Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 19-25

MEMETRIKKAN RUANG MERIK *CONE* DENGAN MENORMKAN RUANG BANACH

Ahmad Maulidi, M. Mahfuzh Shiddiq*, Nurul Huda
Program Studi Matematika Fakultas MIPA
Universitas Lambung Mangkurat
Email: mmahfuzhs@unlam.ac.id

ABSTRACT

Huang and Zhang introduced the cone metric space, by replacing codomain from the set of real numbers into an ordered Banach space on a cone, where the cone is a non empty subset of real Banach space that satisfy certain other properties. In this study also explained about the norm space which is a pair of a vector space with a norm that satisfy some specific properties. Furthermore, Banach space is a complete norm space and space norm says completed if every Chaucy sequence in norm space is convergent.

In this paper, the researcher want to study how to metrizability of metric spaces via renorming the Banach spaces. This research was conducted by explaining and proving how to metrizability of cone metric spaces via renorming the Banach spaces. The result is a metric space cone can be made into an ordinary metric space with a metric defined by

$$d(\varphi,\psi) = |||D(\varphi,\psi)|||$$

Keyword: *metric, metric cone, norm, Banach spaces*

ABSTRAK

Huang dan Zhang memperkenalkan ruang metrik *cone*, yaitu dengan mengganti kodomain dari himpunan bilangan riil menjadi ruang Banach terurut pada suatu *cone*, dimana *cone* adalah suatu subset tak kosong dari ruang Banach riil yang memenuhi beberapa sifat tertentu. Penelitian ini dijelaskan tentang ruang norm yang merupakan pasangan dari suatu ruang vektor dengan norm yang memenuhi beberapa sifat tertentu. Selanjutnya, ruang Banach adalah ruang norm yang lengkap dan ruang norm dikatakan lengkap jika setiap barisan *Chaucy* pada ruang norm konvergen.

Pada makalah ini, peneliti ingin melakukan kajian ulang bagaimana cara memetrikkan ruang metrik dengan menormkan ruang Banach. Penelitian ini dilakukan dengan cara menjelaskan dan membuktikan cara memetrikkan ruang metrik *cone* dengan menormkan ruang Banach. Hasil dari penelitian ini yaitu ruang metrik *cone* dapat dijadikan ruang metrik biasa dengan metrik yang didefinisikan oleh

$$d(\varphi,\psi) = |||D(\varphi,\psi)|||$$

Kata Kunci : *metrik, metrik cone, norm, ruang banach.*

1. PENDAHULUAN

Beberapa ruang abstrak diantaranya ialah ruang metrik, ruang norm dan ruang Banach. Ruang metrik (X,d) adalah pasangan himpunan tak kosong X dengan suatu fungsi metrik$d$ di dalam X, sedangkan ruang norm merupakan pasangan dari suatu ruang vektor dengan norm yang memenuhi beberapa sifat tertentu. Ruang Banach adalah ruang norm yang lengkap, yaitu jika setiap barisan *Cauchy* pada ruang norm konvergen [7]. Salah satu bahasan dalam ruang metrik adalah teori titik tetap. Teori

* Penulis Korespondensi

ini muncul sebagai teknik yang penting dalam studi non linier misalkan pada bidang biologi, teknik, sain komputer dan sebagainya [9]. Selanjutnya diperkenalkan ruang metrik *cone*, yaitu dengan menggantikan kodomain dari himpunan bilangan riil menjadi ruang Banach terurut pada suatu *cone*, dimana *cone* adalah suatu subset tak kosong dari ruang Banach riil yang memenuhi beberapa sifat tertentu [4]. Dengan ditemukannya ruang metrik *cone* serta terdapat beberapa penelitian tentang keekuivalenan antara ruang metrik biasa dengan ruang metrik *cone* diantaranya dengan metode skalarisasi dan menggunakan *Minkowski functional* pada ruang vektor topologi, maka keekuivalenan tersebut juga dapat dilakukan dengan cara yang berbeda yaitu dengan cara menormkan ruang Banach. Makalah ini mengkaji ulang paper Asadi [2] yaitu mencari metrik yang ekuivalen dengan metric cone dengan menormkan ruang banach.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Metrik

Definisi ruang metrik dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.1.1 [7]

Suatu ruang metrik adalah suatu pasangan (X, d), *dimana* X *adalah suatu himpunan tak kosong dan* d *adalah suatu metrik pada* X *(fungsi jarak pada* X*) yaitu fungsi yang didefinisikan pada* $X \times X$ *sedemikian hingga untuk semua* $\varphi, \psi, \xi \in X$ *berlaku*

