian sebagai kajian awal, nilai r yang digagas oleh Wang (1997) pada tabel di atas dapat dijadikan referensi yang cukup baik dalam melakukan penentuan PH-*mean*.

4.2 Sifat Koheren pada *PH-Transform*

Berikut akan dijabarkan pembuktian bahwa $\mathcal{H}(X)$ pada definisi 5 memenuhi keempat sifat pada definisi 2.

i. Ukuran risiko berdasarkan PH-*transform* memenuhi aksioma *subadditivity*, seperti yang termuat di dalam teorema berikut ini,

   Teorema 2.14 *Untuk sebarang dua peubah acak tak negatif X dan Y tanpa memperhatikan kebergantungan, pertidaksamaan berikut berlaku.*

   $$\mathcal{H}(X+Y) \le \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y)$$

   Pembuktian teorema ini dapat dilihat di **[4]**.

ii. Jika $X \le Y$, maka $\Pr(X > t) \le \Pr(Y > t)$ jika dan hanya jika $S_X(t) \le S_Y(t)$
   Untuk $0 \le r \le 1$, pertidaksamaan tersebut ekuivalen dengan $[S_X(t)]^r \le [S_Y(t)]^r$
   dan $\int_0^\infty [S_X(t)]^r\,dt \le \int_0^\infty [S_Y(t)]^r\,dt$ jika dan hanya jika $\mathcal{H}(X) \le \mathcal{H}(Y)$
   Artinya, ukuran risiko ini memenuhi sifat *monotonicity*.

iii. Untuk sebarang peubah acak X dan Y serta sebarang $a \ge 0$. Misalkan $Y = aX$, maka

   $$S_Y(y) = \Pr(Y > y) = \Pr(aX > y) = \Pr\left(X > \frac{y}{a}\right) = S_X(y/a)$$

   Sehingga $\mathcal{H}(Y) = \int_0^\infty \left[S_X\left(\frac{y}{a}\right)\right]^r dy$
   Misalkan $t = \frac{y}{a}$, maka $adt = dy$. Akibatnya

   $$\mathcal{H}(Y) = \int_0^\infty [S_X(t)]^r a\,dt = a\int_0^\infty [S_X(t)]^r dt = a\mathcal{H}(X)$$

   Dengan demikian sifat *positive homogenity* atau *scale invariance* dipenuhi.

iv. Misalkan $Y = X + b$, maka

   $$S_Y(y) = \begin{cases} 1 & , y < b \\ S_X(y-b) & , b \le y \end{cases}$$

   Oleh karena itu, $\mathcal{H}(Y) = \int_0^\infty [S_Y(y)]^r\,dy = \int_0^b 1\,dy + \int_b^\infty [S_X(y-b)]^r\,dy$
   Sehingga $\mathcal{H}(X+b) = b + \mathcal{H}(X)$.
   Jadi, *translational invariance* dipenuhi.

Dari i, ii, iii, dan iv terbukti bahwa PH-*mean* merupakan suatu ukuran risiko yang koheren.

4.3 *Premium-based Risk Measures* untuk Beberapa Distribusi Kerugian (Total Klaim)

Prosedur penentuan taksiran ukuran risiko PH-*mean* dengan simulasi menggunakan metode-metode yang telah dipaparkan sebelumnya, dilakukan dengan algoritma berikut ini :

