Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 12-18

KEKONVERGENAN SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE SATU MENGGUNAKAN METODE ITERASI VARIASIONAL

Dita Apriliani, Akhmad Yusuf, M. Mahfuzh Shiddiq
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani Km. 36, Banjarbaru, Kalimantan Selatan
Email: dita.aprilia10@gmail.com

ABSTRACT

Ordinary differential equation (ODE) is an equation involving derivatives of one or more dependent variables with respect to single independent variable. ODE is grouped into two part; linear and nonlinear. There are some methods to determine the solution of nonlinear ODE, one of them is Variational Iteration Method. This method create a correction functional using general Lagrange multiplier and a restricted variational. The purpose of this research is to prove convergence and solution ordinary differential equation using variational iteration method. This study was conducted by literary method. This result is show that If operator of correction satisfy contraction inequality $\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|$ where $0 < \gamma < 1$, then series solution from differential equation nonlinear converge to exact solution and can be used to determine the nonlinear solution.

Keyword: *ordinary differential equation of first order, variational iteration method, convergence*.

ABSTRAK

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. PDB dibagi menjadi dua kelompok yaitu PDB linier dan PDB nonlinier. Terdapat berbagai metode untuk menentukan solusi dari PDB nonlinier, salah satunya yaitu Metode Iterasi Variasional. Metode ini membentuk sebuah fungsi koreksi menggunakan pengali Lagrange dan variasi terbatas. Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan kekonvergenan dan solusi persamaan diferensial biasa orde satu menggunakan metode iterasi variasional. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Hasil penelitian ini menunjukan bahwa jika operator koreksi dari persamaan diferensial non-linier memenuhi ketaksamaan kontraksi $\|v_{k+1}\| \leq \gamma \|v_k\|$ dimana $0 < \gamma < 1$,maka deret solusi dari persamaan diferensial non-linier konvergen menuju solusi eksak dan dapat digunakan untuk menentukan solusi PDB nonlinier.

Kata Kunci: *persamaan diferensial biasa orde satu, metode iterasi variasional, konvergen*.

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari satu atau lebih varibel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas [5]. Aplikasi dari persamaan diferensial banyak digunakan dalam memodelkan berbagai masalah seperti masalah perambatan gelombang, penyakit endemik dan sebagaianya (lihat [1,6]). Metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinear orde satu adalah metode Iterasi Variasional yang pertamakali diusulkan oleh Ji-Huan He untuk menyelesaikan berbagai masalah persamaan diferensial [2]. Metode iterasi variasional merupakan suatu metode yang terdiri dari pemecahan persamaan menjadi bagian linier dan nonlinier dengan membentuk suatu persamaan operator dalam bentuk $\mathrm{F(u) = G}$, dimana G merupakan syarat non-homogen dan $\mathrm{F(u)}$

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 12-18

merupakan penguraian antara operator linier dan operator nonlinier dalam bentuk $\mathrm{L(u) + N(u)}$, dimana L merupakan suatu operator linier dan N adalah operator nonlinier.Solusi dari persamaan diferensial biasa orde satu menggunakan metode iterasi variasional adalah dengan membentuk suatu fungsi koreksi dari persamaan diferensial dengan menggunakan pengali Lagrange, dimana iterasi-iterasi yang dihasilkan dari fungsi koreksi membentuk suatu barisan fungsi. Agar nilai solusi pendekatan mendekati nilai solusi yang sebenarnya, maka nilai solusi pendekatan haruslah konvergen ke solusi sebenarnya. Artikel ini mengkaji kembali Zaid (2010) tentang kekonvergenan solusi menggunakan metode Iterasi Variasional.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.1.1[7]

Suatu persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas disebut Persamaan Diferensial Biasa.

