Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 36-46

TEOREMA TITIK TETAP UNTUK PEMETAAN KONTRAKSI-F YANG DIPERUMUM PADA RUANG SEPERTI-METRIK-b

Yunita Lidiyani, M. Mahfuzh Shiddiq*, Akhmad Yusuf
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
*Email: *mmahfuzhs@unlam.ac.id*

ABSTRAK

Ruang metrik adalah pasangan himpunan tak kosong X dengan suatu metrik (fungsi jarak) d di dalam Xyang ditulis dengan (X,d). Beberapa peneliti memperkenalkan notasi baru dari metric yaitu ruang seperti-metrik, lebih jauh lagi dikembangkan perumuman baru dari ruang seperti-metrik dikenalkan yang selanjutnya disebut ruang seperti-metrik-b dan membuktikan teorema titik tetap pada ruang seperti-metrik-b. Pada ruang seperti-metrik-b, kontraksi-F dapat diperumum dan dibuktikan teorema titik tetap pada ruang seperti-metrik-b tersebut. Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan kontraksi-F yang diperumum pada ruang seperti-metrik-b.Penelitian ini bersifat studi literatur dengan mengumpulkan materi yang berkaitan dengan topik penelitian. Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh bahwa pemetaan Tyang merupakan kontraksi-F yang diperumum mempunyai titik tetap. Titik tetap dari T dapat ditunjukkan dengan memenuhi syarat bahwa barisan Cauchykonvergen ke titik$x \epsilon X$, $x$adalah titik tetap dari T dan pemetaan tersebut merupakan pemetaan titik tetap terhadap dirinya sendiri pada ruang seperti-metrik-b.

Kata Kunci : *Ruang seperti-metrik-b, pemetaan kontraksi-F yang diperumum, titiktetap*

ABSTRACT

A Metric space is a pairs of nonempty set X with a metric (distance function) d in X written as (X,d). Harandi introduced a new notion that is metric-like space and Algamdi introduced a new generalized aboutmetric-like space were called b-metric-like space and provesome fixed point theorems in b-metric-like space.In the b-metric-like space, F-contrations can be generalized and proved the fixed point theorems in that b-metric-like space. The purpose of this research is prove a fixed point theorems for generalized F-contraction mapping in b-metric-like space. This research is study of literature by collecting materials related to research topic. The results of this research is found that a mapping T thatrepresents the mapping of the F-contraction that is generalized has a fixed point. The fixed point of T can be shown by satisfying the requirement that the Cauchy sequence converges to a point $x \in X$, x is the fixed point of T and that mapping is a self-mapping fixed point in the b-metric-like space.
Keywords : *b-metric-like space,generalized F-contractionsmapping, fixed point*

1. PENDAHULUAN

Peneliti mengembangkan bebarapa perluasan dari konsep metric, diantaranya pemetaan kontraksi pada ruang metrik-b dan ruang seperti-metrik [5,7]. Pada tahun 2013, Alghamdi [1] memperkenalkan perumuman baru dari ruang seperti-metrik yang selanjutnya disebut ruang seperti-metrik-b dan membuktikan teorema titik tetap pada ruang seperti-metrik-b.

Selanjutnya Wardowski [10] memperkenalkan notasi pemetaan kontraksi baru yang disebut dengan pemetaan kontraksi-F dan membuktikan teorema titik tetap pada ruang metrik lengkap. Pada ruang seperti-metrik-b, pemetaan kontraksi-F dapat diperumum pada ruang seperti-metrik-b itu sendiri dan dapat diselidiki teorema titik tetap untuk pemetaan kontraksi-F pada ruang seperti-metrik-b.

Dalam matematika, teorema titik tetap merupakan hal penting pada konsep ruang metrik. Teorema ini menunjukkan bahwa titik tetap dari pemetaan satu-satu pada ruang metrik ada. Teorema ini pertama kali dibuktikan oleh Stefan Banach pada tahun 1920.Teori titik tetap banyak dikembangkan dalam analisis fungsional untuk menyelidiki titik tetap pada ruang metrik serta perluasan pada konsep ruang tersebut [9].

Salah satu domain perluasan ruang metrik yaitu pada ruang seperti-metrik-b, dimana perluasan tersebut untuk menyelidiki bahwa titik tetap pada ruang seperti-metrik-b ada.Hal ini mempengaruhi peneliti untuk mengembangkan teori titik tetap pada ruang seperti-metrik-b. Berdasarkan uraian tersebut, penulis akan memperumum pemetaan kontraksi-F pada ruang seperti-metrik-b dan membuktikan teorema titik tetap pada ruang seperti-metrik-b.