1) Menyatakan parameter distribusi banyak klaim ke dalam parameter a dan b dalam kelas $(a, b, 0)$, hal ini bertujuan untuk mempermudah perhitungan menggunakan fungsi rekursif pada persamaan (12).
2) Melakukan diskritisasi terhadap distribusi besar klaim, X, dengan metode *rounding* dengan menggunakan $h = 1000$ dan $h = 10000$.
   a. Misalkan peubah acak Y merupakan hasil konstruksi dari peubah acak X, yang berdistribusi aritmatika. Fungsi peluang dari Y, f_j, terdefinisi pada jh, untuk $j = 0,1,2, \dots, m/h$.
   b. Berdasarkan persamaan (13), peluang peubah acak Y di titik nol untuk $h = 1000$ adalah
   $$f_0 = F_X\left(\frac{h}{2} - 0\right) = F_X\left(\frac{1000}{2} - 0\right) = F_X(500)$$
   Sedangkan peluang pada titik jh, untuk $j = 1,2, \dots, m/h$ adalah
   $$\begin{aligned} f_j &= F_X\left(jh + \frac{h}{2} - 0\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2} - 0\right) \\ &= F_X\left(1000j + \frac{1000}{2} - 0\right) - F_X\left(1000j - \frac{1000}{2} - 0\right) \\ &= F_X(1000j + 500) - F_X(1000j - 500),\ j = 1,2, \dots, m/h \end{aligned}$$
   Hal yang serupa dilakukan pula untuk penentuan peluang peubah acak Y jika dipilih $h = 10000$.
3) Selanjutnya akan ditentukan peluang untuk peubah acak total klaim S, dengan menggunakan fungsi peluang besar klaim yang sudah didiskritisasi sehingga fungsi peluang untuk S terdefinisi pada jh, dengan $j = 0,1,2, \dots, m/h$ dan jika h yang dipakai adalah 1000 maka fungsi peluang untuk S, $\Pr(S = jh)$, dibangkitkan untuk $j = 0,1,2, \dots, m/1000$, dengan m menyatakan nilai maksimum klaim dari data .
4) Nilai peluang peubah acak S di titik nol dapat diperoleh dari fungsi pembangkit peluangnya. Berdasarkan persamaan (11), dapat dinyatakan bahwa
   $$P_S(0) = P_N[P_Y(0)]$$
   dan karena fungsi peluang dari suatu peubah acak bisa diturunkan dari fungsi pembangkit peluangnya, diperoleh
   $$P^{(k)}(0) = p_k k! \Leftrightarrow P(0) = p_0 \cdot 0! = p_0$$
   $P^{(0)}(0) = P(0)$, artinya turunan ke- 0 dari $P(0)$ adalah $P(0)$ itu sendiri. Sehingga
   $$f_S(0) = P_S(0) = P_N[f_0]$$
   Dengan $P_N(\cdot)$ menyatakan fungsi pembangkit peluang dari distribusi banyak klaim dan f_0 menyatakan peluang distribusi aritmatika Y sebagai hasil diskritisasi dari distribusi besar klaim X di titik nol.
5) Untuk peluang peubah acak S di titik 1 diperoleh dari formula rekursif pada persamaan (12) , yaitu

$$f_S(1) = \frac{(a+b)f_1 f_S(0)}{1-af_0}$$

Sedangkan di titik-titik lainnya, peluang S dapat ditentukan dengan

$$f_S(j) = \frac{\sum_{y=1}^{j\wedge m}\left(a+\frac{by}{j}\right)f_y f_S(j-y)}{1-af_0}$$

6) Fungsi distribusi untuk peubah acak S diperoleh dari fungsi peluangnya, yaitu $F_S(0) = f_S(0)$ dan $F_S(j) = F_S(j-1) + f_S(j)$
7) Seperti yang diketahui, fungsi *survival* dapat diperoleh dari fungsi distribusi, yaitu
   $S_S(j) = 1 - F_S(j)$, untuk $j = 0,1,2,\dots,m/h$.
8) Sebelum dilakukan penaksiran PH-*mean* dengan menggunakan metode Monte Carlo, terlebih dahulu dilakukan transformasi terhadap distribusi total klaim dengan indeks r, sehingga diperoleh fungsi *survival* dari distribusi hasil transformasi, $\tilde{S}$, yaitu
   $S_{\tilde{S}}(j) = [S_S(j)]^r$, untuk $j = 0,1,2,\dots,m/h$.
9) Nilai PH-*mean*, berdasarkan persamaan (17) pada definisi 5, adalah

$$\mathcal{H}(X) = \int_j S_{\tilde{S}}(j)dj = \int_j [S_S(j)]^r dj$$

   Berdasarkan Metode Monte Carlo **[3, halaman 425]** , maka nilai integral di atas dapat ditaksir dengan

$$\widehat{\mathcal{H}(X)} = \frac{1}{(m/h)}\sum_{j=1}^{m/h}\frac{[S_S(j)]^r}{f_S(j)}$$

10) Proses simulasi untuk menentukan PH-*mean* untuk distribusi total klaim ini juga diulang sebanyak 50 kali dan diambil rataannya sebagai hasil akhir.