(M1) $d(\varphi, \psi) \geq 0$, $d(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}$

(M2) $d(\varphi, \psi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \psi$

(M3) $d(\varphi, \psi) = d(\psi, \varphi)$

(M4) $d(\varphi, \psi) \leq d(\varphi, \xi) + d(\xi, \psi)$

2.2 Ruang Norm

Definisi ruang norm dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.2.1 [7]

Misalkan X *suatu ruang vektor dengan norm dalam* X *merupakan pemetaan* $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ *yang memenuhi sifat-sifat berikut:*

(N1) $\|\boldsymbol{\varphi}\| \geq 0, \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in X$

(N2) $\|\boldsymbol{\varphi}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$

(N3) $\|\alpha\boldsymbol{\varphi}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{\varphi}\|, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ *dan* $\boldsymbol{\varphi} \in X$

(N4) $\|\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\psi}\| \leq \|\boldsymbol{\varphi}\| + \|\boldsymbol{\psi}\|, \forall\, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in X$

Pasangan $(X, \|.\|)$ *disebut ruang norm.*

Definisi 2.2.2 [7]

Diberikan suatu ruang norm $(X, \|.\|)$. *Barisan* (φ_m) *dalam* X *dikatakan konvergen ke* $\varphi \in X$ *atau dikatakan sebagai limit dari* X, *jika* $\forall \varepsilon > 0 \exists I(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall m \geq I(\varepsilon)$ *berlaku*

$$\|\varphi_m - \varphi\| < \varepsilon.$$

Definisi 2.2.3 [7]
Diberikan suatu ruang norm $(X, \|.\|)$. *Barisan* (φ_m) *dalam* X *dikatakan barisan Cauchy jika* $\forall \varepsilon > 0 \exists I(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m \in \mathbb{N}$ *berlaku* $\|\varphi_m - \varphi_n\| < \varepsilon$ *dengan* $n, m \geq I(\varepsilon)$.

Jika setiap barisan *Cauchy* pada ruang norm merupakan barisan konvergen maka ruang norm tersebut lengkap. Hal ini termuat dalam definisi berikut:

Definisi 2.2.4 [7]
Diberikan $(X, \|.\|)$ *suatu ruang norm. Jika semua barisan Cauchy di* X *konvergen maka* X *disebut ruang norm yang lengkap. Ruang norm yang lengkap disebut juga dengan ruang Banach.*

2.3 Ruang Metrik *Cone*

Sebelum mendefinisikan ruang metrik*cone* terlebih dahulu diberikan definisi *cone*, definisi *cone* dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.3.1 [4]
Diberikan ruang Banach riil E, J *subset* E *disebut suatu cone jika dan hanya jika:*
(i) J *tutup,* $J \neq \emptyset$ *dan*$J \neq \{0\}$
(ii) $f, g \in \mathbb{R}$, *dimana* $f, g \geq 0$ *dan* $\varphi, \psi \in J$ *berlaku*$f\varphi + g\psi \in J$
(iii)$\varphi \in J$ *dan* $-\varphi \in J$ *maka* $\varphi = 0$

Definisi ruang metrik *cone* dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 2.3.2[4]
Diberikan X *sebarang himpunan tak kosong,* E *suatu ruang Banach. Pemetaan* $D: X \times X \longrightarrow E$ *disebut metrik cone pada* X *jika*
- *(i)* $0 \preccurlyeq D(\varphi, \psi)$, $\forall \varphi, \psi \in X$, $D(\varphi, \psi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \psi$;
- *(ii)* $D(\varphi, \psi) = D(\psi, \varphi), \forall \varphi, \psi \in X$
- *(iii)* $D(\varphi, \psi) \preccurlyeq D(\varphi, \xi) + D(\xi, \psi)$, $\forall \varphi, \psi, \xi \in X$.

