

MODEL MATEMATIKA PADA PENYEBARAN MALARIA DI KALIMANTAN SELATAN

Rahmi Hidayati, Faisal, Yuni Yulida*

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat

*Email: y_yulida@unlam.ac.id

ABSTRAK

Malaria adalah penyakit menular yang disebabkan *plasmodium* melalui gigitan nyamuk *Anopheles* betina. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menjelaskan terbentuknya model penyebaran malaria di Kalimantan Selatan, menganalisis dan menginterpretasi tingkat infeksi. Penelitian ini dilaksanakan dengan mencari data kasus malaria kemudian mengkaji model SIR, menentukan asumsi yang diperlukan, membentuk model SIR, menentukan kestabilan model dan menganalisis tingkat infeksi malaria dengan model matematika. Model penyebaran malaria di Kalimantan Selatan merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier. Pada model ini diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Setelah dianalisis tingkat infeksi di Kalimantan Selatan untuk setiap kabupaten menggunakan model tersebut, diperoleh tingkat infeksi malaria paling rendah terjadi di Banjarmasin dan paling tinggi terjadi di Kabupaten Balangan. Infeksi malaria mengalami penurunan setiap tahunnya sehingga infeksi akan hilang seiring berjalannya waktu hal ini menjelaskan bahwa Kalimantan Selatan akan bebas dari infeksi malaria.

Kata Kunci : malaria, model SIR, titik ekuilibrium, kestabilan, bilangan reproduksi dasar

1. PENDAHULUAN

Pemberantasan malaria selalu dilakukan dan pencapaiannya sudah mengalami peningkatan, namun masih menjadi suatu masalah dan perlu upaya yang lebih keras untuk mencapai target bebas malaria 2020 [4]. Salah satu cara untuk memberantas penyakit yaitu dengan mengendalikannya. Pengendalian tersebut dapat dilakukan melalui pemodelan matematika. Ross pertama kali memodelkan penyebaran penyakit malaria menggunakan model matematika. Kemudian Kermack & McKendrick mengenalkan salah satu model epidemik dasar yaitu SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*)[7]. Tingkat infeksi malaria dapat dianalisis dengan memodelkan penyebaran penyakit malaria menggunakan model SIR dan melalui bilangan reproduksi dasar [8]. Bilangan reproduksi dasar merupakan parameter yang biasa digunakan dalam masalah penyebaran penyakit adalah *Rasio Reproduksi Numbers* atau *Basic Reproduksi Numbers*. *Rasio Reproduksi* merupakan rasio yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang dapat menderita penyakit yang diakibatkan oleh satu individu *infected* [11]. Oleh karena itu, model yang akan dibahas pada penelitian ini juga menggunakan model SIR dengan tujuan untuk menganalisa tingkat infeksi untuk daerah Kalimantan Selatan.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier

Bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \end{aligned} \quad \dots (1)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dengan $f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$; $j = 1, 2, \dots, n$ merupakan fungsi nonlinear yang kontinu pada interval $a \leq t \leq b$.

Persamaan (1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad \dots (2)$$

2.2 Titik Ekuilibrium

Definisi 2.1.1[9]

Titik $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium jika pada persamaan (1) $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

2.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.2.1[6]

λ disebut nilai eigen dari matriks A berukuran $n \times n$ jika terdapat x vektor tak nol maka,

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \quad \dots(3)$$

dengan \mathbf{x} disebut sebagai vektor eigen dari matriks \mathbf{A} .

Nilai eigen dan vektor eigen diperoleh dari

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{I} \mathbf{x} \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \dots(4)$$

dengan \mathbf{I} merupakan matriks identitas. Persamaan (4) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= 0 \\ |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| &= 0 \end{aligned} \quad \dots(5)$$

Persamaan (5) disebut persamaan karakteristik dari matriks \mathbf{A} .

2.3 Linierisasi

Diberikan sistem persamaan diferensial biasa nonlinier pada persamaan (2) tersebut, untuk melinierisasi sistem digunakan matriks Jacobian.

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \dots (6)$$

dengan \mathbf{J} adalah matriks Jacobian [3]

Teorema 2.3.1 [3]

Jika λ_i merupakan nilai eigen dari matriks Jacobian $n \times n$ di titik kesetimbangan $\hat{\mathbf{x}}$ dan $Re(\lambda_i)$ merupakan bagian riil dari λ_i maka:

1. Untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $Re(\lambda_i) < 0$ maka $\hat{\mathbf{x}}$ stabil asimtotik
2. Jika terdapat $Re(\lambda_i) > 0$ untuk suatu i maka $\hat{\mathbf{x}}$ tidak stabil.