Pada penelitian ini, dilakukan analisis terhadap model dari suatu data *real* asuransi kendaraan bermotor roda empat dalam satu periode. Data terdiri dari lima kategori berdasarkan besar uang pertanggungannya, selanjutnya kelima tipe asuransi ini masing-masing dibagi lagi berdasarkan jenis klaimnya, yaitu *total loss* seperi yang tertera pada Tabel 3 dan *partial loss* seperti yang ditampilkan pada Tabel 4. Distribusi banyak klaim maupun distribusi besar klaim yang merupakan unsur penyusun distribusi total klaim, dimodelkan secara terpisah.

Tabel 3. Model untuk Banyak Klaim dan Besar Klaim untuk Jenis Klaim *Total Loss*

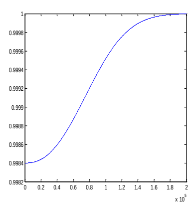
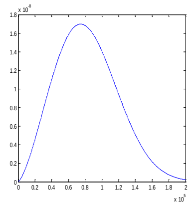
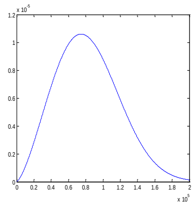
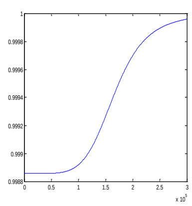
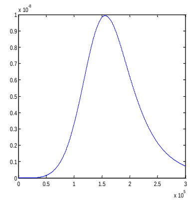
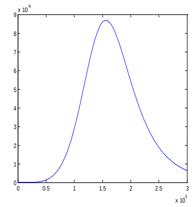
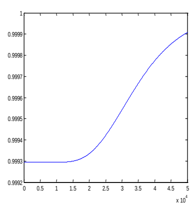
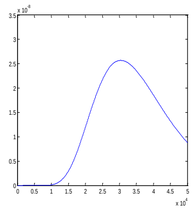
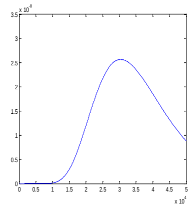
Jenis Pertanggungan	**Banyak Klaim**		**Besar Klaim**	
	Distribusi	**Estimasi Parameter**	**Distribusi**	**Estimasi Parameter**
Tipe I : 0 – 150 juta	Bernoulli	$\hat{p}$=0,00160094	Weibull	$\hat{\tau}$=2,428; $\hat{\theta}$=93.132.339
Tipe II : 151 – 300 juta	Bernoulli	$\hat{p}$=0,00114360	Loglogistik	$\hat{\gamma}$=5,6036; $\hat{\theta}$=166.610.000
Tipe III : 301 – 500 juta	Bernoulli	$\hat{p}$=0,00070597	Lognormal	$\hat{\mu}$=19,65; $\hat{\sigma}$=0,3397
Tipe IV : 501 – 800 juta	Bernoulli	$\hat{p}$=0,00081143	Eksponensial	$\hat{\theta}$=349.012.120
Tipe V : > 800 juta	Bernoulli	$\hat{p}$=0,00055648	Eksponensial	$\hat{\theta}$=1.146.909.222