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Seperti-metrik-b

Definisi 2.1.1[4]

Himpunan tak kosong X *dengan suatu fungsi* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *untuk setiap* $x, y, z \in X$ *dan konstanta* $k \geq 1$, *maka berlaku :*

1. *jika* $d(x, y) = 0$ maka $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetri)*
3. $d(x, y) \leq k\big(d(x, z) + d(z, y)\big)$ *(ketaksamaan segitiga)*

Pasangan (X, d)*disebut dengan ruang seperti-metrik-b.*

2.2 Barisan di Ruang Metrik dan di Ruang seperti-metrik-b

Definisi 2.2.1[3]

Barisan $\{x_n\}$ *di ruang seperti-metrik-b konvergen ke titik* $x \epsilon X$ *jika dan hanya jika*

$$\lim_{n \to +\infty} d(x, x_n) = 0$$

Teorema 2.2.2[2]

Barisan monoton $\{x_n\}$ *bilangan riil dikatakan konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut terbatas, lebih jauh :*

(a) *Jika* $X = \{x_n\}$ *adalah barisan terbatas atas, maka*$lim\, \{x_n\} = sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$
(b) *Jika* $Y = \{y_n\}$*adalah barisan terbatas bawah, maka*$lim\, \{y_n\} = inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$

Lemma 2.2.3[2]

Suatu batas bawah dari himpunan tak kosong S di $\mathbb{R}$ *dikatakan infimum dari S jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$*terdapat* $s_\varepsilon \in S$ *sedemikian sehingga* $s_\varepsilon < w + \varepsilon$.

2.3 Barisan Cauchy

Defnisi 2.3.1[3]

Barisan $\{x_n\}$ *di ruang seperti-metrik-b* (X, d) *dikatakan barisan Cauchy jika barisan tersebut ada (dan terbatas)*

$$\lim_{m,n \to +\infty} d(x_m, x_n) = 0$$

Definisi 2.3.2 [3]

Ruang seperti-metrik-b dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ *konvergen ke titik* $x \epsilon X$ *sedemikian sehingga*$lim_{n \to +\infty} d(x, x_n) = 0 = \lim_{m,n \to +\infty} d\,(x_m, x_n)$

2.4 Kriteria Barisan

Definisi2.4.1[2]

Jika $S \subseteq \mathbb{R}$, *fungsi* $f : S \to \mathbb{R}$ *dikatakan naik pada* S *jika* $x_1, x_2 \in S$ *dan* $x_1 \leq x_2$ *kemudian* $f(x_1) \leq f(x_2)$. *Fungsi* f *dikatakan naik murni pada S jika* $x_1, x_2 \in S$ *dan* $x_1 < x_2$ *kemudian* $f(x_1) < f(x_2)$.

Jika $S \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $g: S \to \mathbb{R}$ dikatakan turun pada S jika $x_1, x_2 \in S$ dan $x_1 \leq x_2$ kemudian $g(x_1) \geq g(x_2)$. Fungsi g dikatakan turun murni pada S jika $x_1, x_2 \in S$ dan $x_1 < x_2$ kemudian $g(x_1) > g(x_2)$.

Definisi 2.4.2 [2]

Diberikan $\{v_n\}$ merupakan barisan bilangan riil.

(i) Dikatakan $\{v_n\}$ menuju $+\infty$, dan $lim\{v_n\} = +\infty$, jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ maka terdapat bilangan asli $K(\alpha)$sedemikian sehingga jika $n \geq K(\alpha)$maka $v_n > \alpha$.

(ii) Dikatakan $\{v_n\}$ menuju $-\infty$, dan $lim\{v_n\} = -\infty$, jika untuk setiap $\beta \in \mathbb{R}$ maka terdapat bilangan asli $K(\beta)$sedemikian sehingga jika $n \geq K(\beta)$maka $v_n < \beta$.

Teorema 2.4.3[2]

Diberikan $\{v_n\}$ dan $\{w_n\}$ adalah barisan di bilangan riil dan andaikan

$$v_n \leq w_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

(a) Jika $lim\,\{v_n\} = +\infty$, maka $lim\,\{w_n\} = +\infty$.

(b) *Jika $lim\,\{w_n\} = -\infty$, maka $lim\,\{v_n\} = -\infty$.*

2.5 Pemetaan Kontraksi

Definisi 2.5.1 [4]

Diberikan ruang metrik (X, d) adalah ruang metrik. Pemetaan $T : X \to X$ dikatakan kontraksi-F jika terdapat $\tau > 0$ untuk setiap $x, y \epsilon X$ sedemikian sehingga

$$d(T_x, T_y) > 0 \Rightarrow \tau + F\left(d(T_x, T_y)\right) \leq F\big(d(x, y)\big)$$

dimana $F : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ adalah pemetaan yang memenuhi kondisi :

$(F1)$ F naik murni untuk setiap $\alpha, \beta \epsilon (0, +\infty)$ sedemikian sehingga $\alpha < \beta$ jika dan hanya jika $F(\alpha) < F(\beta)$.

$(F2)$ Untuk setiap barisan $\{x_n\}$ di bilangan riil positif, memenuhi kondisi :

$$lim_{n\to+\infty}\, x_n = 0 \text{jika dan hanya jika} lim_{n\to+\infty}\, F(x_n) = -\infty.$$

$(F3)$ terdapat $k \epsilon (0,1)$ sedemikian sehingga $lim_{x\to 0^+}\, x^k F(x) = 0$.

Definisi 2.5.2 [3]

Diberikan ruang seperti-metrik-b(X, d). Pemetaan $T : X \to X$ dikatakan kontraksi-F yang diperumum jika terdapat $\tau > 0$ untuk setiap $x, y \epsilon X$ sedemikian sehingga

$$\frac{1}{2k} d(x, T_x) < d(x, y) \Rightarrow \tau + F\left(d(T_x, T_y)\right) \leq \alpha F\big(d(x, y)\big) + \beta F\big(d(x, T_x)\big)$$
$$+ \gamma F\left(d(y, T_y)\right) + tF\left(\frac{d(x, T_y)}{2k}\right) + hF\left(\frac{d(y, T_x)}{2k}\right)$$

Dengan $d(T_x, T_y) > 0$, dimana $\alpha, \beta, \gamma, t, h \epsilon [0,1]$ sedemikian sehingga $\alpha + \beta + \gamma + t + h = 1$ dan $1 - \gamma - t > 0$.

