Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 47-55

EKSISTENSI SOLUSI PERSAMAAN PELL NEGATIF

Rizky Hidayatullah, Thresye, Nurul Huda
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani Km. 36, Banjarbaru 70714, Kalsel
Email: Rizkyrizkyrizky0@gmail.com

ABSTRAK

Persamaan Pell Negatif adalah persamaan diophantin nonlinier yang berbentuk $x^2 - dy^2 = -1$ dimana d merupakan bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan syarat dari eksistensi solusi persamaan Pell negatif. Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dari berbagai sumber baik buku, artikel dan jurnal yang berkaitan dengan materi yang akan dibahas dan diteliti. Hasil dari penelitian ini adalah didapatkan syarat dari eksistensi solusi persamaan Pell Negatif yaitu: (i) n berupa bilangan bulat positif ganjil sedemikian sehingga solusi positif dari persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ adalah $x = p_{(2k-1)n-1}$ dan $y = q_{(2k-1)n-1}$. Dari solusi tersebut, p_k/q_k merupakan kekonvergenan ke-k dari ekspansi pecahan kontinu $\sqrt{d}$ dan n adalah panjang periode dari ekspansi pecahan kontinu $\sqrt{d}$ dengan $p_0 = a_0$; $q_0 = 1, p_1 = a_0a_1 + 1$; $q_1 = a_1$, dan $p_k = a_kp_{k-1} + p_{k-2}; q_k = a_kq_{k-1} + q_{k-2}, k = 2,3, \dots$; (ii) $d \equiv 1,2 \ (mod\ 4)$ dan (x_1, y_1) merupakan solusi fundamental dari persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ yang memenuhi $x_1 \equiv -1 \ (mod\ 2d)$.

Kata kunci : pecahan kontinu, persamaan Diophantin, Persamaan Pell, Persamaan Pell negatif.

ABSTRACT

Negatif Pell equation is a nonlinear Diophantine equation has form $x^2 - dy^2 = -1$ where d is positive nonsquare integer. The purpose of this research is to get the terms of the existence of solution of negative Pell equation. The method of this research is literature study by collecting all the materials, such as books, articles and journals relating to the material that will be discussed and research study. The result of this research are obtained the terms of the existence of solution of the negative Pell equation: (i) n is an odd positif integer such that the positive solutions of$x^2 - dy^2 = -1$ are given by $x = p_{(2k-1)n-1}$ and $y = q_{(2k-1)n-1}$. From that solutions, p_k/q_k is the k th convergent of the continued fraction expansion of $\sqrt{d}$ and n is the length period of the continued fraction expansion of $\sqrt{d}$ with $p_0 = a_0$; $q_0 = 1, p_1 = a_0a_1 + 1$; $q_1 = a_1$, and $p_k = a_kp_{k-1} + p_{k-2}; q_k = a_kq_{k-1} + q_{k-2}, k = 2,3, \dots$; (ii) $d \equiv 1,2 \ (mod\ 4)$ and (x_1, y_1) is fundamental solution of $x^2 - dy^2 = 1$ satisfies $x_1 \equiv -1 \ (mod\ 2d)$.

Keywords: continued fraction, Diophantine equation, Pell equation, negative Pell equation

1. PENDAHULUAN

Teori Bilangan adalah bagian dari matematika yang menyangkut kajian tentang bilangan bulat dan sifat-sifatnya. Dalam teori bilangan dikenal dengan persamaan diophantin yaitu persamaan polinomial dengan solusinya berupa bilangan bulat sebarang non negatif. Menurut Burton (2007) persamaan diophantin diambil dari nama matematikawan Diophantus yang tinggal di Alexandria sekitar tahun 250 Masehi. Persamaan tersebut baru dikenalkan sekitar tahun 270 Masehi oleh Uskup Laodikia dalam buku tentang perhitungan Mesir untuk menghormati temannya Diophantus.

