Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 1-10

TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG METRIK-S

Turrus Perdana Guntur B., Nurul Huda, M. Mahfuzh Shiddiq

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani Km. 36 Kampus ULM, Banjarbaru70714, Kalimantan Selatan
Email: milala444@yahoo.com

ABSTRAK

Titik tetap adalah titik yang dipetakan ke dirinya sendiri. Metrik d pada himpunan tidak kosong X, dan pasangan (X, d) disebut Ruang Metrik (*Metric Space*). Metrik baru D pada himpunan tidak kosong X yang disebut Metrik-D (D −*Metric*) dan pasangan (X, D) disebut Ruang Metrik-D (D-*Metric Space*). Kemudian dengan perluasan atau generalisasi sifat-sifat dalam ruang metrik-D diperoleh Metrik pada himpunan tidak kosong X yang disebut Metrik-G(G −*Metric*) dan pasangan (X, G) disebut Ruang Metrik-G (G- *Metric Space*), dan yang terbaru yang merupakan perluasan atau generalisasi sifat-sifat dari ruang metrik-D dan metrik-G adalah metrik-S dan ruang metrik baru yaitu Ruang Metrik-S (S- *Metric Space*) disimbolkan dengan pasangan (X, S).Tujuan di dalam artikel ini untuk membuktikan sifat-sifat dari dari Ruang Metrik-S dan untuk membuktikan eksistensi dan ketunggalan titik tetap serta syarat cukup agar suatu pemetaan T pada Ruang Metrik-S memiliki ketunggalan titik tetap pada Ruang Metrik-S. Hasil dari penelitian ini adalah pemetaan $T : X \to X$ disebut pemetaan kontraktif jika terdapat $0 \leq L < 1$ sedemikian sehingga$S(T(x), T(x), T(y)) \leq L\, S(x, x, y)$, $\forall\, x, y \in X$, suatu pemetaan kontraktif pada ruang metrik-S (X, S) adalah pemetaan kontinu-S pada ruang metrik-S (X, S), dan untuk menunjukan eksistensi dan keunggulan titik tetap dari T harus memenuhi syarat (x_n) konvergen-S ke u, u titik tetap dari pemetaan T, dan Titik tetap u tunggal.

Kata Kunci: Ruang Metrik-S, Titik Tetap, Pemetaan Kontraktif.

1. PENDAHULUAN

Titik tetap adalah titik yang dipetakan ke dirinya sendiri. Ruang metrik adalah suatu pasangan (X, d), dimana X adalah suatu himpunan tak kosong dan d adalah suatu metrik pada X (fungsi jarak pada X).Nantinya, akan dibuktikan eksistensi dan ketunggalan titik tetap pada suatu pemetaan yang kontraktif sesuai dengan sifat-sifat & syarat cukup dari ruang metrik lengkap. Bartle dan Sherbert (2000) menjelaskan bahwa ruang metrik dikatakan lengkap jika setiap barisan cauchy tersebut konvergen.

S. Sedghi dkk (2012) telah memperkenalkan konsep ruang metrik baru yaitu Ruang Metrik-S (S- *Metric Space*)dengan pasangan (X, S)yang merupakan generalisasi sifat-sifat dari ruang metrik-D dan metrik-G,melalui tulisan ini, penulis akan membuktikan dan mengkaji eksistensi dan ketunggalan teorema titik tetap dalam Ruang Metrik-S (S- *Metric Space*) lengkap.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Definisi 2.1[1]

Suatu ruang metrik adalah suatu pasangan (X, d), *dimana* X *adalah suatu himpunan tak kosong dan* d *adalah suatu metrik pada* X *(fungsi jarak pada* X*) yaitu fungsi yang didefinisikan pada* $X \times X$ *sedemikian hingga untuk semua* $x, y, z \in X$ *diperoleh*

(M1) $(x,y) \geq 0$, $\forall(x,y) \in X$ *(sifat kepositifan)*
(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(M3) $d(x,y) = d(y,x)$ *(simetri)*
(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(ketaksamaan segitiga)*