2.6 Titik Tetap

Definisi 2.6.1 [8]

*Diberikan X himpunan tak kosong dan pemetaan $T : X \to X$, $x \in X$ dikatakan titik tetap dari T jika dan hanya jika $T(x) = x$.*Selanjutnya notasi $T(x)$ yang menyatakan pemetaan T untuk suatu $x \in X$ dapat dituliskan menjadi Tx.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan cara mengumpulkan referensi pendukung yang berkaitan dengan ruang metrik, ruang metrik-b, ruang seperti-metrik-b, pemetaan kontraksi-F, teorema titik tetap pada ruang seperti-metrik-b. Referensi tersebut dipelajari, dibahas dan dijabarkan sehingga dapat dibuktikan teorema titik tetap untuk pemetaan kontraksi-F yang diperumum pada ruang seperti-metrik-b.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Ruang Seperti-metrik-b Lengkap

Lemma 4.1.1

Diberikan (X,d)ruang seperti-metrik-b dan T merupakan pemetaan kontraksi-F yang diperumum dengan barisan $\{d(x_n,Tx_n)\}$ yang didefinisikan

$$\begin{aligned} x_1 &= T_{x_0} \\ x_2 &= T_{x_1} \\ &\vdots \\ x_n &= T_{x_{n-1}} \\ x_{n+1} &= T_{x_n} \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Maka $\{d(x_n,Tx_n)\}$ merupakan barisan bilangan riil turun murni.

Bukti :

Diberikan barisan $\{d(x_n,Tx_n)\}$yang didefinisikan

$$\begin{aligned} x_1 &= T_{x_0} \\ x_2 &= T_{x_1} \\ &\vdots \\ x_n &= T_{x_{n-1}} \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = T_{x_n} \forall\, n \in \mathbb{N} \cdots (4.1)$$

Akan ditunjukkan bahwa barisan $\{d(x_n,Tx_n)\}$merupakan barisan turun murni.

Bukti:

Andaikan terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$d(x_{n_0},Tx_{n_0}) \le d\left(x_{n_0+1},Tx_{n_0+1}\right) \cdots (4.2)$$

$$d\left(x_{n_0},Tx_{n_0}\right) \le d\left(Tx_{n_0},T^2x_{n_0}\right) \qquad \cdots (4.3)$$

Dengan kata lain, terdapat suku di barisan $\{d(x_n,Tx_n)\}$yang memenuhi sifat barisan naik. Definisi 2.5.6 menunjukkan bahwa :

$$\begin{aligned} \tau + F\ \left(d\left(Tx_{n_0},T^2x_{n_0}\right)\right) &\le \alpha F\left(d\left(x_{n_0},Tx_{n_0}\right)\right) + \beta F\left(d\left(x_{n_0},Tx_{n_0}\right)\right) \\ &+\gamma F\left(d\left(Tx_{n_0},T^2x_{n_0}\right)\right) +\ tF\left(\frac{d\left(x_{n_0},T^2x_{n_0}\right)}{2k}\right) + hF(\frac{d\left(Tx_{n_0},Tx_{n_0}\right)}{2k}) \end{aligned}$$

Selanjutnya, Definisi 2.1.1 (3) menunjukkan bahwa:

$$\begin{aligned} \tau + F\ \left(d\left(Tx_{n_0},T^2x_{n_0}\right)\right) &\le \alpha F\left(d\left(x_{n_0},Tx_{n_0}\right)\right) + \beta F\left(d\left(x_{n_0},Tx_{n_0}\right)\right) \\ &+\gamma F\left(d\left(Tx_{n_0},T^2x_{n_0}\right)\right) +\ tF\left(d(Tx_{n_0},T^2x_{n_0})\right) + hF(d\left(Tx_{n_0},x_{n_0}\right)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F\left(d\left(Tx_{n_0},T^2x_{n_0}\right)\right) \le \frac{(\alpha+\beta+h)\ F\left(d\left(x_{n_0},Tx_{n_0}\right)\right) - \tau}{(1-\gamma-t)} \cdots (4.4)$$

Persamaan 4.4 tersebut akan ditulis dengan bentuk lain dengan mempertimbangkan Definisi 2.5.2, dan menjadi :

$$F\left(d\left(Tx_{n_0},T^2x_{n_0}\right)\right) \le F\left(d\left(x_{n_0},Tx_{n_0}\right)\right) - \frac{\tau}{(1-\gamma-t)} \cdots (4.5)$$

sehingga diperoleh

$$F\left(d\left(Tx_{n_0},T^2x_{n_0}\right)\right) < F\left(d\left(x_{n_0},Tx_{n_0}\right)\right) \cdots (4.6)$$

$$d\left(Tx_{n_0},T^2x_{n_0}\right) < d\left(x_{n_0},Tx_{n_0}\right) \cdots (4.7)$$

Persamaan (4.3) digunakan pada persamaan (4.7) dan dapat ditulis :

$$d\left(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}\right) < d\left(x_{n_0}, Tx_{n_0}\right) \leq d\left(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}\right)$$

$$d\left(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}\right) < d\left(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}\right) \quad \cdots (4.8)$$

sehingga persamaan (4.8) kontradiksi dengan $d\left(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}\right) = d\left(Tx_{n_0}, T^2x_{n_0}\right)$.
Oleh karena itu, barisan $\{d(x_n, Tx_n)\}$ merupakan barisan bilangan riil turun murni.