Definisi persamaan diferensial orde satu dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.1.2[7]

Diberikan persamaan diferensial orde satu

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{... } (2.1)$$

dimana f fungsi kontinu di x dan y dalam domain D pada bidang xy; dan misalkan (x_0, y_0) *titik pada D. Masalah nilai awal dihubungkan dengan persamaan* (2.1) *adalah untuk menentukan solusi* ϕ *pada persamaan diferensial* (2.1), *didefinisikan pada beberapa interval riil memuat* x_0, *dan memenuhi kondisi awal*

$$\emptyset(x_0) = y_0 \qquad \text{... } (2.2)$$

dalam notasi biasanya disingkat, masalah nilai awal ini bisa ditulis,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),\, y(x_0) = y_0.$$

2.2 Ruang Hilbert

Ruang *Hilbert* adalah ruang hasil kali dalam yang lengkap. Definisi ruang hasil kali dalamsebagai berikut:

Definisi 2.2.1 [3]

Ruang vector kompleks X disebut ruang hasil kali dalam jika ada fungsi $\langle .,. \rangle$ *pada* $X \times X \to \mathbb{C}$ *sehingga untuk setiap* $x, y, z \in X$ *dan* $\alpha \in \mathbb{C}$ *berlaku:*

(i) $\langle x,x \rangle \geq 0$ *dan* $\langle x,x \rangle = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$

(ii) $\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$

(iii) $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x,y \rangle$

(iv) $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$

Fungsi $\langle .,. \rangle$ *disebut hasil kali dalam.*

Definisi 2.2.2[3]

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 12-18

Ruang hasil kali dalam yang lengkap disebut ruang Hilbert. Ruang hasil kali dalam sering kali disebut ruang pre-Hilbert.

3. METODOLOGI

Metode penelitian ini adalah studi literatur. Prosedur penelitian ini adalah mengumpulkan dan mengkaji bahan yang berkaitan dengan persamaan diferensial biasa orde satu, metode iterasi variasional dan kekonvergenan. Kemudian membentuk operator persamaan diferensial biasa orde satu dengan nilai awal, menentukan fungsi koreksi dari PDB orde satu, menentukan nilai pengali Lagrange umum, menentukan solusi iterasi metode iterasi variasional dari PDB orde satu dengan nilai awal dan membuktikan kekonvergenan barisan iterasi dari metode iterasi variasional pada PDB orde satu.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Metode Iterasi Variasional

Untuk menggambarkan konsep dasar dari metode iterasi variasional, diawali dengan menentukan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$Lu(t) + Nu(t) = g(t), \qquad t > 0. \qquad \cdots (4.1)$$

Dimana L adalah operator linier, N adalah operator nonlinier dan $g(t)$ adalah syarat non-homogen. Metode Iterasi Variasional dapat dibentuk dan dianalisis dengan membentuk sebuah fungsi koreksi sebagai berikut:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(s)\{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\}\, ds\ , \quad n \geq 0 \qquad \cdots (4.2)$$

dimana λ adalah pengali Lagrange umum, indeks n menunjukkan pendekatan ke n, $\tilde{u}$ dianggap sebagai variasi terbatas dan $\delta\tilde{u} = 0$.

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(s)\{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\}\, ds\ \cdots (4.3)$$

Diperoleh nilai pengali Lagrange yaitu

$$\lambda = -1 \qquad \cdots (4.4)$$

Kemudian disubtitusikan persamaan (4.4) ke persamaan (4.2) sehingga diperoleh:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\}\, ds \cdots (4.5)$$

Solusi pendekatan yaitu $u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$.

Misalkan:

$$A[u] = -\int_0^t \{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\}\, ds\ \cdots (4.6)$$

Diberikan pendekatan awal $v_0 = u_0$ dan diperoleh solusi koreksi berupa v_n, dimana $n = 0,1,2,\cdots$ yaitu:

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 12-18

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = A[v_0] \\ v_2 = A[v_0 + v_1] \\ \vdots \\ v_{n+1} = A[v_0 + v_1 + \cdots + v_n] \end{cases} \quad \cdots (4.7)$$

4.2 Teorema Kekonvergenan pada Metode Iterasi Variasional

Teorema 4.2.1 [7]

Misalkan diberikan persamaan (4.6), *dimana A adalah operator dari ruang Hilbert H ke H, maka deret solusi dari persamaan* (4.1) *adalah* $u(t) = \sum_{k=o}^{\infty} v_k(t)$ *konvergen jika terdapat* $0 < \gamma < 1$*sedemikian sehingga:*

$$\|A[v_0 + v_1 + \cdots + v_{k+1}]\| \leq \gamma \, \|A[v_0 + v_1 + \cdots + v_k]\| \textit{yaitu}$$
$$\|v_{k+1}\| \leq \gamma \, \|v_k\| \quad \ldots (4.8)$$

untuk setiap $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Bukti:

Dengan menggunakan persamaan (4.6) dan (4.7) akan dibuktikan bahwa deret solusi $u(t) = \sum_{k=o}^{\infty} v_k(t)$ konvergen.