Definisi 2.2 [2]
RuangMetrik-$S(X,S)$: *Diberikan* X *sebagai himpunan tak kosong.Ruang metrik-S di* X *adalah sebuah fungsi*
$S : X \times X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *yang memenuhi syarat, untuk setiap* $x, y, z, a \in X$,
(S1) $S(x, y, z) \geq 0$,
(S2) $S(x, y, z) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y = z$,
(S3) $S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$
Pasangan (X, S) *disebut sebagai Ruang Metrik-S.*

Definisi 2.3[3]
Suatu fungsi f *dari* X *ke* Y *ialah suatu aturan yang pada setiap anggota dari* X *menentukan dengan tunggal satu anggota dari* Y. *Fungsi sebenarnya adalah perkataan lain (persamaan kata) dari pemetaan (mapping)*

Definisi 2.4 [4]
Diberikan (X,S) adalah Ruang Metrik-S. Pemetaan $T : X \rightarrow X$ *disebut pemetaan kontraktif jika terdapat* $0 \leq L < 1$ *sedemikian sehingga* $S(T(x), T(x), T(y)) \leq L\, S(x, x, y)$, $\forall\, x, y \in X$

Definisi 2.5 [1]
Diberikan X *himpunan tak kosong dan pemetaan* $T: X \longrightarrow X$*.Suatu* $x \in X$ *dikatakan titik tetap dari* T *jika dan hanya jika* $T(x) = x$.
Selanjutnya notasi $T(x)$ yang menyatakan pemetaan T untuk suatu $x \in X$ dapat dituliskan menjadi Tx.

Definisi 2.6 [4]
Diberikan$T: (X,S) \rightarrow X', S'$*adalah suatu pemetaan dari ruang metrik* (X,S)*ke ruang metrik* (X', S'), *kemudian* T *dikatakan kontinu pada* $x \in X$ *jika dan hanya jika sebarang* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dengan $S(x,x,y) < \delta$ berlaku $S'(T(x),T(x),T(y)) < \varepsilon$.
Pemetaan T dikatakan kontinu-S pada himpunan X jika dan hanya jika $T(x_n) \rightarrow T(x)$*maka* $x_n \rightarrow x$.

Definisi 2.7 [1]
Diberikan (X, d) *suatu ruang metrik. Barisan* (x_n) *di* (X, d) *dikatakan*
1 *Barisan konvergen jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *terdapat* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n > N$ *berlaku* $d(x_n, x) < \varepsilon$,
2 *Barisan Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *terdapat* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $m, n > N$ *berlaku* $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Definisi 2.8 [4]
Barisan (x_n) *di ruang metrik* (X,S) *dikatakan konvergen jika dan hanya jika* $S(x_n,x_n,x) \rightarrow 0$ *dengan*$n \rightarrow \infty$, *berlaku untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat*

$n_0 \in N$ sedemikian sehingga$S(x_n, x_n, x) < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq n_0$ dan dituliskan sebagai $lim_{n\to\infty} x_n = x$. Barisan (x_n) disebut konvergen ke x di (X, S) jika $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n, x_n, x) = 0$.

Definisi 2.9 [4]
Barisan (x_n) di ruang metrik (X, S) dikatakan barisan Cauchy jika $S(x_n,x_n, x_m) \to 0$ dengan $n, m \to \infty$, berlaku untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat $n_0 \in N$ sedemikian sehingga $S(x_n, x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk setiap $n, m \geq n_0$. Barisan (x_n) disebut Cauchy di (X, S) jika $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n, x_n, x_m) = 0$.

Definisi 2.10 [2]
Ruang Metrik-S (X,S) dikatakan lengkap jika setiap barisan cauchy nya adalah konvergen.

Teorema 2.11 [5]
Jika $a \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.

Teorema 2.12 [5]
Misalkan x_n dan y_n adalah barisan-barisan bilangan riil yang berturut-turut konvergen ke x dan y, misalkan $c \in R$ maka berlaku $lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$ dan $lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y$

Teorema 2.13 [5]
Untuk $c \geq 0$, maka $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$.