Persamaan Diophantin terdiri dari dua bentuk yaitu persamaan diophantin linier dan persamaan diophantin nonlinier. Persamaan diophantin linier adalah persamaan polinomial berderajat satu sedangkan persamaan diophantin nonlinier adalah persamaan polinomial berderajat lebih dari satu. Persamaan diophantin nonlinier $x^2 - dy^2 = n$ dengan d dan n adalah bilangan bulat mempunyai persamaan khusus yaitu persamaan Pell dengan bentuk $x^2 - dy^2 = 1$ dimana d adalah bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna [4}. Masalah lain yang akan muncul yaitu untuk eksistensi dari solusi persamaan yang berbentuk $x^2 - dy^2 = -1$ dengan d bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna. Persamaan tersebut dikenal dengan nama Persamaan Pell Negatif. Berdasarkan analisa masalah yang dikaji, maka dibahas syarat dari eksistensi solusi persamaan Pell negatif.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persaman Diophantin

Persamaan diophantin adalah persamaan polinomial yang memberikan variabel-variabel tertentu dengan penyelesaian berupa bilangan bulat. Persamaan diophantin terbagi atas dua bentuk, yaitu persamaan diophantin linier dan nonlinier.

Bentuk umum persamaan Diophantin adalah

$$a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = b$$

dengan $a_1, \dots, a_k$ adalah koefisien, $x_1, \dots, x_k$ adalah solusi persamaannya dan b adalah konstanta dimana $a_i, b, x_i \in \mathbb{Z}$; $i = 1,2, \dots, k$. Persamaan diophantin linier yang memiliki dua variabel disebut persamaan diophantin linier dua variabel, jika tiga variabel disebut persamaan diophantin tiga variabel dan seterusnya. Persamaan diophantin nonlinier adalah persamaan diophantin berpangkat dua atau lebih.

2.2 Bilangan Rasional dan Irrasional

Definisi 2.1 [8]

Bilangan riil α disebut rasional jika $\alpha = a/b$, dimana a dan b adalah bilangan bulat dengan $b \neq 0$. Jika α bukan rasional, maka α disebut bilangan irrasional.

Definisi 2.2 [1]

Bilangan bulat d disebut kuadrat sempurna jika terdapat bilangan bulat r sedemikian sehingga $d = r^2$.

2.3 Pecahan Kontinu

Definisi 2.3 [3]

Pecahan Kontinu berhingga adalah pecahan yang berbentuk

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

dengan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah bilangan riil dan $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Nilai $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah bagian penyebut dari pecahan ini. Pecahan ini disebut sederhana jika semua nilai $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah bilangan bulat.

Definisi 2.4 [3]
Pecahan kontinu yang dibentuk dari $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *dengan memotong ekspansinya sampai kebagian penyebut* a_k *disebut kekonvergenan ke-k dari pecahan kontinu dan dinotasikan oleh* C_k *dengan*

$$C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]; \qquad 1 \le k \le n$$

sehingga kekonvergenan ke-0 atau $C_0 = a_0$.

Teorema 2.5 [8]
Misalkan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *adalah bilangan riil dengan* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *positif. Misalkan barisan* $p_0, p_1, \ldots, p_n$ *dan barisan* $q_0, q_1, \ldots, q_n$ *didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:*

$$p_0 = a_0 q_0 = 1$$
$$p_1 = a_0 a_1 + 1 \qquad q_1 = a_1$$

dan

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

Untuk $k = 2,3, \ldots, n$. *Maka kekonvergenan ke-k* $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ *dinyatakan dengan* $C_k = p_k / q_k$.

Definisi 2.6 [9]
Diberikan $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *adalah pecahan kontinu tak hingga sedemikian sehingga* $a_k = a_{n+k}$ *untuk semua k dan suatu bilangan bulat* n, *maka pecahan kontinu ini periodik dan* n *disebut periodenya.*

Definisi 2.7 [8]
Jika $\delta = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ *adalah irrasional kuadratik. Maka kunjugasi dari* δ *dinotasikan dengan* δ' *dan didefinisikan dengan* $\delta' = \frac{a-\sqrt{b}}{c}$.

2.4 Persamaan Pell

Persamaan diophantin nonlinier yang salah satunya berbentuk

$$x^2 - dy^2 = n$$

dengan n suatu bilangan bulat dan d merupakan suatu bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna, jika $n = 1$ maka disebut persamaan Pell [8]

Teorema 2.8 [8]
Dimisalkan d *dan* n *adalah elemen dari bilangan bulat dengan* $d > 0$, d *bukan kuadrat sempurna dan* $|n| < \sqrt{d}$, *jika* $x^2 - dy^2 = n$ *maka* x/y *adalah suatu kekonvergenan dari ekspansi pecahan kontinu dari* $\sqrt{d}$.