Didefinisikan barisan $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ sebagai berikut:

$$\begin{cases} S_0 = v_0 \\ S_1 = v_0 + v_1 \\ S_2 = v_0 + v_1 + v_2 \\ \vdots \\ S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n \end{cases}$$

Perhatikan bahwa:

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|v_{n+1}\| \leq \gamma\|v_n\| \leq \gamma^2\|v_{n-1}\| \leq \cdots \leq \gamma^{n+1}\|v_0\| \quad \ldots (4.9)$$

Untuk setiap $n, j \in \mathbb{N}, n \geq j$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \|S_n - S_j\| &= \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \cdots + (S_{j+1} - S_j)\| \\ &\leq \|(S_n - S_{n-1})\| + \|(S_{n-1} - S_{n-2})\| + \cdots + \|(S_{j+1} - S_j)\| \\ &\leq \gamma^n\|v_0\| + \gamma^{n-1}\|v_0\| + \cdots + \gamma^{j+1}\|v_0\| \\ &= \frac{1 - \gamma^{n-j}}{1 - \gamma} \gamma^{j+1}\|v_0\| \end{aligned} \quad \ldots (4.10)$$

Karena $0 < \gamma < 1$, maka diperoleh:

$$\lim_{n,j \to \infty} \|S_n - S_j\| = 0$$

Jadi $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy diruang *HilbertH* dan deret solusi yaitu $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$, konvergen. ■

Teorema 4.2.2 [7]

Jika solusi dari deret $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$ *konvergen, maka deret tersebut merupakan solusi eksak dari permasalahan non-linier* (4.1).

Bukti:

Misalkan solusi permasalahan persamaan diferensial membentuk suatu deret $(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k\,(t)$, dimana deret $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k\,(t)$ konvergen,

$$\lim_{k\to\infty} v_k = 0 \qquad \cdots (4.11)$$

$$\sum_{k=0}^{n} [v_{k+1} - v_k] = v_{n+1} - v_0$$

Hasil terakhir menunjukkan bahwa

$$\sum_{k=0}^{\infty} [v_{k+1} - v_k] = \lim_{k\to\infty} v_k - v_0 = -v_0 \qquad \cdots (4.12)$$

Dengan menggunakan operator L, sehingga persamaan (4.12) dapat dibentuk menjadi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L[v_{k+1} - v_k] = -L[v_0] = 0. \qquad \cdots (4.13)$$

Selain itu, berdasarkan persamaan (4.7) diperoleh:

$$L[v_{k+1} - v_k] = L\big[A[v_0 + v_1 + \cdots + v_k] - A[v_0 + v_1 + \cdots + v_{k-1}]\big] \qquad \cdots (4.14)$$

dimana$j \geq 1$, berdasarkan persamaan (4.6) persamaan (4.14) diperoleh bentuk:

$$\begin{aligned} L[v_{k+1} - v_k] &= L\Bigg\{-\int_0^t [(L[v_0 + v_1 + \cdots + v_k] \\ &- L[v_0 + v_1 + \cdots + v_{k-1}] \\ &+ N[v_0 + v_1 + \cdots + v_k] \\ &- N[v_0 + v_1 + \cdots + v_{k-1}])]d\tau\Bigg\} \qquad ,j \\ &\geq 1 \qquad \cdots (4.15) \end{aligned}$$

Persamaan (4.15) merupakan bentuk operator $A[u]$ yang di definisikan pada persamaan (4.6), persamaan (4.15) memiliki integral pada permasalahan persamaan diferensial $Lu(t) + Nu(t) - g(t)$. Karena operator diferensial L adalah invers kiri dari operator integral, sehingga persamaan (4.15) menjadi:

$$\begin{aligned} L[v_{k+1} - v_k] = L[v_k] + N[v_0 + v_1 + \cdots + v_k] - \\ N[v_0 + v_1 + \cdots + v_{k-1}] \qquad ,j \geq 1. \qquad \cdots (4.16) \end{aligned}$$