3. METODOLOGI

Metode penelitian yang digunakan dengan cara studi literatur dengan Langkah- langkah yang dilakukan dalam penelitian adalah :
1. Mendefinisikan barisan dari pemetaan yang memenuhi ketaksamaan pada ruang metrik-S yaitu barisan cauchy
2. Membuktikan barisan cauchy tersebut konvergen ke titik tetap
3. Membuktikan keberadaan (eksistensi) titik tetap untuk pemetaan kontraktif pada ruang metrik-S lengkap, dan
4. Membuktikan ketunggalan titik tetap untuk pemetaan kontraktif pada ruang metrik-S lengkap.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Sifat-sifat di Ruang Metrik-S

Pada bagian ini akan ditunjukkan definisi dari barisan konvergen-S, ketunggalan limit dari barisan konvergen-S dan sifat-sifat barisan konvergen-S. Berikut adalah definisi dari barisan konvergen di ruang metrik-S :

Definisi 4.1.1[4]
Barisan (x_n) di ruang metrik (X, S) dikatakan konvergen jika dan hanya jika $S(x_n,x_n,x) \to 0$ dengan $n \to \infty$, berlaku untuk setiap $\varepsilon >0$ terdapat $n_0 \in N$ sedemikian sehingga $S(x_n, x_n, x) < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq n_0$ dan dituliskan

sebagai $lim_{n\to\infty} x_n = x$. *Barisan* (x_n) *disebut konvergen ke x di* (X, S) *jika* $\lim_{n\to\infty} S(x_n, x_n, x) = 0$.
Kemudian akan ditunjukkan bahwa limit dari barisan konvergen-S adalah tunggal

Lemma 4.1.2[2]*Di Ruang Metrik-S terdapat S(x, x, y) = S(y, y, x).*
Bukti. Sesuai dengan syarat ketiga dari Ruang Metrik – S dalam definisi 2.2 (S3)[6],diperoleh

$$S(x,x,z) \le S(x,x,x) + S(x,x,x) + S(y,y,x) = S(y,y,x) \qquad (1)$$

dan

$$S(y,y,x) \le S(y,y,y) + S(y,y,y) + S(x,x,y) = S(x,x,y) \qquad (2)$$

Kemudian, dari (1) dan (2) didapatkan $S(x,x,y) = S(y,y,x)$

Lemma 4.1.3[2]*Diberikan* (X,S)*adalah Ruang Metrik-S. Jika barisan* (x_n)*di X konvergen-S ke x, maka x adalah tunggal.*
Bukti. Diberikan(x_n)konvergen-S ke$x$ dan y dengan $x \in X$ dan $y \in Y$. Untuk membuktikan ketunggalan limit dari (x_n), maka akan ditunjukkan bahwa$x = y$
Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, sehingga berlaku $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Karena (x_n)konvergen-S ke$x$ berdasarkan definisi 4.1.1[5], maka terdapat $n_1 \in N$ sehingga untuk setiap n$\in N$ dengan $n \ge n_1$ berlaku $S(x_n, x_n, x) < \frac{\varepsilon}{4}$. Dan karena (x_n)konvergen-S ke$y$, maka terdapat $n_2 \in N$ sehingga untuk setiap n$\in N$ dengan $n \ge n_2$ berlaku $S(x_n, x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$.Jika$n_0 =$ maks (n_1, n_2) untuk setiap$n \ge n_0$ dan sesuai dengan syarat ketiga dari Ruang Metrik – S dalam definisi 2.2 (S3) [2],diperoleh

$$\begin{aligned} S(x,x,y) &\le S(x,x,x_n) + S(x,x,x_n) + S(y,y,x_n) \\ &= 2S(x,x,x_n) + S(y,y,x_n) \end{aligned}$$

Sesuai dengan lemma 4.1.2[2],di ruang metrik-S, bahwa $S(x,x,y) = S(y,y,x)$, sehingga $S(x,x,x_n)$ = $S(x_n,x_n,x)$ dan $S(y,y,x_n)$ = $S(x_n,x_n,y)$

$$\begin{aligned} &= 2S(x_n,x_n,x) + S(x_n,x_n,y) \\ &< 2\left(\tfrac{\varepsilon}{4}\right) + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) = \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