Pasangan (X, D) *disebut ruang metrik cone.*

2.4 Himpunan Tutup

Himpunan tutup adalah himpunan yang komplemen himpunannya merupakan himpunan buka. Himpunan tutup bisa di cek dari barisan yang ada di dalam himpunan itu, seperti teorema berikut:

Teorema 2.4.1[7]
Diberikan J *himpunan bagian tak kosong dari ruang metrik* (X, d) *dan* $\bar{J}$ *closur sebagaimana didefinisikan dalam bagian sebelumnya, maka :*
(i) $\varphi \in \bar{J}$ *jika dan hanya jika terdapat sebuah barisan* φ_n *di* J *sedemikian sehingga* $\varphi_n \longrightarrow \varphi$
(ii) J *himpunan tutup jika dan hanya jika* $\varphi_n \in J$, $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ *mengakibatkan*$\varphi \in J$

3. METODOLOGI

Metode penelitian ini adalah studi literatur. Prosedur penelitian ini adalah mengumpulkan dan mengkajimateri tentang ruang metrik, ruang metrik cone, dan ruang norm, mengumpulkan dan mengkaji materi tentang kenormalan ruang metrik *cone* dengan konstanta 1. Kemudian menjelaskan norm di ruang Banach Rill berdasarkan sifat-sifat norm dan memetrikkan ruang metrik *cone* dengan menormkan metrik *cone*.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 4.1 [2]

Diberikan $(E, \|.\|)$ *ruang Banach Riil dengan cone positif* J. *Terdapat norm di* E *sedemikian sehingga* J *adalah cone normal dengan konstanta* $K = 1$, *yang berkaitan dengan norm ini.*

Bukti :

Didefinisikan suatu fungsi di ruang Banach Riil yaitu

$|||.|||: E \to [0, \infty)$ dengan

$$|||\varphi||| \coloneqq \inf\{\|h\|: \varphi \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq \varphi\} + \|\varphi\| \; \ldots . (4.1)$$

untuk setiap $\varphi \epsilon E$.

Akan ditunjukkan fungsi tersebut adalah norm.

(B1) Karena berdasarkan sifat norm (N1) pada definisi 2.2.1 yaitu $\|\varphi\| \geq 0$ maka $\|h_j\| \geq 0$, $\|i_j\| \geq 0$ untuk setiap j, sehingga $\inf\{\|h\|: \varphi \preccurlyeq h\} \geq 0$, begitu pula $\inf\{\|i\|: i \preccurlyeq \varphi\} \geq 0$. Jadi, $|||\varphi||| = \inf\{\|h\|: \varphi \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq \varphi\} + \|\varphi\| \geq 0$.

(B2) $\Longrightarrow$) Jika $|||\varphi||| = 0$ maka berdasarkan persamaan 4.1 diperoleh

$$\inf\{\|h\|: \varphi \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq \varphi\} + \|\varphi\| = 0$$

Sehingga, $\inf\{\|h\|: \varphi \preccurlyeq h\} = 0$, $\inf\{\|i\|: i \preccurlyeq \varphi\} = 0$ dan $\|\varphi\| = 0$. Jadi $\varphi = 0$.

$$\Longleftarrow)|||\varphi||| = \inf\{\|h\|: \varphi \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq \varphi\} + \|\varphi\|$$

Jika $\varphi = 0$, maka berdasarkan persamaan 4.1 diperoleh

$$|||\varphi||| = \inf\{\|h\|: 0 \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq 0\} + \|0\|$$

Nilai dari $\inf\{\|h\|: 0 \preccurlyeq h\} = 0$,$\inf\{\|i\|: i \preccurlyeq 0\} = 0$ dan $\|0\| = 0$ maka $|||\varphi||| = 0$.

(B3) Untuk $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} |||\lambda\varphi||| &= \inf\{\|h\|: \lambda\varphi \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq \lambda\varphi\} + \|\lambda\varphi\| \\ &= \inf\left\{\lambda \left\|\frac{1}{\lambda} h\right\|: \varphi \preccurlyeq \frac{1}{\lambda} h\right\} + \inf\left\{\lambda \left\|\frac{1}{\lambda} i\right\|: \frac{1}{\lambda} i \preccurlyeq \varphi\right\} + \lambda\|\varphi\| \\ &= \lambda|||\varphi||| \end{aligned}$$

Untuk $\lambda < 0$,

$$\begin{aligned} |||\lambda\varphi||| &= \inf\{\|h\|: \lambda\varphi \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq \lambda\varphi\} + \|\lambda\varphi\| \\ &= \inf\left\{\lambda \left\|\frac{1}{\lambda} h\right\|: \varphi \preccurlyeq \frac{1}{\lambda} h\right\} + \inf\left\{\lambda \left\|\frac{1}{\lambda} i\right\|: \frac{1}{\lambda} i \preccurlyeq \varphi\right\} + \lambda\|\varphi\| \\ &= \inf\left\{\lambda \left\|\frac{1}{\lambda} i'\right\|: \frac{1}{\lambda} i' \preccurlyeq \varphi\right\} + \inf\left\{\lambda \left\|\frac{1}{\lambda} h'\right\|: \varphi \preccurlyeq \frac{1}{\lambda} h'\right\} + \lambda\|\varphi\| \\ &= \lambda|||\varphi||| \end{aligned}$$