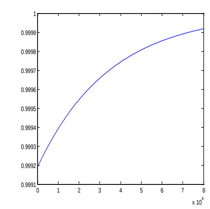
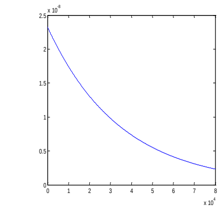
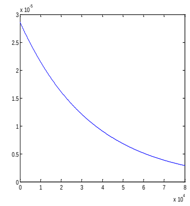
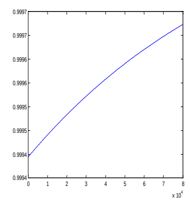
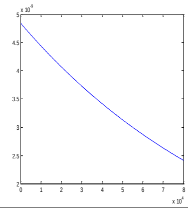
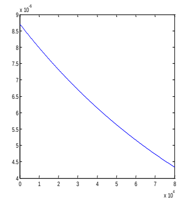
Tabel 4. Model untuk Banyak Klaim dan Besar Klaim untuk Jenis Klaim *Partial Loss*

Jenis Pertanggungan	Banyak Klaim		Besar Klaim	
	Distribusi	Estimasi Parameter	Distribusi	Estimasi Parameter
Tipe I : 0 – 150 juta	Binomial Negatif	$\hat{r}$=4,0265; $\hat{\beta}$=0,1299	Loglogistik	$\hat{\gamma}$=2,1848; $\hat{\theta}$=2.451.400
Tipe II : 151 – 300 juta	Binomial Negatif	$\hat{r}$=6,4708; $\hat{\beta}$=0,0988	Loglogistik	$\hat{\gamma}$=1,9898; $\hat{\theta}$=2.671.000
Tipe III : 301 – 500 juta	Binomial Negatif	$\hat{r}$=3,8000; $\hat{\beta}$=0,1515	Loglogistik	$\hat{\gamma}$=1,7545; $\hat{\theta}$=3.220.500
Tipe IV : 501 – 800 juta	Binomial Negatif	$\hat{r}$=3,1801; $\hat{\beta}$=0,1765	Loglogistik	$\hat{\gamma}$=1,6729; $\hat{\theta}$=3.236.500
Tipe V : > 800 juta	Binomial Negatif	$\hat{r}$=0,3337; $\hat{\beta}$=0,3309	Lognormal	$\hat{\mu}$=15,02; $\hat{\sigma}$=1,095

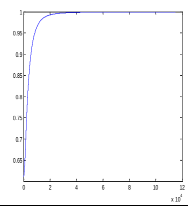
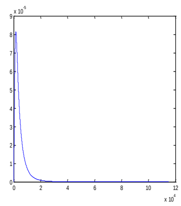
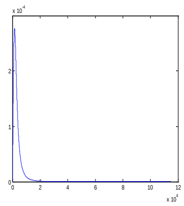
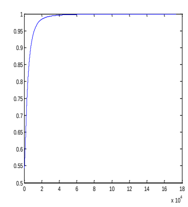
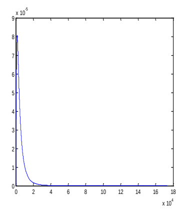
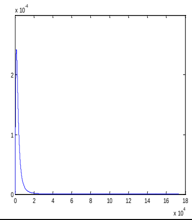
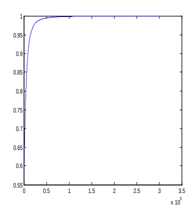
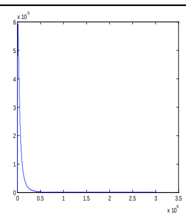
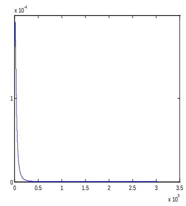
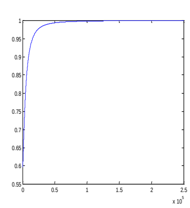
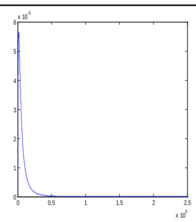
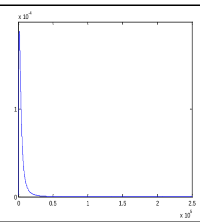
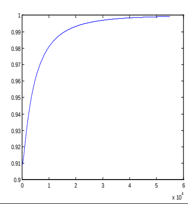
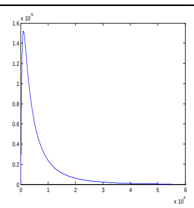
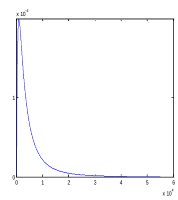
Pada jenis klaim *total loss*, kerugian yang dijamin adalah kerusakan minimal 80% dan kehilangan sehingga pembayaran klaim oleh perusahaan asuransi berupa penggantian uang pertanggungan (kendaraan yang diasuransikan). Oleh karena itu, klaim-klaim yang datang dari jenis ini bernilai besar namun dengan peluang yang kecil. Sedangkan untuk jenis *partial loss*, kerugian yang dijamin adalah yang berasal dari kerusakan parsial sehingga klaim bernilai kecil pada jenis ini mempunyai peluang yang lebih besar dibandingkan klaim bernilai besar. Kurva fungsi ditribusi dan fungsi kepadatan peluang distribusi total klaim, S, serta fungsi kepadatan peluang distribusi besar klaim X, untuk $x > 0$ dari model total klaim disajikan pada tabel berikut ini.