Sesuai dengan teorema 2.11[2],karena $\varepsilon > 0$ sebarang dengan $0 \le S(x,x,y) < \varepsilon$ maka $S(x,x,y) = 0$. Berdasarkan definisi 2.2 (S2) [2],diperoleh bahwa $x = y$.■

Pada bagian ini akan ditunjukkan definisi barisan Cauchy pada ruang metrik-S.
Definisi 4.1.4[4]
Barisan (x_n) *di ruang metrik* (X,S) *dikatakan barisan Cauchy jika S(*x_n*,*x_n*,* x_m*)* $\to$ *0 dengan* $n, m \to \infty$*, berlaku untuk setiap* ε*>0 , terdapat* $n_0 \in N$ *sedemikian sehingga* $S(x_n, x_n, x_m) < \varepsilon$ *untuk setiap* $n, m \ge n_0$*. Barisan* (x_n) *disebut Cauchy di* (X,S) *jika* $\lim_{n\to\infty} S(x_n, x_n, x_m) = 0$.
Jika terdapat suatu barisan konvergen-S maka barisan tersebut merupakan barisan Cauchy-S, berlaku pada himpunan bilangan real dan ruang metrik-S, diruang metrik-S, teorema tersebut dinyatakan sebagai berikut :
Lemma 4.1.5[2]*Diberikan* (X,S) *adalah Ruang Metrik-S. Jika barisan* (x_n)*di X konvergen ke x, maka* (x_n) *adalah barisan Cauchy-S.*

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 1-10

Bukti. Misalkan (x_n) adalah konvergen-S ke$x$. Maka berdasarkan definisi 4.1.1[4],untuk setiap $\varepsilon > 0$, berlaku $\frac{\varepsilon}{2} > 0$.Terdapat $n_1 \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap n$\in N$ dengan $n \geq n_1$ berlaku $S(x_n, x_n, x) < \frac{\varepsilon}{4}$.Terdapat $n_2 \in N$ sedemikian sehingga untuk setiap m$\in N$ dengan $m \geq n_2$ berlaku $S(x_m, x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.Jika dipilih $n_0 =$ maks (n_1, n_2), untuk setiap $n, m \geq n_0$ sesuai dengan syarat ketiga dari Ruang Metrik – S dalam definisi 2.2 (S3)[6],diperoleh

$$S(x_n, x_n, x_m) \leq S(x_n, x_n, x) + S(x_n, x_n, x) + S(x_m, x_m, x)$$
$$S(x_n, x_n, x_m) = 2S(x_n, x_n, x) + S(x_m, x_m, x)$$
$$< 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \epsilon N$sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \epsilon N$ dengan $n, m \geq n_0$ berlaku $S(x_n, x_n, x_m) < \varepsilon$. Berdasarkan definisi 4.1.4 [4],mengakibatkan x_n adalah Barisan Cauchy-S.■

Selanjutnya akan ditunjukkan pemetaan-S kontinu bersama di semua variabelnya
sebagai berikut :
Misalkan (X, S) adalah Ruang Metrik-S, maka pemetaan $S(x, y, z)$ adalah kontinu bersama di semua variabelnya.

Lemma 4.1.6[2] *Diberikan* (X, S) *adalah Ruang Metrik-S. Jika terdapat barisan* (x_n) *dan*(y_n)*sedemkian sehingga* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ maka $\lim_{n\to\infty} S(x_n, x_n, y_n) = S(x, x, y)$

Bukti. Berdasarkan definisi 4.1.1[5],bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, untuk $\varepsilon > 0$, dengan n_1,$n_2 \in N$ sehingga berlaku $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Karena (x_n)konvergen-S ke$x$, maka terdapat $n_1 \in N$ sehingga untuk setiap n$\in N$ dengan $\forall n \geq n_1$ berlaku$S(x_n, x_n, x) < \frac{\varepsilon}{4}$
Karena (y_n)konvergen-S ke$y$, maka terdapat $n_2 \in N$ sehingga untuk setiap n$\in N$ dengan$\forall n \geq n_2$ berlaku$S(y_n, y_n, y) < \frac{\varepsilon}{4}$
Jika$n_0 =$ maks (n_1, n_2), untuk setiap $n \geq n_0$, kita dapatkan sesuai dengan syarat ketiga dari Ruang Metrik – Sdalam definisi 2.2 (S3) [2],