2.4 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) berfungsi untuk menginformasikan terjadinya penyebaran penyakit dan dapat menjadi parameter dalam memberikan strategi untuk

pengendalian penyakit. Untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan dalam masalah penyebaran penyakit adalah *Rasio Reproduksi Numbers* atau *Basic Reproduksi Numbers*. *Rasio Reproduksi* merupakan rasio yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang dapat menderita penyakit yang diakibatkan oleh satu individu *infected*. Penyakit akan menyebar jika laju pertumbuhan *Infected* terhadap waktu lebih dari nol dan penyakit tidak akan menyebar jika laju pertumbuhan *Infected* (kelompok yang terinfeksi) terhadap waktu kurang dari nol [5, 11].

2.5 Malaria

Malaria disebabkan oleh parasit dari spesies *Plasmodium*. Parasit ditularkan ke manusia melalui gigitan nyamuk *Anopheles* betina. Setelah menggigit manusia parasit berubah melalui siklus hidup yang kompleks. Parasit berkembang biak dalam hati dan aliran darah manusia. Setelah 10 sampai 15 hari nyamuk membawa parasit dan dapat menginfeksi orang baru. Sekitar 9 sampai 14 hari setelah digigit, akan muncul gejala malaria [10]. Di Indonesia, secara umum terdapat 4 spesies yaitu *Plasmodium falcifarum* dan *Plasmodium vivax*, *Plasmodium malariae*, dan *Plasmodium ovale* dan pernah ditemukan kasus malaria yang disebabkan oleh *Plasmodium ovale* yang dilaporkan dari Flores [1].

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara mengumpulkan referensi pendukung yang berkaitan dengan malaria, model SIR, titik ekuilibrium, kestabilan, bilangan reproduksi dasar serta pengambilan data. Referensi tersebut dipelajari, dibahas dan dianalisis tingkat infeksi malarianya.

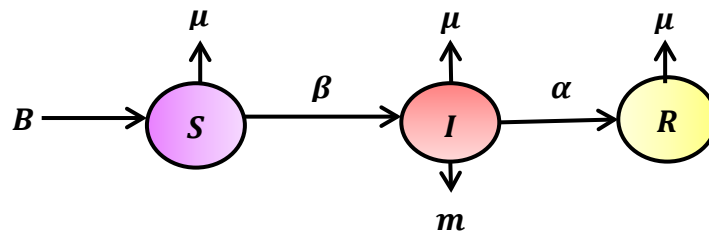
4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Penyebaran Malaria

Adapun asumsi-asumsi yang digunakan pada model penyebaran malaria sebagai berikut:

1. Populasi diasumsikan terbuka sehingga ada populasi yang bertambah (masuk) maupun berkurang (keluar) dari populasi tersebut.
2. Kelahiran dan kematian alami konstan.
3. Hanya terdapat penyakit malaria dalam populasi.
4. Penyakit menyebar melalui kontak antara individu dengan nyamuk.
5. Setiap individu yang lahir langsung masuk dalam kelompok *susceptible*.
6. Individu yang terinfeksi malaria dapat sembuh dari penyakit dan dapat mengalami kematian karena penyakit maupun secara alami.
7. Individu yang terinfeksi malaria dapat sembuh karena siklus malaria yang singkat dan adanya kekebalan tubuh alami.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah ditentukan, maka dibentuk diagram alir penyebaran malaria sebagai berikut :



Gambar 1. Alur Penyebaran Penyakit Malaria

Dari kompartemen di atas, parameter-parameter yang digunakan pada model penyebaran malaria didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= B - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\alpha + m + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I - \mu R \end{aligned} \quad \dots(7)$$

Persamaan (7) disebut sebagai model penyebaran malaria. Model ini merujuk pada Model Malaria yang dipaparkan oleh Momoh, A.A., dkk. 2012. Berikut keterangan untuk variabel dan parameter yang digunakan pada Model.