Tabel 5 Kurva Fungsi Peluang untuk Jenis Klaim *Total Loss*

Jenis Pertanggungan	$F_S(s)$	$f_S(s)$	$f_X(x)$
Tipe I			
Tipe II			
Tipe III			

Tipe IV			
Tipe V			

Tabel 6. Kurva Fungsi Peluang untuk Jenis Klaim *Partial Loss*

Jenis Pertanggungan	$F_S(s)$	$f_S(s)$	$f_X(x)$
Tipe I			
Tipe II			
Tipe III			
Tipe IV			
Tipe V			

Dari kurva fungsi kepadatan peluang pada kedua tabel di atas dapat dilihat bahwa semua model distribusi merupakan distribusi yang *skewed to the right*.

Jenis klaim *total loss* merupakan distribusi dengan ekor yang tebal. Hal tersebut terlihat dari bentuk kurva fungsi kepadatan peluang yang menunjukkan peluang nilai-nilai klaim besar yang tinggi (data terpusat di tengah). Berbeda dengan jenis klaim *partial loss* yang dari kurva distribusinya terlihat bahwa data terpusat pada nilai-nilai klaim kecil dan klaim bernilai besar mempunyai peluang cukup kecil.

Nilai-nilai taksiran parameter pada model distribusi klaim akan dipakai oleh penulis untuk menentukan ukuran risiko PH-*mean* dari setiap jenis pertanggungan. Pada tabel berikut ini disajikan nilai *mean* dari distribusi total klaim S, yang diperoleh dari hasil simulasi menggunakan algoritma yang telah dipaparkan sebelumnya.

Tabel 7. Nilai Premi Murni dan Taksiran PH-*mean* dari Hasil Simulasi

Jenis Pertang-gungan	***Total Loss***			***Partial loss***		
	Premi murni E(S)	$r = 0{,}3$	$r = 0{,}5$	***Premi murni E(S)***	$r = 0{,}3$	$r = 0{,}5$
Tipe I	132.203,6	24.620.000	6.571.500	1.859.939,013	7.738.000	1.459.700
Tipe II	200.895,1012	$1{,}93 \cdot 10^{20}$	$4{,}97 \cdot 10^{19}$	2.696.082,130	10.890.000	2.163.500
Tipe III	255.700,016	$6{,}94 \cdot 10^{188}$	$1{,}63 \cdot 10^{188}$	3.401.668,280	19.896.000	4.080.800
Tipe IV	283.198,90	12.601.000	2.294.000	3.579.026,854	10.796.000	2.530.100
Tipe V	638.232,04	29.989.000	6.094.000	670.559,257	127.620.000	78.673.000

Hasil pada tabel di atas menunjukkan bahwa selisih antara rataan peubah acak hasil transformasi (PH-*mean*) dengan rataan peubah acak total klaim ($E(S)$) akan semakin besar dengan semakin kecilnya nilai r.