$S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a)$ ...definisi 2.2 (S3)[2]

$$S(x_n, x_n, y_n) \leq S(x_n, x_n, a) + S(x_n, x_n, a) + S(y_n, y_n, a)$$
$$\leq S(x_n, x_n, x) + S(x_n, x_n, x) + S(y_n, y_n, x)$$
$$= 2S(x_n, x_n, x) + S(y_n, y_n, x)$$

$= 2S(x_n, x_n, x) + S(y_n, y_n, a) + S(y_n, y_n, a) + S(x, x, a)$ ...definisi 2.2 (S3)[2]

$$= 2S(x_n, x_n, x) + S(y_n, y_n, y) + S(y_n, y_n, y) + S(x, x, y)$$
$$= 2S(x_n, x_n, x) + 2S(y_n, y_n, y) + S(x, x, y)$$
$$< 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) + 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) + S(x, x, y)$$
$$= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + S(x, x, y)$$
$$= \varepsilon + S(x, x, y)$$

Jadi, diperoleh

$$S(x_n, x_n, y_n) - S(x, x, y) < \varepsilon \tag{1}$$

dengan cara yang sama diperoleh
$S(x,y,z) \leq S(x,x,a) + S(y,y,a) + S(z,z,a)$ ...definisi 2.2 (S3)[2]
$S(x,x,y) \leq S(x,x,a) + S(x,x,a) + S(y,y,a)$
$\leq S(x,x,x_n) + S(x,x,x_n) + S(y,y,x_n)$
$= 2S(x,x,x_n) + S(y,y,x_n)$
$= 2S(x,x,x_n) + S(y,y,a) + S(y,y,a) + S(x_n,x_n,a)$...definisi 2.2 (S3)[2]
$= 2S(x,x,x_n) + S(y,y,y_n) + S(y,y,y_n) + S(x_n,x_n,y_n)$
$= 2S(x,x,x_n) + 2S(y,y,y_n) + S(x_n,x_n,y_n)$
$< 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) + 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) + S(x_n,x_n,y_n)$
$= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + S(x_n,x_n,y_n)$
$= \varepsilon + S(x_n,x_n,y_n)$
maka
$S(x,x,y) - S(x_n,x_n,y_n) < \varepsilon$ (2)
dari (1) dan (2) dengan sifat nilai mutlak
misal $a = S(x_n,x_n,y_n) - S(x,x,y) - a = S(x,x,y) - S(x_n,x_n,y_n)$
$a < \varepsilon$ dan $-a < \varepsilon$
maka $-\varepsilon < a$ dan $a < \varepsilon$
sehingga $-\varepsilon < a < \varepsilon$
akibatnya $|a| < \varepsilon$
didapatkan $S(x_n,x_n,y_n) - S(x,x,y) < \varepsilon$ dan $S(x,x,y) - S(x_n,x_n,y_n) < \varepsilon$
maka $-\varepsilon < (S(x_n,x_n,y_n) - S(x,x,y)$ dan $S(x,x,y) - S(x_n,x_n,y_n) < \varepsilon$
sehingga $-\varepsilon < (S(x_n,x_n,y_n) - S(x,x,y) < \varepsilon$
dan sesuai dengan sifat nilai mutlak dalam teorema 2.13[5], mengakibatkan $|S(x_n,x_n,y_n) - S(x,x,y)| < \varepsilon$
Jadi, berdasarkan teorema 2.12[2],untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \epsilon N$sedemikian sehingga untuk setiap $n \epsilon N$ dengan $n \geq n_0$ berlaku $|S(x_n,x_n,y_n) - S(x,x,y)| < \varepsilon$. Akibatnya, berdasarkan definisi 4.1.1[4], barisan (X_n)konvergen-S ke$X$ dan (Y_n) konvergen-S ke$Y$ atau dengan kata lain
$\lim_{n\to\infty} S(x_n,x_n,y_n) = S(x,x,y)$.■