Akibat dari persamaan (4.13) dan (4.16) diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} L[v_{k+1} - v_k] = {} & L[v_0] + N[v_0] - g(t) \\ & +L[v_1] + N[v_0 + v_1] - N[v_0] \\ & +L[v_2] + N[v_0 + v_1 + v_2] - N[v_0 + v_1] \qquad \cdots (4.17) \\ & \vdots \\ & +L[v_n] + N[v_0 + v_1 + \cdots + v_n] - N[v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}] \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L[v_{k+1} - v_k] = L\left[\sum_{k=0}^{\infty} v_k\right] + N\left[\sum_{k=0}^{\infty} v_k\right] - g(t) \qquad \cdots (4.18)$$

Dari persamaan (4.13) dan (4.18) dapat diketahui bahwa $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k\,(t)$ adalah suatu solusi eksak dari permasalahan diferensial. ■

Teorema 4.2.3[7]

Diasumsikan solusi dari permasalahan pada (4.1) *membentuk suatu deret* $\sum_{k=0}^{\infty} v_k\,(t)$ *konvergen menuju solusi* $u(t)$. *Jika deret terpotong* $\sum_{k=0}^{j} v_k\,(t)$ *digunakan sebagai suatu pendekatan menuju solusi* $u(t)$ *pada permasalahan* (4.1), *maka error maksimum yaitu* $E_j(t)$, *dapat diestimasi dengan:*

$$E_j(t) \leq \frac{1}{1-\gamma}\gamma^{j+1}\|v_0\| \qquad \ldots (4.19)$$

Bukti:

Dengan menggunakan persamaan (4.10) diperoleh:

$$\|S_n - S_j\| \leq \frac{1-\gamma^{n-j}}{1-\gamma}\gamma^{j+1}\|v_0\| \qquad \ldots (4.20)$$

Untuk $n \geq j$. Jika $n \to \infty$ maka $S_n \to u(t)$. Jadi dari persamaan (4.20) diperoleh:

$$\left\|u(t) - \sum_{k=0}^{j} v_k\right\| \leq \frac{1-\gamma^{n-j}}{1-\gamma}\gamma^{j+1}\|v_0\| \qquad \ldots (4.21)$$

Karena $0 < \gamma < 1$, maka $\left(1-\gamma^{n-j}\right) < 1$. Oleh karena itu, ketaksamaan persamaan (4.21) menjadi:

$$\left\|u(t) - \sum_{k=0}^{j} v_k\right\| \leq \frac{1}{1-\gamma}\gamma^{j+1}\|v_0\| \qquad \ldots (4.22)$$

■

5. KESIMPULAN

Jika operator koreksi dari permasalahan persamaan diferensial biasa orde satu non linier memenuhi ketaksamaan kontraksi $\|v_{k+1}\| \leq \gamma\,\|v_k\|$ dimana $0 < \gamma < 1$ maka deret solusi dari persamaan diferensial biasa orde satu non linier konvergen menuju solusi eksak.Solusi pendekatan dari persamaan diferensial biasa orde satu membentuk suatu fungsi koreksi yaitu

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(s)\{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\}\, ds\,, \quad n \geq 0$$

dimana λ adalah sebuah pengali Lagrange dan $\tilde{u}(t)$ adalah suatu variasi terbatas.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Gray, A., Greenhalgh, D, Mao, dan Pan, J. 2011. A Stochastic Differential Equation SIS Epidemic Model. *Society for Industrial and Apllied Mathematics*. 71(3). Hal 876-902.

[2] He Ji-Huan. 2007. Variational iteration method—Some recent results and new interpretations. *Applied Mathematics and Computation*. 207 (2007). Hal 3-17.

[3] Kreyszig, E. 1978. Introduction Functional Analysis with Application. New York: John Wiley & Sons.

[4] Purcel, E. J, & Vanberg, D. 1987. Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1. Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta.

[5] Ross, S. L. 1984. Differential Equations. Third Edition. John Wiley & Sons. New York.

[6] Shiddiq, M. Mahfuzh. 2011. Syarat batas serap pada gelombang akustik dua dimensi. *Jurnal Matematika dan Terapan Epsilon*. 05 (2). Hal. 31-39

[7] Zaid M. O. 2010. A study on the convergence of variational iteration method. *Mathematical and Computer Modelling.* 51 (2010). Hal 1181-1192.