Taksiran PH-*mean* untuk tipe II dan III dari jenis *total loss* menunjukkan nilai yang sangat besar dan kurang realistis, sehingga ukuran risiko PH-*transform* untuk tipe ini bukan merupakan pilihan yang tepat karena mengharuskan penetapan cadangan dengan nilai yang terlalu besar. Namun, besarnya hasil taksiran yang diperoleh sesuai dengan karakteristik PH-*transform* yang memberikan *loading* yang besar kepada premi murni dengan semakin kecilnya r yang ditetapkan (mendekati 0). Apalagi jika dilihat dari kurva fungsi kepadatan peluang tipe III yang memperlihatkan bahwa jenis ini memiliki ekor yang lebih tebal dibandingkan dengan keempat tipe lainnya dari jenis klaim *total* loss. Sehingga dengan dilakukannya transformasi terhadap fungsi *survival*, tidak menutup kemungkinan integrasi terhadap hasil transformasi menunjukkan nilai yang sangat besar.

Untuk Tipe I, IV, dan V dari jenis *total loss*, taksiran PH-*mean* yang diperoleh melalui simulasi dengan $r = 0{,}5$ jauh lebih besar dibandingkan premi murni. Apalagi saat ditetapkan $r = 0{,}3$, taksiran PH-*mean* yang diperoleh mencapai 186 kali lipat premi murni (untuk tipe I). Berbeda halnya dengan hasil dari simulasi untuk jenis *partial loss* tipe I, II, III, dan IV, di mana besarnya taksiran PH-*mean* yang diperoleh untuk $r = 0{,}5$ hampir sama dengan premi murni dan untuk $r = 0{,}3$, hasil yang diperoleh hanya sekitar tiga sampai enam kali lipat dari premi murni. Sedangkan untuk tipe V dari jenis klaim *partial loss*, taksiran PH-*mean* yang diperoleh sangat besar dibandingkan $E(S)$. Dari kurva distribusinya, dapat dilihat bahwa jenis pertanggungan ini mempunyai peluang relatif besar untuk nilai-nilai klaim besar, dibandingkan keempat tipe lainnya.

5. KESIMPULAN

Taksiran PH-*mean* yang diperoleh pada jenis *total loss* mampu menggambarkan dengan baik kondisi ekor distribusi klaim. Seperti yang diketahui, besar klaim untuk jenis *total loss* bernilai besar, sesuai dengan uang pertanggungan. Oleh karena itu, hasil taksiran PH-*mean* yang besar sesuai dengan kebutuhan pengelolaan risiko untuk jenis asuransi ini.

Secara teori, penetapan $r = 0{,}5$ sudah memperlihatkan asumsi ekstrim, namun pada prakteknya tidak menutup kemungkinan asumsi tersebut masih belum mampu memberikan gambaran yang baik mengenai risiko yang dimiliki. Misalnya pada kasus distribusi dengan ekor sangat tebal, di mana klaim dengan nilai sangat besar mempunyai peluang yang besar pula.

Penetapan nilai indeks r tidak bersifat mutlak, artinya semua nilai tersebut bergantung pada kondisi data asuransi yang dianalisis serta berbagai faktor eksternal lainnya seperti dana operasional, investasi perusahaan, pajak, dan profit. Penetapan r yang kecil (mendekati nol) akan memberikan *safety margin* yang (sangat) besar.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Klugman S., Panjer H. and Willmot G. (2004). *Loss Models:From Data to Decisions (2nd edition).*Wiley

[2] Ross, S. (2006). *Simulations (4th edition)* . Elsevier Academic Press

[3] Tse, Yiu-Kuen. (2009). *Nonlife Actuarial Models (Theory, Methods and Evaluation).*Cambridge University Press.

[4] Wang, S. (1995). *Insurance Pricing and Increased Limits Ratemaking by Proportional Hazards Transforms*. Elsevier Insurance : Mathematics and Economics 17, 43-54.

[5] Wang, S. (1997). *Implementation of* PH-*transforms in Ratemaking*. Casualty Actuarial Society