4.2 Teorema Titik Tetap di Ruang Metrik-S

Teorema4.2.1 Misalkan (X,S) adalah ruang metrik-S, suatu pemetaan kontraktif pada (X,S) adalah pemetaan kontinu-*S* pada (X,S)
Bukti
Misal *T : X* →*X* adalah pemetaan kontraktif pada (X,S) maka terdapat konstanta *L* ∈ ℝ, dengan *0* ≤*L* < *1* sehingga *S(T (x), T (x), T (y))*≤ *L S(x, x, y)*, ∀ *x*, *y* ∈ *X*
Untuk $L = 0$
Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, sehingga untuk setiap $\delta > 0$ dan setiap *x*, *y* ∈ *X* dengan *S(x, x, y)*< δ, berlaku

$$\begin{aligned} S(T(x), T(x), T(y)) &\leq L\, S(x,x,y) \\ &= 0 \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi, untuk sebarang $\varepsilon > 0$, sehingga untuk setiap $\delta > 0$ dan setiap *x*, *y* ∈ *X* dengan *S(x, x, y)*< δ, berlaku *S(T (x), T (x), T (y)*< ε

Berdasarkan definisi 2.6[5], maka $T: X \rightarrow X$ kontinu-*S*
Untuk $0 \leq L < 1$
Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$
Sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dengan $S(x, x, y) < \delta$, berlaku

$$\begin{aligned} S(T(x), T(x), T(y)) &\leq L\, S(x, x, y) \\ &< L\delta \\ &= L\left(\frac{\varepsilon}{L}\right) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi, untuk seberang $\varepsilon < 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x,y \in X$ dengan $S(x, x, y) < \delta$, berlaku $S(T(x), T(x), T(y) < \varepsilon$.
Berdasarkan definisi 2.6[4], maka $T: X \rightarrow X$ kontinu-*S*. ■

Teorema4.2.2 *Diberikan* (X, S) *adalah Ruang Metrik-S lengkap dan* $T: X \rightarrow X$ *adalah kontraktif. Maka T mempunyai titik tetap tunggal* $u \in X$. *Selanjutnya untuk* $x \in X$ *didapatkan* $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = u$ *dengan*

$$S(T^n(x), T^n(x), u) \leq \frac{2L^n}{1-L} S(x, x, T(x))$$

Bukti :
A. Selanjutnya, teorema titik tetap dari pemetaan kontraktif pada ruang metrik-S lengkap dinyatakan sebagai berikut:
Untuk menunjukan eksistensi dan ketunggalan titik tetap dari T akan dibuktikan :
(i) (x_n) konvergen-S ke u
(ii) u titik tetap dari pemetaan T
(iii) Titik tetap u tunggal
Berikut ditunjukan bahwa $(x_n) \subseteq x$ barisan yang konvergen-S ke $u \in X$
(i) (x_n) konvergen-S ke u
Misal T memenuhi syarat pemetaan kontraktif (definisi 2.4[4]) dan misalkan $x_0 \in X$
Didefinisikan barisan (x_n) dengan $x_n = T^n(x_0)$ untuk $n \in \mathbb{N}$, yakni

$$\begin{aligned} &x_1 = T(x_0) \\ &x_2 = T(x_1) = T^2(x_0) \\ &\vdots \\ &x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0) \\ &x_{n+1} = T(x_n) = T^{n+1}(x_0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

sehingga untuk $x = x_{n-1}, y = x_n,$
diperoleh $T(x) = x_n, T(y) = x_{n+1}$
maka syarat pemetaan kontraktif definisi (2.4[4]) menunjukkan bahwa

$$S(T(x), T(x), T(y) \leq LS(x, x, y)$$
$$S(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq LS(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n)$$

sehingga untuk $n \in \mathbb{N}$, berlaku

$$S(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \leq LS(x_{n-2}, x_{n-2}, x_{n-1})$$

$$S(x_{n-2}, x_{n-2}, x_{n-1}) \leq LS(x_{n-3}, x_{n-3}, x_{n-2})$$
$$\vdots$$

$S(x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-1)}, x_{n-(n-2)}) \leq LS(x_{n-n}, x_{n-n}, x_{n-(n-1)})$
Selanjutnya diperoleh