Lemma 4.1.2

Diberikan (X,d)*ruang seperti-metrik-b dan* T *merupakan pemetaan kontraksi-F yang diperumum dengan barisan* $\{d(x_n, Tx_n)\}$ *yang didefinisikan*

$$x_1 = T_{x_0}$$

$$x_2 = T_{x_1}$$

$$\vdots$$

$$x_n = T_{x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = T_{x_n} \forall n \in \mathbb{N}$$

Maka barisan $\{d(x_n, Tx_n)\}$ *terbatas bawah dan konvergen.*

Bukti:

Selanjutnya akan buktikan bahwa barisan $\{d(x_n, Tx_n)\}$ mempunyai batas bawah, infimum dan konvergen. Akan dibuktikan bahwa barisan $\{d(x_n, Tx_n)\}$ mempunyai batas bawah dan infimum.Misalkan terdapat $A \geq 0$ sebagai infimumnya, sedemikian sehingga

$$lim_{n\to+\infty} d(x_n, Tx_n) = A = inf\ \{d(x_n, Tx_n): n \in \mathbb{N}\} \cdots (4.9)$$

Akan ditunjukkan $A = 0$. Berdasarkan persamaan (4.9), maka selanjutnya dapat ditulis :

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, Tx_n) = A$$

Dengan $A = 0$ maka $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$

Pembuktian dilakukan dengan cara tak langsung.

Andaikan $A > 0$ dan andaikan barisan $\{d(x_n, Tx_n)\}$ mempunyai infimum maka sesuai dengan Lemma 2.2.3, untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat $m \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$d(x_m, Tx_m) < A + \varepsilon \cdots (4.10)$$

$$F(d(x_m, Tx_m)) < F(A + \varepsilon) \cdots (4.11)$$

Berdasarkan persamaan (4.11) dan dari Definisi 2.5.2 diketahui bahwa :

$$\frac{1}{2k} d(x_m, Tx_m) < d(x_m, Tx_m) \quad \cdots (4.12)$$

$$\tau + F\left(d(Tx_m, T^2x_m)\right) \leq \alpha F\left(d(x_m, Tx_m)\right) + \beta F\left(d(x_m, Tx_m)\right)$$
$$+\gamma F\left(d(Tx_m, T^2x_m)\right) + tF\left(\frac{d(x_m, T^2x_m)}{2k}\right) + hF\left(\frac{d(Tx_m, Tx_m)}{2k}\right)$$

Berdasarkan Definisi 2.1.1 (3) maka :

$$\tau + F\left(d(Tx_m, T^2x_m)\right) \leq \alpha F\left(d(x_m, Tx_m)\right) + \beta F\left(d(x_m, Tx_m)\right)$$
$$+\gamma F\left(d(Tx_m, T^2x_m)\right) + tF(d(x_m, Tx_m)) + hF(d(Tx_m, x_m))$$

$$\Rightarrow F\left(d(Tx_m, T^2x_m)\right) \leq \frac{(\alpha + \beta + t + h)\ F\left(d(x_m, Tx_m)\right) - \tau}{(1 - \gamma)} \quad \cdots (4.13)$$

Dari Definisi 2.5.2 dan dari persamaan (4.13) didapatkan :

$$F\left(d(Tx_m, T^2x_m)\right) \leq F\left(d(x_m, Tx_m)\right) - \frac{\tau}{(1 - \gamma)} \quad \cdots (4.14)$$

(i) Selanjutnya persamaan (4.14) menghasilkan :

$$F\big(d(Tx_m, T^2x_m)\big) < F\big(d(x_m, Tx_m)\big)$$

(ii) Berdasarkan (i) dan Definisi 2.5.1 (F1), mengakibatkan :

$$d(Tx_m, T^2x_m) < d(x_m, Tx_m)$$

(iii) Berdasarkan (ii) serta Definisi 2.5.2 dapat diketahui bahwa :

$$\frac{1}{2k} d(Tx_m, T^2x_m) < d(Tx_m, T^2x_m)$$

(iv) Selanjutnya berdasarkan Definisi 2.5.2 berlaku :

$$\begin{aligned}\tau + F\big(d(T^2x_m, T^3x_m)\big) &\le \alpha F\big(d(Tx_m, T^2x_m)\big) + \beta F\big(d(Tx_m, T^2x_m)\big)\\ &+ \gamma F\big(d(T^2x_m, T^3x_m)\big) + \ tF\left(\frac{d(Tx_m, T^3x_m)}{2k}\right)\\ &+ hF\left(\frac{d(T^2x_m, T^2x_m)}{2k}\right)\end{aligned}$$

(v) Berdasarkan Definisi 2.1.1 maka selanjutnya diperoleh :

$$\begin{aligned}\tau + F\big(d(Tx_m, T^2x_m)\big) &\le \alpha F\big(d(Tx_m, T^2x_m)\big) + \beta F\big(d(Tx_m, T^2x_m)\big)\\ &+\gamma F\big(d(T^2x_m, T^3x_m)\big) + \ tF(d(Tx_m, T^2x_m)) + hF\big(d(T^2x_m, Tx_m)\big)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F\big(d(T^2x_m, T^3x_m)\big) \le F\big(d(Tx_m, T^2x_m)\big) - \frac{\tau}{(1-\gamma)}$$