- S : Jumlah populasi yang rentan terhadap penyakit malaria
- I : Jumlah populasi yang sakit (terinfeksi) penyakit malaria
- R : Jumlah populasi yang sembuh dari penyakit malaria
- B : jumlah kelahiran individu (konstan)
- β : laju penularan penyakit malaria
- α : laju kesembuhan penyakit malaria
- μ : laju kematian alami
- m : laju kematian karena penyakit malaria

4.2 Titik Ekuilibrium Model Penyebaran Malaria

Model penyebaran malaria ini mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu $E_0 = \left(\frac{B}{\mu}, 0, 0\right)$ dan $E_1 = \left(\frac{(\alpha+m+\mu)}{\beta}, \frac{B\beta-\mu(\alpha+m+\mu)}{\beta(\alpha+m+\mu)}, \frac{B\beta\alpha-\mu\alpha(\alpha+m+\mu)}{\beta\mu(\alpha+m+\mu)}\right)$.

4.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah suatu parameter yang digunakan untuk mengetahui penyebaran penyakit.

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\alpha + m + \mu)I \\ &= \frac{\beta}{(\alpha+m+\mu)} (\alpha + m + \mu)SI - I(\alpha + m + \mu) \end{aligned}$$

misal $R_0 = \frac{\beta}{(\alpha+m+\mu)}$

$$\frac{dI}{dt} = R_0(\alpha + m + \mu)SI - I(\alpha + m + \mu)$$

$$\begin{aligned} \text{nilai } \frac{dI}{dt} &= [R_0S - 1]I(\alpha + m + \mu) < 0 \\ &= [R_0S - 1]I(\alpha + m + \mu) < 0 \end{aligned}$$

karena $(\alpha + m + \mu) > 0, I > 0$

maka

$$R_0S - 1 < 0$$

$$R_0 S < 1$$

$$R_0 < \frac{1}{S} \quad \dots(8)$$

dengan S adalah jumlah populasi yang rentan. Dari persamaan (8), jelas bahwa $R_0 < \frac{1}{S}$ artinya tingkat infeksi penyakit akan hilang seiring waktu.

4.4 Kestabilan di Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - (\alpha + m + \mu) & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu \end{bmatrix}$$

$$|J - \lambda I| = 0$$

$$J = \begin{vmatrix} -\beta I - \mu - \lambda & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - (\alpha + m + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\beta I - \mu - \lambda)[\beta S - (\alpha + m + \mu) - \lambda](-\mu - \lambda) - \mu\beta^2 IS - \lambda\beta^2 IS = 0 \quad \dots(9)$$

substitusi $E_0 = (\frac{B}{\mu}, 0, 0)$ ke persamaan (9) sehingga diperoleh :

$$\lambda_{1,2} = -\mu \text{ atau } \lambda_3 = \beta \frac{B}{\mu} - (\alpha + m + \mu)$$

Berdasarkan Teorema 2.3.1 titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik jika $R_0 < \frac{\mu}{B}$.

4.5 Analisis Tingkat Infeksi Malaria di Kalimantan Selatan

Analisis tingkat infeksi malaria dilakukan menggunakan sebuah parameter R_0 , untuk mendapatkan parameter tersebut dilakukan perhitungan sebagai berikut. Jumlah populasi terinfeksi akan bernilai konstan jika

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\alpha + m + \mu)I$$

$$= \frac{\beta}{(\alpha + d + \mu)} (\alpha + m + \mu)SI - (\alpha + m + \mu)I$$

$$= R_0(\alpha + m + \mu)SI - (\alpha + m + \mu)I$$

$$\Leftrightarrow [R_0 S - 1](\alpha + m + \mu)I = 0$$

karena $(\alpha + m + \mu)I \neq 0$ maka

$$R_0 S - 1 = 0 \Leftrightarrow R_0 S = 1 \Leftrightarrow R_0 = \frac{1}{S} \quad \dots(10)$$

Tingkat infeksi akan menurun ketika $R_0 < \frac{1}{S}$. Pada persamaan (10) dan persamaan (8) dapat dimisalkan $R_0 = \frac{K}{S}$ dengan $0 < K \leq 1$. K adalah nilai kemungkinan agar populasi tetap konstan atau tidak menyebar. Jika $R_0 > \frac{1}{S}$ maka penyakit akan mewabah.