$$
\begin{aligned}
S(T(x), T(x), T(y) &\leq LS(x, x, y) \\
S(x_n, x_n, x_{n+1}) &\leq LS(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \\
&\leq L\big(LS(x_{n-2}, x_{n-2}, x_{n-1})\big) \\
&\leq L\big(LS(x_{n-3}, x_{n-3}, x_{n-2})\big) \\
&\vdots \\
&\leq (\overbrace{L.L.\dots L}^{\text{n faktor}})\, S(x_{n-n}, x_{n-n}, x_{n-(n-1)}) \\
&= L^n S(x_0, x_0, x_1)
\end{aligned}
$$

Jadi, $S(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq L^n S(x_0, x_0, x_1)$ ……..……persamaan A.1
Selain itu, untuk setiap n, m ∈ℕ dengan $m > n$, dengan menggunakan ketaksamaan segiempat (S3)[2] maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
S(x_n, x_n, x_m) &\leq 2S(x_n, x_n, x_{n+1}) + S(x_m, x_m, x_{n+1}) \\
&= 2S(x_n, x_n, x_{n+1}) + S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_m)
\end{aligned}
$$

Sehingga untukn, m ∈ℕ dengan $m > n$

$$
\begin{aligned}
S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_m) &\leq 2S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+2}) + S(x_{n+2}, x_{n+2}, x_m) \\
S(x_{n+2}, x_{n+2}, x_m) &\leq 2S(x_{n+2}, x_{n+2}, x_{n+3}) + S(x_{n+3}, x_{n+3}, x_m) \\
&\vdots \\
S(x_{m-2}, x_{m-2}, x_m) &\leq 2S(x_{m-2}, x_{m-2}, x_{m-1}) + S(x_{m-1}, x_{m-1}, x_m)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, dengan penggunaan berulang ketaksamaan segiempat (S3)[6] maka

$$
\begin{aligned}
&S(x_n, x_n, x_m) \leq 2S(x_n, x_n, x_{n+1}) + S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_m) \\
&\leq 2S(x_n, x_n, x_{n+1}) + 2S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+2}) + S(x_{n+2}, x_{n+2}, x_m) \\
&\leq 2S(x_n, x_n, x_{n+1}) + 2S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+2}) + 2S(x_{n+2}, x_{n+2}, x_{n+3}) \\
&\qquad + S(x_{n+3}, x_{n+3}, x_m) \\
&\qquad \vdots \\
&\leq 2S(x_n, x_n, x_{n+1}) + 2S(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+2}) + 2S(x_{n+2}, x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots \\
&\qquad + S(x_{m-1}, x_{m-1}, x_m) \\
&\leq 2S(x_n) + 2S(x_{n+1}) + 2S(x_{n+2}) + \cdots + 2S(x_{m-1}) \\
&\leq 2L^n S(x_0, x_0, x_1) + 2L^{n+1} S(x_0, x_0, x_1) + 2L^{n+2} S(x_0, x_0, x_1) + \cdots \\
&\qquad + 2L^{m-1} S(x_0, x_0, x_1) \\
&\leq 2L^n S(x_0, x_0, x_1)[1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-n-1}] \\
&\leq 2L^n S(x_0, x_0, x_1)[1 + L + L^2 + \cdots] \text{ (dengan deret geometri)} \\
&\qquad = 2L^n S(x_0, x_0, x_1) \frac{1}{1 - L} \\
&= \frac{2L^n}{1 - L} S(x_0, x_0, x_1)
\end{aligned}
$$

Jadi, $S(x_n, x_n, x_m) \leq \frac{2L^n}{1-L} S(x_0, x_0, x_1)$
Karena $L \in [0,1)$ atau $0 \leq L < 1$ maka $\lim_{n \to +\infty} L^n = 0$

$$
\lim_{n,m \to +\infty} S(x_n, x_n, x_m) \leq \lim_{n,m \to +\infty} \frac{2L^n}{1 - L} S(x_0, x_0, x_1) = 0
$$

Dengan $S(x_0, x_0, x_1) > 0$, maka dengan mengambil limit $m, n \to +\infty$ didapatkan

$$
\lim_{n,m \to +\infty} S(x_n, x_n, x_m) = 0
$$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 1-10

Dengan kata lain berdasarkan definisi 4.1.4[4]dan lemma 4.1.5[2] maka $S(x_n, x_n, x_m) < \varepsilon$, akibatnya (x_n) barisan Cauchy-S
Karena (x_n) Cauchy-S dan (X, S) metrik lengkap maka (x_n) konvergen-S di x, maka terdapat $u \in x$ sehingga x_n adalah konvergen-S ke u.■

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa u ∈ X merupakan titik tetap dari T.