Jika dari proses (i), (ii), (iii), (iv), dan (v) dilanjutkan terus menerus, selanjutnya berdasarkan persamaan (4.11), persamaan (4.14) dan (v) maka berlaku :

$$\begin{aligned}F\big(d(T^nx_m, T^{n+1}x_m)\big) &\le F\big(d(T^{n-1}x_m, T^nx_m)\big) - \frac{\tau}{(1-\gamma)}\\ &\le F\big(d(T^{n-2}x_m, T^{n-1}x_m)\big) - \frac{2\tau}{(1-\gamma)}\\ &\vdots \\ &\le F(d(x_m, Tx_m)) - \frac{n\tau}{(1-\gamma)}\\ &< F(A+\varepsilon) - \frac{n\tau}{(1-\gamma)}\end{aligned} \quad \cdots (4.15)$$

Saat $n \to +\infty$ pada persamaan (4.15) dan berdasarkan Teorema 2.4.3 (b) maka :

$$\lim_{n\to+\infty} F(d(T^nx_m\,, T^{n+1}x_m)) = -\infty \qquad \cdots (4.16)$$

$$\lim_{n\to+\infty} d(T^nx_m\,, T^{n+1}x_m) = 0 \qquad \cdots (4.17)$$

Dari persamaan (4.17), andaikan terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga :

$$d(x_{m+n}, Tx_{m+n}) < A \qquad \text{untuk setiap } n > N_1,$$

Sehingga A bukan batas bawah dari $d(x_{m+n}, Tx_{m+n})$ yang menyebabkan kontradiksi dengan definisi dari A. Jadi pengandaian $A > 0$ salah, seharusnya $A = 0$. Karena $A = 0$ maka menyebabkan : $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, Tx_n) = 0 \cdots (4.18)$

Dengan kata lain, $A = 0$ adalah batas bawah dari barisan $\{d(x_n, Tx_n)\}$. Karena barisan $\{d(x_n, Tx_n)\}$ memiliki batas bawah maka :

$$\lim_{n\to+\infty} d(\,x_n, Tx_n) = 0 = inf\ \{d(x_n, Tx_n) : n \in \mathbb{N}\}$$

Berdasarkan Teorema 2.2.2, maka barisan $\{d(x_n, Tx_n)\}$ dikatakan konvergen. ■

Lemma 4.1.3

Diberikan (X, d)ruang seperti-metrik-b dan T merupakan pemetaan kontraksi-F yang diperumum dengan barisan $\{x_n\}$ yang didefinisikan

$$x_1 = T_{x_0}$$
$$x_2 = T_{x_1}$$

$$\vdots$$
$$x_n = T_{x_{n-1}}$$
$$x_{n+1} = T_{x_n} \forall n \in \mathbb{N}$$

Maka barisan $\{d(x_n, Tx_n)\}$ *merupakan barisan Cauchy.*

Bukti :

Sekarang akan dibuktikan bahwa barisan $\{d(x_n, Tx_n)\}$ merupakan barisan Cauchy sesuai dengan Definisi 2.3.1, yaitu : $\lim_{m,n\to+\infty} d(x_m, x_n) = 0 \cdots$ (4.19)

Pembuktian dilakukan secara tak langsung.

Andaikan persamaan (4.19) kontradiksi, maka terdapat $\varepsilon > 0$ dengan barisan $\{r_n\}$ dan $\{s_n\}$ bilangan asli sedemikian sehingga :$r_n > s_n > n$,

dan misalkan : $d(x_{r_n}, x_{s_n}) \geq \varepsilon$dan $d(x_{r_{n-1}}, x_{s_n}) < \varepsilon \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ ⋯(4.20)

Dengan menggunakan Definisi 2.1.1 (3), persamaan (4.20) selanjutnya diperoleh :

$$d(x_{r_n}, x_{s_n}) \leq kd(x_{r_n}, x_{r_{n-1}}) + kd(x_{r_{n-1}}, x_{s_n})$$
$$< kd(x_{r_n}, x_{r_{n-1}}) + k\varepsilon = kd(Tx_{r_{n-1}}, x_{r_{n-1}}) + k\varepsilon \quad , \forall\, n \in \mathbb{N} \cdots (4.21)$$

Berdasarkan persamaan (4.18), maka terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga :

$$d(x_{r_n}, Tx_{r_n}) < \varepsilon,$$
$$d(Tx_{r_{n-1}}, x_{r_{n-1}}) < \varepsilon,$$
$$d(x_{s_n}, Tx_{s_n}) < \varepsilon \ \forall\, n > N_2 \cdots (4.22)$$

Dengan melihat persamaan (4.21) maka berlaku :

$$d(x_{r_n}, x_{s_n}) < kd(Tx_{r_{n-1}}, x_{r_{n-1}}) + k\varepsilon < k\varepsilon + k\varepsilon = 2k\varepsilon \forall\, n > N_2 \cdots (4.23)$$