Lemma 2.9 [8]
Jika $r + s\sqrt{d} = t + u\sqrt{d}$ *dimana* r, s, t *dan* u *adalah bilangan rasional dan* d *adalah bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna, maka* $r = t$ *dan* $s = u$.

Teorema 2.10 [3]
Jika d *adalah bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna. Didefinisikan* $\delta_k = \frac{P_k+\sqrt{d}}{Q_k}, a_k = [\![\delta_k]\!], P_{k+1} = a_k Q_k - P_k$, *dan* $Q_{k+1} = \frac{d-P_{k+1}^2}{Q_k}$ *untuk* $k = 0,1,2, \ldots$ *dimana* $\delta_0 = \sqrt{d}$. *Selanjutnya misalkan* p_k/q_k *adalah kekonvergenan ke-*k *dari ekspansi pecahan kontinu dari* $\sqrt{d}$, *maka*

$$p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k+1}Q_{k+1}$$

3 METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah secara studi literatur. Adapun prosedur penelitian ini adalah dengan cara mengumpulkan referensi pendukung yang berkaitan dengan Persaman Diophantin Nonlinier khususnya persamaan pell negatif. Referensi tersebut dipelajari, dibahas dan dijabarkan sehingga diperoleh solusidari persamaan pell negatif tersebut. Selanjutnya menjelaskan dan membuktikan teorema yang berhubungan dengan eksistensi persamaan Pell negatif. Kemudian didapatkan syarat dari eksistensi solusi persamaan Pell negatif dan menentukan solusi persamaan tersebut.

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 4.1

Jika$d$ adalah bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna danp_k/q_k adalah kekonvergenan ke-k dari ekspansi pecahan kontinu dari $\sqrt{d}$yang mempunyai panjang periode $n \in \mathbb{N}$. Maka

a. *Solusi positif dari persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ berupa*

$$(x, y) = \begin{cases} (p_{kn-1}, q_{kn-1})\ untuk\ k \in \mathbb{N} & jika\ n\ genap \\ (p_{2kn-1}, q_{2kn-1})\ untuk\ k \in \mathbb{N} & jika\ n\ ganjil \end{cases}$$

b. *Solusi positif dari persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ tidak adaketikan genap, jika n ganjil maka solusinya*

$$(x, y) = \left(p_{(2k-1)n-1}, q_{(2k-1)n-1}\right)\ untuk\ k \in \mathbb{N}$$

Akibat 4.2

Jika $d > 0$ bukan bilangan kuadrat sempurna dan $\sqrt{d}$ mempunyai ekspansi pecahan kontinu dengan panjang periode n, maka solusi fundamental dari persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ adalah

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (p_{n-1}, q_{n-1}) & jika\ n\ genap \\ (p_{2n-1}, q_{2n-1}) & jika\ n\ ganjil \end{cases}$$

sedangkan jika n ganjil maka solusi fundamental dari persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ adalah

$$(x_1, y_1) = (p_{n-1}, q_{n-1})$$

Teorema 4.3

Jika d adalah bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna dan x_1, y_1 adalah solusi terkecil untuk persamaan$x^2 - dy^2 = \pm 1$, maka

a) *Solusi positif yang lain berupa (x_m, y_m) untuk persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ yaitu*

$$x_m + y_m\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d}\,)^m \quad untuk\ m \in \mathbb{N}$$

b) *Solusi positif yang lain berupa (x_m, y_m) untuk persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ yaitu*

$$x_m + y_m\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d}\,)^{2m-1} \qquad untuk\ m \in \mathbb{N}$$

Teorema 4.4

Jika $d \equiv 1,2\ (mod\ 4)$ adalah bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna, maka ada solusi untuk persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ jika dan hanya jika $x_1 \equiv -1\ (mod\ 2d)$, dimana (x_1, y_1) adalah solusi fundamental dari $x^2 - dy^2 = 1$.