(ii) U titik tetap dari T

Karena $x_n \to u$ dengan kata lain $\lim_{n,m\to+\infty} x_n = u$ atau $\lim_{n,m\to+\infty} T^n(x_0) = u$
Dengan menggunakan sifat ekor barisan

$$\begin{aligned} u &= \lim_{n,m\to+\infty} x_n \\ &= \lim_{n,m\to+\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n,m\to+\infty} T^{n+1}(x_0) \\ &= \lim_{n,m\to+\infty} T(T^n(x_0)) \\ &= T(u) \end{aligned}$$

Jadi, $u = T(u)$, maka u titik tetap T
karena u titik tetap dari T, akan ditunjukkan bahwa titik tetap u tunggal.■

(iii) Titik tetap u tunggal

Andaikan u dan v adalah dua titik tetap dari T, dengan $u \neq v$ maka

$$\begin{aligned} S(u, u, v) &= S\big(T(u), T(u), T(v)\big) && \ldots\ldots u = Tu \\ &\leq LS(u, u, v) && \ldots\ldots \text{definisi (2.4 [4])} \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa $1 \leq L$
Terjadi kontradiksi dengan diketahui bahwa $L < 1$ maka haruslah $u = v$,
Jadi, T mempunyai titik tetap yang tunggal u.■

B. Pada persamaan A.1 diperoleh

$$S(T^n(x_0), T^n(x_0), T^m(x_0) \leq L^n S(x_0, x_0, x_1)$$

Karena $T^m(x_0) \to u$ untuk $m \to +\infty$
Maka, $S(T^n(x_0), T^n(x_0), u \leq L^n S(x_0, x_0, x_1)$
$= S(T^n(x), T^n(x), u) \leq \frac{2L^n}{1-L} S(x, x, T(x))$.

5. KESIMPULAN

1. Pemetaan kontraktif pada ruang metrik-S dinyatakan sebagai berikut: *Diberikan (X,S) adalah Ruang Metrik-S. Pemetaan T : X →X disebut pemetaan kontraktif jika terdapat 0 ≤L < 1 sedemikian sehingga S(T (x), T (x), T (y))≤ L S(x, x, y), ∀ x, y ∈ X*
2. Suatu pemetaan kontraktif pada ruang metrik-S (X, S) adalah pemetaan kontinu-*S* pada ruang metrik-S (X, S)
3. Untuk menunjukkan eksistensi dan ketunggalan titik tetap dari pemetaan kontraktif T di ruang metrik - S harus memenuhi syarat :
   a) (x_n) konvergen-S ke u
   b) u titik tetap dari pemetaan T
   c) Titik tetap u tunggal

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kreyszieg, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. University of Windsor, Canada.
[2] Sedghi, S. N. Shobe, A. Aliouche. 2012. A Generalization of Fixed Point Theorem in S-metric Spaces. India.Mat. Vesnik 64, 258-266.
[3] Baisuni, H. M. Hasyim. 2005. *Kalkulus.* Universitas Indonesia (UI-Press), Indonesia.
[4] Sedghi, S. and Nguyen Van Dung. 2012. Fixed Point Theorems on S-Metric Spaces. *Dong Thap University*. India. Mat. Vesnik 66, 113-124.
[5] Bartle, R.G. & D.R. Sherbert. 2010. *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*. Urbana, Illinois: John Wiley & Sons, Inc., New York.
[6] Mustafa, Z. and H.Obiedat. 2010. A Fixed Point Theorem of Reich in G-Metric Spaces.*CUBO A Mathematical Journal*, 83-93.