Dengan Definisi 2.5.1 (F1), persamaan (4.23) mengakibatkan :

$$F\left(d(x_{r_n}, x_{s_n})\right) < F(2k\varepsilon) \forall n > N_2 \cdots (4.24)$$

dari persamaan (4.20) dan persamaan (4.22) maka :

$$\frac{1}{2k} d(x_{r_n}, Tx_{r_n}) < \frac{\varepsilon}{2k} \leq d(x_{r_n}, x_{s_n}) \quad \forall\, n > N_2 \qquad \cdots (4.25)$$

Berdasarkan Definisi 2.1.1 (3), maka selanjutnya persamaan (4.25) berlaku :

$$\varepsilon \leq d(x_{r_n}, x_{s_n}) \leq kd(x_{r_n}, x_{r_{n+1}}) + k^2 d(x_{r_{n+1}}, x_{s_{n+1}}) + k^2 d(x_{s_{n+1}}, x_{s_{n+1}}) \quad (4.26)$$

Saat $n \to +\infty$ pada persamaan (4.26) dan berdasarkan (4.18) sehingga didapatkan:

$$\frac{\varepsilon}{k^2} \leq \lim_{n\to+\infty} \inf d(x_{r_{n+1}}, x_{s_{n+1}})$$

Oleh karena itu, terdapat $N_3 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga :

$$d(x_{r_{n+1}}, x_{s_{n+1}}) > 0 \text{ untuk } n > N_3$$

atau dengan kata lain, sesuai dengan persamaan (4.1) sedemikian sehingga

$$d(Tx_{r_n}, Tx_{s_n}) > 0 \text{ untuk } n > N_3 \cdots (4.27)$$

Dari Definisi 2.5.2, maka persamaan (4.27) menghasilkan :

$$\tau + F\left(d(Tx_{r_n}, Tx_{s_n})\right)$$
$$\leq \alpha F\left(d(x_{r_n}, x_{s_n})\right) + \beta F\left(d(x_{r_n}, Tx_{r_n})\right)$$
$$+ \gamma F\left(d(x_{s_n}, Tx_{s_n})\right) + tF\left(\frac{d(x_{r_n}, Tx_{s_n})}{2k}\right) + hF\left(\frac{d(x_{s_n}, Tx_{r_n})}{2k}\right)$$

Berdasarkan Definisi 2.1.1 (3) maka :

$$\tau + F\left(d(Tx_{r_n}, Tx_{s_n})\right)$$

$$\le \alpha F\left(d\left(x_{r_n}, x_{s_n}\right)\right) + \beta F\left(d\left(x_{r_n}, Tx_{r_n}\right)\right) + \gamma F\left(d\left(x_{s_n}, Tx_{s_n}\right)\right) + tF\left(\frac{d\left(x_{r_n}, x_{s_n}\right) + d\left(x_{s_n}, Tx_{s_n}\right)}{2}\right) + hF\left(\frac{d\left(x_{s_n}, x_{r_n}\right) + d\left(x_{r_n}, Tx_{r_n}\right)}{2}\right) \quad \cdots (4.28)$$

Jika dipilih $n > max\{N_2, N_3\}$, sesuai dengan persamaan (4.22), (4.23), dan (4.24), maka persamaan (4.28) menjadi :

$$\tau + F\left(d\left(Tx_{r_n}, Tx_{s_n}\right)\right) < \alpha F(2k\varepsilon) + \beta F\left(d\left(x_{r_n}, Tx_{r_n}\right)\right) + \gamma F\left(d\left(x_{s_n}, Tx_{s_n}\right)\right) + tF\left(\frac{2k\varepsilon + \varepsilon}{2}\right) + hF\left(\frac{2k\varepsilon + \varepsilon}{2}\right) \quad \cdots (4.29)$$

Jika dipilih $n > max\{N_2, N_3\}$

Saat $n \to +\infty$ pada persamaan (4.29) maka diperoleh :

$$\lim_{n\to+\infty} F\left(d\left(Tx_{r_n}, Tx_{s_n}\right)\right) = -\infty \quad \cdots (4.30)$$

Sesuai dengan Definisi 2.5.1 (F2) maka persamaan (4.30) dapat ditulis :

$$\lim_{n\to+\infty} d(Tx_{r_n}, Tx_{s_n}) = 0 \quad \cdots (4.31)$$

Disisi lain,$d\left(x_{r_n}, x_{s_n}\right) \le kd\left(x_{r_n}, x_{r_{n+1}}\right) + k^2 d\left(x_{r_{n+1}}, x_{s_{n+1}}\right) + k^2 d\left(x_{s_{n+1}}, x_{s_n}\right)$

Sesuai dengan persamaan (4.1) maka :

$d\left(x_{r_n}, x_{s_n}\right) \le kd\left(x_{r_n}, Tx_{r_n}\right) + k^2 d\left(Tx_{r_n}, Tx_{s_n}\right) + k^2 d\left(x_{s_n}, Tx_{s_n}\right)$

Saat$n \to +\infty$ dan berdasarkan persamaan (4.18) dan persamaan (4.31), maka selanjutnya didapatkan$\lim_{n\to+\infty} d(x_{r_n}, x_{s_n}) = 0$.Kontradiksi dengan persamaan (4.20), maka persamaan (4.19) terbukti. Oleh karena itu barisan $\{d(x_n, Tx_n)\}$ merupakan barisan Cauchy di $x \in X$. ■

4.2 Teorema Titik Tetap Pada Ruang Seperti-metrik-b Lengkap

Teorema 4.2.1

Diberikan (X, d) *adalahruang seperti-metrik-b lengkapdan T merupakan pemetaan kontraksi-F yang diperumum. Maka T mempunyai titik tetap di*$x \in X$, *yaitu*$Tx = x$.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, dan berdasarkan Definisi 2.3.2maka :

$$\lim_{n\to+\infty} d(x, x_n) = 0 = \lim_{m,n\to+\infty} d\,(x_m, x_n) \quad \cdots (4.32)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa :$\frac{1}{2k} d(x_n, Tx_n) < d(x_n, x)$

atau$\frac{1}{2k} d(Tx_n, T^2x_n) < d(Tx_n, x) \quad \cdots (4.33)$

pembuktian dilakukan dengan cara tak langsung.