Bukti Teorema 4.1

Dalam Teorema 2.8 mengindikasikan solusi persamaan $x^2 - dy^2 = \pm 1$ adalah dalam bentuk $x = p_j, y = q_j$ dan d adalah bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna.

Berdasarkan Teorema 2.10

$$p_j^2 - dq_j^2 = (-1)^{j+1} Q_{j+1} \quad \ldots(1)$$

Sehingga agar memenuhi persamaan Pell, maka $j + 1$ harus berupa bilangan positif dan $Q_{j+1} = 1$. Jika $Q_{j+1} = 1$, maka $n|(j + 1)$ sedemikian sehingga $j + 1 = nl$. Kemudian disubstitusikan ke persamaan (1) sedemikian sehingga diperoleh

$$p_{ln-1}^2 - dq_{ln-1}^2 = (-1)^{nl} \quad \ldots(2)$$

Berdasarkan persamaan (4.2) didapatkan

a. Solusi persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ mempunyai 2 kondisi :
   i. Untuk n genap dan l ganjil atau genap
      Karena n adalah genap dan l adalah bilangan bulat maka nl genap. Misalkan $l = k$ disubstitusikan ke persamaan (4.2) maka persamaan (2) menjadi $p_{kn-1}^2 - dq_{kn-1}^2 = 1$. Karena diketahui persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ solusinya berupa $x = p_j$ dan $y = q_j$ maka diperoleh solusinya yaitu $x = p_{kn-1}$ dan $y = q_{kn-1}$ dimana $k \in \mathbb{N}$.
   ii. Untuk n ganjil dan l genap.
      Karena n adalah ganjil dan l genap maka nl genap. Misalkan $l = 2k$ disubstitusikan ke persamaan (2) maka persamaan (2) menjadi $p_{2kn-1}^2 - dq_{2kn-1}^2 = 1$.Karena diketahui persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ solusinya berupa $x = p_j$ dan $y = q_j$ maka diperoleh solusinya yaitu $x = p_{2kn-1}$ dan $y = q_{2kn-1}$ dimana $k \in \mathbb{N}$.

b. Solusi persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ mempunyai 2 kondisi :
   i. Untuk n ganjil dan l ganjil.
      Karena n adalah ganjil dan l ganjil maka nl ganjil. Misalkan $l = 2k - 1$ disubstitusikan ke persamaan (2) maka persamaan (2) menjadi $p_{(2k-1)n-1}^2 - dq_{(2k-1)n-1}^2 = -1$. Karena diketahui persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ solusinya berupa $x = p_j$ dan $y = q_j$ maka diperoleh solusinya yaitu $x = p_{(2k-1)n-1}$ dan $y = q_{(2k-1)n-1}$ dimana $k \in \mathbb{N}$.
   ii. Untuk n genap dan l sebarang bilangan bulat
      Ambil $n = 2a$ maka $nl = 2al$ atau $nl \in 2\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $(-1)^{nl} \neq -1$. Akibatnya untuk n genap maka tidak ada solusinya untuk persamaan $x^2 - dy^2 = -1$.

Dari a dan b teorema ini terbukti. ■

Bukti Akibat 4.2

Dari Teorema 4.1 telah dibuktikan solusi positif untuk persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ adalah jika n genap maka $(x, y) = (p_{kn-1}, q_{kn-1})$. Jadi untuk menentukan solusi fundamental (x_1, y_1) dari persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ diambil untuk kekonvergenan ke- 1 dari ekspansi pecahan kontinu $\sqrt{d}$ maka $k = 1$ sedemikian sehingga diperoleh

$$(x_1, y_1) = (p_{1.n-1}, q_{1.n-1}) = (p_{n-1}, q_{n-1})$$

Untuk n ganjil maka solusi persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ berdasarkan Teorema 4.1 adalah $(x, y) = (p_{2kn-1}, q_{2kn-1})$. Jadi untuk menentukan solusi fundamental (x_1, y_1) dari persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ diambil untuk kekonvergenan ke-1 dari ekspansi pecahan kontinu $\sqrt{d}$ maka $k = 1$ sedemikian sehingga diperoleh