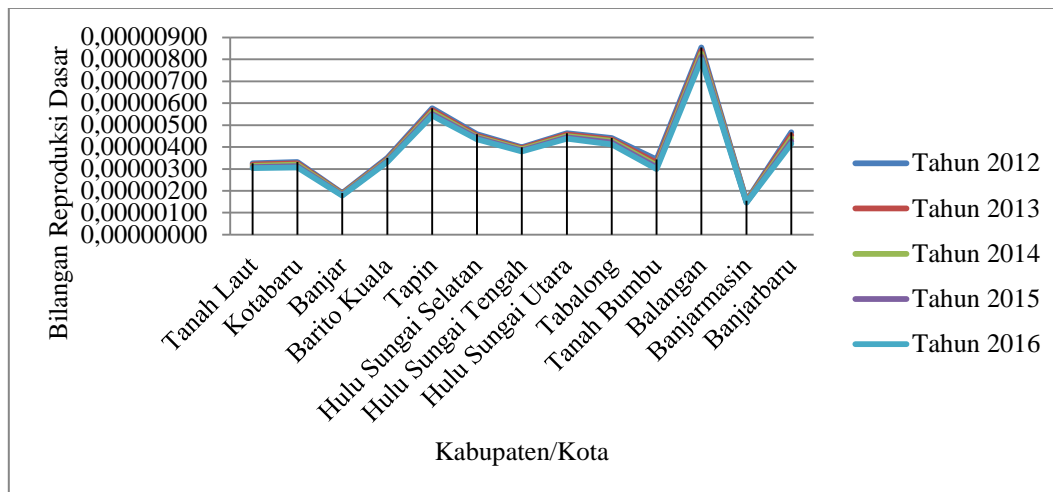
Selanjutnya pada Model (7), karena Sub Populasi yang sembuh dari penyakit malaria (R) tidak mempengaruhi Populasi Terinfeksi (I) dan dan Rentan (S) maka

analisa berikut tidak menampilkan populasi yang sembuh (R) . Berikut data penyakit malaria di Kalimantan Selatan.

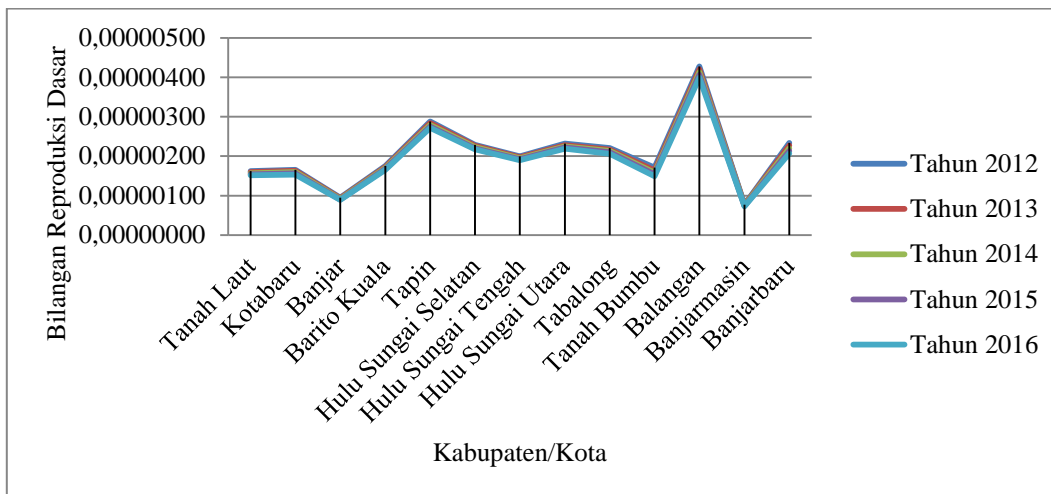
Tabel 1. Jumlah Populasi yang Terinfeksi (I) dan Rentan (S) Tahun 2012-2016 [2]