Andaikan persamaan (4.33) kontradiksi, kemudian terdapat $m_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga :$\frac{1}{2k} d\left(x_{m_0}, Tx_{m_0}\right) \ge d\left(x_{m_0}, x\right)$

dan $\frac{1}{2k} d\left(Tx_{m_0}, T^2x_{m_0}\right) \ge d\left(Tx_{m_0}, x\right) \quad \cdots (4.34)$

Dari persamaan (4.34) dan berdasarkan Definisi 2.1.1 (3), maka berlaku :

$$d\left(x_{m_0}, Tx_{m_0}\right) \le k(d\left(x_{m_0}, x\right) + d\left(x, Tx_{m_0}\right)) \le \frac{d\left(x_{m_0}, Tx_{m_0}\right)}{2} + \frac{d\left(x_{m_0}, Tx_{m_0}\right)}{2} = d\left(x_{m_0}, Tx_{m_0}\right)$$

Persamaan (4.34) kontradiksi dengan pernyataan awal, maka persamaan (4.34) tidak terpenuhi. Sehingga persamaan (4.33) terbukti, dan sesuai dengan Definisi 2.5.2, maka selanjutnya persamaan (4.33) memenuhi :

$$\tau + F\big(d(Tx_n, Tx)\big) \leq \alpha F\big(d(x_n, x)\big) + \beta F\big(d(x_n, Tx_n)\big) + \gamma F\big(d(x, Tx)\big) + tF\left(\frac{d(x_n, Tx)}{2k}\right) + hF\left(\frac{d(x, Tx_n)}{2k}\right) \quad \cdots (4.35)$$

atau

$$\tau + F\big(d(T^2x_n, Tx)\big) \leq \alpha F\big(d(Tx_n, x)\big) + \beta F\big(d(Tx_n, T^2x_n)\big) + \gamma F\big(d(x, Tx)\big) + tF\left(\frac{d(Tx_n, Tx)}{2k}\right) + hF\left(\frac{d(x, T^2x_n)}{2k}\right) \quad \cdots (4.36)$$

Selanjutnya persamaan (4.35) dan persamaan (4.36) akan dibahas dengan melihat beberapa kasus.

Kasus 1

Andaikan persamaan (4.35) terpenuhi,

$$\tau + F\big(d(Tx_n, Tx)\big) \leq \alpha F\big(d(x_n, x)\big) + \beta F\big(d(x_n, Tx_n)\big) + \gamma F\big(d(x, Tx)\big) + tF\left(\frac{d(x_n, Tx)}{2k}\right) + hF\left(\frac{d(x, Tx_n)}{2k}\right)$$

Berdasarkan Definisi 2.1.1 (3) maka :

$$\tau + F\big(d(Tx_n, Tx)\big) \leq \alpha F\big(d(x_n, x)\big) + \beta F\big(d(x_n, Tx_n)\big) + \gamma F\big(d(x, Tx)\big) + tF\left(\frac{d(x_n, x) + d(x, Tx)}{2}\right) + hF\left(\frac{d(x, x_n) + d(x_n, Tx_n)}{2}\right) \quad \cdots (4.37)$$

Dengan melihat persamaan (4.18) dan persamaan (4.32), serta diberikan $\varepsilon_0 > 0$ maka terdapat $N_4 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga :$d(x, x_n) < \varepsilon_0$ dan$d(x_n, Tx_n) < \varepsilon_0 \cdots (4.38)$

Untuk $n > N_4$ dengan melihat persamaan (4.37) dan persamaan (4.38), didapatkan :

$$\begin{aligned}\tau + F\big(d(Tx_n, Tx)\big) &\leq \alpha F\big(d(x_n, x)\big) + \beta F\big(d(x_n, Tx_n)\big) + \gamma F\big(d(x, Tx)\big) + tF\left(\frac{d(x_n, x) + d(x, Tx)}{2}\right) + hF\left(\frac{d(x, x_n) + d(x_n, Tx_n)}{2}\right) \\ &\leq \alpha F\big(d(x_n, x)\big) + \beta F\big(d(x_n, Tx_n)\big) + \gamma F\big(d(x, Tx)\big) + tF\left(\frac{\varepsilon_0 + d(x, Tx)}{2}\right) + hF(\varepsilon_0) \cdots (4.39)\end{aligned}$$

Untuk $n > N_4$dan saat$n \to +\infty$ pada persamaan (4.39) maka :

$$\lim_{n\to+\infty} F\big(d(Tx_n, Tx)\big) = -\infty \quad \cdots (4.40)$$

Sedemikian sehingga dari persamaan (4.39) dan persamaan (4.40) serta dari Definisi 2.5.1 (F2) maka:$\lim_{n\to+\infty} d(Tx_n, Tx) = 0$ $\cdots (4.41)$