Sedangkan untuk $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned} |||0\varphi||| &= \inf\{\|h\|: 0\varphi \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq 0\varphi\} + \|0\varphi\| \\ &= \inf\{\|h\|: 0 \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq 0\} + 0\|\varphi\| \\ &= 0|||\varphi||| \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $|||\lambda\varphi||| = |\lambda||||\varphi|||$ untuk setiap $\varphi \in E$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$.

(B4) Misalkan $\varphi, \psi \in E$ dan untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat i_1, i_2, h_1, h_2 sedemikian sehingga

$$i_1 \preccurlyeq \varphi \preccurlyeq h_1 \qquad \text{…. (4.2)}$$

$$i_2 \preccurlyeq \psi \preccurlyeq h_2 \qquad \text{…. (4.3)}$$

Berdasarkan persamaan 4.1 diperoleh

$$\inf\{\|h_1\|, \|h_2\|, \|h_3\|, \dots\} + \inf\{\|i_1\|, \|i_2\|, \|i_3\|, \dots\} + \|\varphi\| < |||\varphi||| + \varepsilon,$$

Misalkan terdapat $j = 1$ sedemikian sehingga untuk h_1, i_1 menunjukkan bahwa $\inf\{\|h_1\|, \|h_2\|, \|h_3\|, \dots\} = \|h_1\|$ dan $\inf\{\|i_1\|, \|i_2\|, \|i_3\|, \dots\} = \|i_1\|$. Akibatnya diperoleh

$$\|h_1\| + \|i_1\| + \|\varphi\| - \varepsilon < |||\varphi||| \qquad \text{…. (4.4)}$$

Dengan cara yang serupa didapatkan

$$\|h_2\| + \|i_2\| + \|\psi\| - \varepsilon < |||\psi||| \qquad \text{…. (4.5)}$$

Oleh karena itu berdasarkan persamaan 4.2 dan 4.3 didapatkan $i_1 + i_2 \preccurlyeq \varphi + \psi \preccurlyeq h_1 + h_2$, akibatnya menurut definisi $|||\varphi|||$ diperoleh

$$\begin{aligned} |||\varphi + \psi||| &= \inf\{\|h_1 + h_2\| : \varphi + \psi \preccurlyeq h_1 + h_2\} + \inf\{\|i_1 + i_2\| : i_1 + i_2 \preccurlyeq \varphi + \psi\} \\ &\quad + \|\varphi + \psi\| \\ &= \|h_1 + h_2\| + \|i_1 + i_2\| + \|\varphi + \psi\| \\ &\le \|h_1\| + \|h_2\| + \|i_1\| + \|i_2\| + \|\varphi\| + \|\psi\| \\ &\le |||\varphi||| + |||\psi||| + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Sedemikian sehingga,

$$|||\varphi + \psi||| \le \|h_1 + h_2\| + \|i_1 + i_2\| + \|\varphi + \psi\| \le |||\varphi||| + |||\psi||| + 2\varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka diperoleh

$$|||\varphi + \psi||| \le |||\varphi||| + |||\psi|||.$$

Jadi, dengan terbuktinya sifat B1,B2,B3 dan B4 maka $|||.|||$ merupakan norm di E.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa dengan norm $|||.|||$,J adalah *cone* normal dengan konstanta $K = 1$, yaitu untuk setiap $\varphi, \psi \in E$. Sedemikian sehingga,

$$0 \preccurlyeq \varphi \preccurlyeq \psi \Rightarrow |||\varphi||| \le |||\psi|||.$$

Misalkan $0 \preccurlyeq \varphi \preccurlyeq \psi$. Menurut definisi $|||\varphi|||$, diperoleh

$$|||\varphi||| = \inf\{\|h\| : \varphi \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\| : i \preccurlyeq \varphi\} + \|\varphi\|$$

$$\le \inf\{\|h\| : 0 \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\| : i \preccurlyeq \psi\} + \|\varphi\|$$

$$= \|\psi\| + \|\varphi\|$$

Atau bisa dituliskan dengan

$$0 \le |||\varphi||| \le \|0\| + \|\psi\| + \|\varphi\| = \|\psi\| + \|\varphi\| \text{…. (4.6)}$$