No.	Kabupaten/Kota	Populasi									
		Tahun 2012		Tahun 2013		Tahun 2014		Tahun 2015		Tahun 2016	
		I	S	I	S	I	S	I	S	I	S
1	Tanah Laut	1013	307497	450	313275	291	318807	119	324164	74	329212
2	Kotabaru	1416	301566	1447	307283	1122	313370	297	319911	174	325653
3	Banjarnegara	651	526544	652	535676	578	544819	179	554264	176	562886
4	Barito Kuala	466	285129	227	289768	88	294021	44	298238	18	302286
5	Tapin	357	173512	406	176062	204	178962	111	181667	101	184229
6	Hulu Sungai Selatan	441	218456	308	221306	213	224261	71	227082	42	229847
7	Hulu Sungai Tengah	227	250478	182	253686	187	256920	114	260178	65	263311
8	Hulu Sungai Utara	155	215825	78	219132	66	222248	44	225342	38	228490
9	Tabalong	1278	226436	1139	230579	1711	234066	1711	237882	938	242539
10	Tanah Bumbu	3332	291700	1586	304599	451	315364	256	324859	166	334148
11	Balangan	79	117009	119	119052	251	121067	309	123140	299	125235
12	Banjarmasin	52	647351	40	656738	31	666192	7	675433	3	684180
13	Banjarnegara	274	213737	162	220533	74	227426	139	234232	8	241361

Berdasarkan Data pada Tabel 1 dan rumusan nilai R_0 menggunakan persamaan (10) maka penyebaran tingkat infeksi malaria di Kalimantan Selatan disajikan sebagai berikut.



Gambar 2. Penyebaran tingkat infeksi malaria untuk $K = 1$ (populasi terinfeksi tetap ada dalam populasi tetapi tidak mewabah)



Gambar 3. Penyebaran tingkat infeksi malaria untuk $K = 0,5$ (populasi terinfeksi semakin menurun)

Berdasarkan gambar 2 dan 3 dengan nilai K yang semakin kecil maka nilai R_0 pada setiap Kabupaten/Kota juga semakin kecil setiap tahunnya. Berdasarkan nilai R_0 yang diperoleh memberikan informasi bahwa tingkat infeksi malaria paling rendah terjadi di Kota Banjarmasin karena nilai R_0 paling kecil sedangkan tingkat infeksi malaria paling tinggi terjadi di Kabupaten Balangan karena nilai R_0 paling besar.

5. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat ditarik dari hasil penelitian adalah sebagai berikut :

1. Model penyebaran malaria di Kalimantan Selatan sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = B - \beta SI - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\alpha + m + \mu)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R$$

2. Tingkat infeksi malaria paling rendah terjadi di Kota Banjarmasin karena nilai bilangan reproduksi dasarnya paling kecil. Sedangkan tingkat infeksi malaria paling tinggi terjadi di Kabupaten Balangan karena nilai bilangan reproduksi dasarnya paling besar.
3. Infeksi malaria di Kalimantan Selatan mengalami penurunan setiap tahunnya berdasarkan nilai bilangan reproduksi dasar yang semakin kecil setiap tahun yang diamati.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Arsin, A.A. 2012. *Malaria di Indonesia Tinjauan Aspek Epidemiologi*. Masagena Press, Makassar.
- [2] Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Kalimantan Selatan. <https://kalsel.bps.go.id/linkTableDinamis/view/id/874> (diakses tanggal 15 Februari 2017)

- [3] Bellomo, N.& L. Preziosi. 1995. *Modelling Mathematical Method and Scientific Computation* . CRC press, Florida.
- [4] Dinas Kesehatan Kalimantan Selatan. 2016. *Rencana Strategis Dinas Kesehatan Provinsi Kalimantan Selatan*. Dinkes Kalsel, Banjarmasin.
- [5] Driessche, P & Watmough, J .2005. *Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission*. Mathematical Bioscience.
- [6] Edward, C.H & Penny, D,E. 2005. *Differential Equation & Linear Algebra Edisi Kedua*. Peason Prentice Hall, Amerika.
- [7] Kermack, W. O. & McKendrick, A.G. 1927. *Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics*. Pross. Royal Soc.A. 115. 700-721.
- [8] Momoh, A.A., dkk. 2012. *Mathematical Modelling of Malaria Transmission in North Senatorial Zone of Taraba State Nigeria*. IOSR Journal of Matematics. 3.7-13.
- [9] Perko, L. 1991. *Differential Equation an Dynamical systems*. Text in Apllied Mathematic vol 7. Springer-Verlag, New York, USA.
- [10]Rollback. 2010. *Mathematical Modelling to Support Malaria Control and Elimination*. WHO Library Cataloguin, Switzerland.
- [11] Yulida, Y., Faisal dan Anggraini, D. 2011. *Model Epidemik Dua Penyakit Dalam Satu Populasi*. Jurnal Matematika Murni dan Terapan Epsilon Vol.5 No.1 Hal.31-42.