Disisi lain, diketahui bahwa :$d(x, Tx) \leq kd(x, Tx_n) + kd(Tx_n, Tx)$

Saat$n \to +\infty$, dengan melihat persamaan (4.41) dan Definisi 2.1.1 (1), selanjutnya didapatkan hasil :$d(x, Tx) = 0$ $\cdots (4.42)$

Ini berarti $x = Tx$ atau $Tx = x$. Jadi x merupakan titik tetap pada T.■

Kasus 2

Andaikan persamaan (4.36) terpenuhi,

$$\tau + F\big(d(T^2x_n, Tx)\big) \leq \alpha F\big(d(Tx_n, x)\big) + \beta F\big(d(Tx_n, T^2x_n)\big) + \gamma F\big(d(x, Tx)\big)$$

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 36-46

$$+\, tF\left(\frac{d(Tx_n, Tx)}{2k}\right) + hF\left(\frac{d(x, T^2x_n)}{2k}\right)$$

Berdasarkan Definisi 2.1.1 (3) maka :

$$\tau + F\big(d(T^2x_n, Tx)\big) \leq \alpha F\big(d(Tx_n, x)\big) + \beta F\big(d(Tx_n, T^2x_n)\big) + \gamma F\big(d(x, Tx)\big)$$
$$+\, tF\left(\frac{d(Tx_n, x) + d(x, Tx)}{2}\right) + hF\left(\frac{d(x, Tx_n) + d(Tx_n, T^2x_n)}{2}\right) \quad \cdots (4.43)$$

Dari persamaan (4.38) dan persamaan (4.43) sehingga menyebabkan :

$$F\big(d(T^2x_n, Tx)\big) < \alpha F\big(d(x_{n+1}, x)\big) + \beta F\big(d(x_{n+1}, Tx_{n+1})\big) + \gamma F\big(d(x, Tx)\big)$$
$$+\, tF\left(\frac{\varepsilon_0 + d(x, Tx)}{2}\right) + hF(\varepsilon_0) \quad \cdots (4.44)$$

Untuk $n > N_4$, saat $n \to +\infty$ pada persamaan (4.44), selanjutnya didapatkan :

$$\lim_{n \to +\infty} F\big(d(T^2x_n, Tx)\big) = -\infty \quad \cdots (4.45)$$

Sesuai dengan persamaan (4.45) dan Definisi 2.5.1 (F2), maka diperoleh:

$$\lim_{n \to +\infty} d(T^2x_n, Tx) = 0 \cdots (4.46)$$

Disisi lain, diketahui bahwa :$d(x, Tx) \leq kd(x, T^2x_n) + kd(T^2x_n, Tx)$

Saat$n \to +\infty$, dengan melihat persamaan (4.32), persamaan (4.46) dan Definisi 2.1.1(1), selanjutnya didapatkan hasil :$d(x, Tx) = 0$ $\cdots (4.47)$

ini berarti $x = Tx$ atau $Tx = x$

Berdasarkan persamaan (4.42) dan persamaan (4.47) maka terbukti bahwa x adalah titik tetap T. ■

5. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat ditarik dari hasil penelitian adalah sebagai berikut :

1. Ruang seperti-metrik-b(X, d) dengan $T : X \to X$yang merupakan pemetaan kontraksi-F yang diperumum mempunyai titik tetap di $x \in X$ yaitu $Tx = x$.
2. Untuk menunjukkan titik tetap dari pemetaan kontraksi-F yang diperumum pada ruang seperti-metrik-b harus memenuhi syarat :
   a. Barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$
   b. Barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy
   c. x merupakan titik tetap dari pemetaan $T : X \to X$yang merupakan pemetaan kontraksi-F yang diperumum.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Alghamdi, M. A. Hussain N dan Salimi, P. 2013.Fixed Point and Coupled Fixed Point Theorems on b-Metric-Like Space. *Journal of Inequalities and Applications.* 2013:402

[2] Bartle, R.G & D.R Sherbert. 2010. Introduction to Real Analysis, Fourth Edition. *Urbana, Illinois: John Wiley & Sons, Inc., New York.*

[3] Chen, C. Wen, L. Dong, J. dan Gu, Y. 2016. Fixed Point Theorems for Generalized F-contractions in b-Metric-Like-Space. *Journal of Nonlinier Science and Applications.* 2161-2174

[4] Chen, C. Dong, J. Zhu, C. 2015. Some Fixed Point Theorems in b-Metric-Like Space. *Springer.* 2015:122

[5] Czerwik, S. 1993. Contraction Mappings in B-Metric Space. *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis.* 1:5-11

[6] Goldberg, R. 1975. Methods of Real Analysis, Second Edition. *The University of Lowa, Canada.*

[7] Harandi, A. A. 2012. Metric-like Space, Partial Metric Space and Fixed Point. *Springer*. 2012:204

[8] Kreyszig, E. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. *University of Windsor, Canada.*

[9] Putra, D. A. S. 2015. Sifat Titik Tetap Pada Ruang Metrik-G.Skripsi. *Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.*

[10] Wardowski, D. 2012. Fixed Points of a New Type of Contractive Mappings in Complete Metric Spaces. *Springer*. 2012:94