Jika diambil $A \coloneqq \{\|i\| : i \preccurlyeq \psi\}$, maka untuk sebarang $0 \preccurlyeq \varphi \preccurlyeq \psi$ berlaku

$$\begin{aligned} |||\varphi||| &= \inf\{\|h\| : \varphi \le h\} + \inf\{\|i\| : i \le \varphi\} + \|\varphi\| \\ &\le \inf\{\|h\| : 0 \le h\} + \inf\{\|i\| : i \le \psi\} + \|\varphi\| \\ &= \inf A + \|\varphi\| \\ &\le \inf A + \|\psi\| \end{aligned}$$

Jadi, $|||\varphi|||$ merupakan batas bawah dari $A + \|\psi\|$. Sedemikian sehingga,

$$|||\varphi||| \le \inf(A + \|\psi\|) = \inf A + \|\psi\| \le |||\psi||| . \blacksquare$$

Akibat 4.1
Diberikan $(E, |||.|||)$ *Ruang Banach Riil dengan norm* $|||.|||$ *dan diketahui norm* $|||.|||$ *seperti yang didefinisikan pada persamaan 4.1 maka cone* J *merupakan himpunan tutup di* $(E, |||.|||)$ *Ruang Banach Riil dengan norm* $|||.|||$.
Bukti :
Misalkan diberikan $\{\varphi_n\}$ merupakan barisan di J yang konvergen ke φ dengan norm $|||.|||$, dari definisi $|||.|||$ pada persamaan 4.1 diperoleh

$$|||\varphi_n - \varphi||| = \inf\{\|h\|: \varphi_n - \varphi \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq \varphi_n - \varphi\} + \|\varphi_n - \varphi\|$$

Karena $\inf\{\|h\|: \varphi_n - \varphi \preccurlyeq h\} \geq 0$ dan $\inf\{\|i\|: i \preccurlyeq \varphi_n - \varphi\} \geq 0$ maka

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq |||\varphi_n - \varphi||| \qquad \ldots. (4.7)$$

Selanjutnya, karena barisan (φ_n) konvergen ke φ dengan norm $|||.|||$ maka menurut definisi 2.2.2 untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $I(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq I(\varepsilon)$ berlaku

$$|||\varphi_n - \varphi||| < \varepsilon \qquad \ldots. (4.8)$$

Karena $\|\varphi_n - \varphi\| \leq |||\varphi_n - \varphi|||$ pada persamaan 4.7 dan $|||\varphi_n - \varphi||| < \varepsilon$ pada persamaan 4.8 maka

$$\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$$

sehingga berdasarkan definisi 2.2.2 barisan (φ_n) konvergen ke φ dengan norm $\|.\|$. berdasarkan definisi 2.3.1 J himpunan tutup dengan norm $\|.\|$ sehingga berdasarkan teorema 2.4.1 menunjukkan bahwa $\varphi \in J$.
Oleh karena itu, menurut teorema 2.4.1 dapat dikatakan bahwa norm $|||.|||$ yang didefinisikan pada persamaan 4.1 menyebabkan *cone* J himpunan tutup di $(E, |||.|||)$, Ruang Banach Riil dengan norm $|||.|||$. ■
Akibat 4.2[2]
Setiap ruang metrik cone (X, D) *dapat dijadikan ruang metrik* (X, d) *seperti definisi 2.1.1, dengan metrik yang didefinisikan oleh*

$$d(\varphi, \psi) = |||D(\varphi, \psi)||| \qquad \ldots. (4.9)$$

Bukti :
Akan ditunjukkan persamaan 4.9 adalah metrik.
Menurut definisi $|||.|||$ pada persamaan 4.1, diperoleh

$$|||D(\varphi, \psi)||| = \inf\{\|h\|: D(\varphi, \psi) \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq D(\varphi, \psi)\} + \|D(\varphi, \psi)\|$$

(D1) Akan dibuktikan bahwa $|||D(\varphi, \psi)||| \geq 0$,
Menurut teorema 4.1 $|||D(\varphi, \psi)|||$ adalah norm sehingga menurut definisi 2.2.1 (N1) diperoleh $|||D(\varphi, \psi)||| \geq 0$.
(D2) Akan dibuktikan bahwa $|||D(\varphi, \psi)||| = 0 \iff \varphi = \psi$
$\Longrightarrow$) Jika $|||D(\varphi, \psi)||| = 0$ maka $D(\varphi, \psi) = 0$ dan$D(\varphi, \psi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \psi$
$\Longleftarrow$)Jika $\varphi = \psi$ maka $D(\varphi, \psi) = 0$ dan apabila $D(\varphi, \psi) = 0$maka diperoleh $|||D(\varphi, \psi)||| = 0$
(D3) Akan dibuktikan bahwa $|||D(\varphi, \psi)||| = |||D(\psi, \varphi)|||$

$$\begin{aligned} |||D(\varphi, \psi)||| &= \inf\{\|h\|: D(\varphi, \psi) \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq D(\varphi, \psi)\} + \|D(\varphi, \psi)\| \\ &= \inf\{\|h\|: D(\psi, \varphi) \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq D(\psi, \varphi)\} + \|D(\psi, \varphi)\| \\ &= |||D(\psi, \varphi)||| \end{aligned}$$

(D4) Akan dibuktikan bahwa $|||D(\varphi,\psi)||| \leq |||D(\varphi,\xi)||| + |||D(\xi,\psi)|||$

$$|||D(\varphi,\psi)||| = \inf\{\|h\|: D(\varphi,\psi) \preccurlyeq h\} + \inf\{\|i\|: i \preccurlyeq D(\varphi,\psi)\} + \|D(\varphi,\psi)\|$$
$$\leq \inf\{\|h_1\|: D(\varphi,\xi) + D(\xi,\psi) \preccurlyeq h_1\}$$
$$+ \inf\{\|i_1\|: i_1 \preccurlyeq D(\varphi,\xi) + D(\xi,\psi)\}$$
$$+ \|D(\varphi,\xi) + D(\xi,\psi)\|$$
$$= |||D(\varphi,\xi) + D(\xi,\psi)|||$$
$$\leq |||D(\varphi,\xi)||| + |||D(\xi,\varphi)|||$$

Dengan terbuktinya sifat D1, D2, D3 dan D4 maka $|||D(\varphi,\psi)|||$ merupakan ruang metrik biasa.■

5. KESIMPULAN

Suatu fungsi di ruang Banach Riil dengan *cone* positif Pyang didefinisikan oleh $|||.|||: E \to [0,\infty)$ dengan $|||\varphi||| \coloneqq \inf\{\|h\|: \varphi \leq h\} + \inf\{\|i\|: i \leq \varphi\} + \|\varphi\|$ untuk setiap $\varphi \in E$, merupakan norm di Ruang Banach Riil dan J merupakan *cone* normal dengan konstanta $K = 1$ dengan norm tersebut.*Cone* J juga merupakan himpunan tutup di ruang Banach Riil dengan norm $|||.|||$. Sedemikian sehinggaa setiap ruang metrik *cone* dapat dijadikan ruang metrik biasa dengan metrik yang didefinisikan oleh $d(\varphi,\psi) = |||D(\varphi,\psi)|||$

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R. G dan D. R . Shelbert. 2000. *Introductory to Real Analysis.*Edisi ke-3. John Wiley dan Sons. Inc, New York.

[2] Asadi, M., Vaezpour, M dan Soleimani H.. 2012. Metrazibility of Cone Metric Space Via Renorming the Banach Space. *Non Linear Analysis and Application*. 2012. 1-5.

[3] Du, Wei-Shih. 2010. A Note on Cone Metric Fixed Point Theory and Its Equivalence. *Nonlinier Analysis*. 72 2259-2261.

[4] Guang, Huang Long dan Zhang Xian. 2007. Cone Metric Space and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings. *J. Math. Anal. Appl*. 332 1468–1476.

[5] Harandi, A. Amini dan M. Fakhar. 2010. Fixed Point Theory in Cone Metric Spaces Obtained via The Scalarization Method. *Computer and Mathematics with Applications.* 59 3529-3534.

[6] Kadelburg, Zoran, S. Radenovic, V. Rakocevic. 2011. A Note on The Equivalence of Some Metric and Cone Metric Fixed Point Result. *Applied Mathematics Letter*. 24 370-374.

[7] Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* University of Windsor, Canada.

[8] Munkres, J.R. 2000. *Topology*. Edisi ke-2. Massachusetts Institute of Technology, United States of America.

[9] Shiddiq, M. Mahfuzh. 2013. Dua Tipe Pemetaan Kontraktif Pada Ruang Metrik Cone. *Prosiding Seminar Nasional Statistika Universitas Diponegoro*. Hal.511-516