$$(x_1, y_1) = (p_{2.1.n-1}, q_{2.1.n-1}) = (p_{2n-1}, q_{2n-1})$$

Sedangkan untuk persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ berdasarkan Teorema 4.1 jika n ganjil solusinya adalah $(x, y) = \left(p_{(2k-1)n-1}, q_{(2k-1)n-1}\right)$. Jadi untuk menentukan solusi fundamental (x_1, y_1) dari persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ diambil untuk kekonvergenan ke-1 dari ekspansi pecahan kontinu $\sqrt{d}$ maka $k = 1$ sedemikian sehingga diperoleh

$$(x_1, y_1) = (p_{(2.1-1)n-1}, q_{(2.1-1)n-1}) = (p_{n-1}, q_{n-1})$$

Dari uraian diatas maka akibat ini terbukti. ■

Bukti Teorema 4.3

a) Akan ditunjukkan bahwa x_m dan y_m untuk $m \in \mathbb{N}$ adalah juga solusi persamaan$x^2 - dy^2 = 1$.
Claim:
Pertama akan dibuktikan bahwa konjugat dari $(x_1 + y_1\sqrt{d}\,)^m$ adalah $(x_1 - y_1\sqrt{d}\,)^m$.
Diketahui:

$$x_m + y_m\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d}\,)^m$$

Maka berdasarkan Definisi 2.7

$$\left(x_m + y_m\sqrt{d}\right)' = \left((x_1 + y_1\sqrt{d}\,)^m\right)'$$

$$x_m - y_m\sqrt{d} = \left(\underbrace{(x_1 + y_1\sqrt{d}\,)(x_1 + y_1\sqrt{d}\,) \ldots (x_1 + y_1\sqrt{d}\,)}_{sebanyak\ m}\right)'$$

$$x_m - y_m\sqrt{d} = \left(\underbrace{(x_1 - y_1\sqrt{d}\,)(x_1 - y_1\sqrt{d}\,) \ldots (x_1 - y_1\sqrt{d}\,)}_{sebanyak\ m}\right)$$

$$x_m - y_m\sqrt{d} = \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^m$$

Sehingga terbukti bahwa konjugat dari $\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^m$ adalah $\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^m$. Selanjutnya
$x_m^2 - dy_m^2 = (x_1^2 - dy_1^2)^m$
Karena x_1 dan y_1 adalah solusi terkecil untuk persamaan pell, maka $x_1^2 - dy_1^2 = 1$, akibatnya
$x_m^2 - dy_m^2 = (1)^m$
$\quad = 1$
Jadi x_m dan y_m juga merupakan solusi dari persamaan $x^2 - dy^2 = 1$.

b) Akan ditunjukkan bahwa x_m dan y_m untuk $m \in \mathbb{N}$ adalah juga solusi persamaan$x^2 - dy^2 = -1$.
Claim:

Pertama akan dibuktikan bahwa konjugat dari $(x_1 + y_1\sqrt{d})^{2m-1}$ adalah $(x_1 - y_1\sqrt{d})^{2m-1}$.
Diketahui:

$$x_m + y_m\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{2m-1}$$

Maka berdasarkan Definisi 2.7

$$\left(x_m + y_m\sqrt{d}\right)' = \left((x_1 + y_1\sqrt{d})^{2m-1}\right)'$$

$$x_m - y_m\sqrt{d} = \left(\underbrace{(x_1 + y_1\sqrt{d})(x_1 + y_1\sqrt{d})\ldots(x_1 + y_1\sqrt{d})}_{sebanyak\ 2m-1}\right)'$$

$$x_m - y_m\sqrt{d} = \left(\underbrace{(x_1 - y_1\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})\ldots(x_1 - y_1\sqrt{d})}_{sebanyak\ 2m-1}\right)$$

$$x_m - y_m\sqrt{d} = \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^{2m-1}$$

Sehingga terbukti bahwa konjugat dari $\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{2m-1}$ adalah $\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^{2m-1}$. Selanjutnya
$x_m^2 - dy_m^2 = (x_1^2 - dy_1^2)^{2m-1}$
Karena x_1 dan y_1 adalah solusi terkecil untuk persamaan pell negatif, maka $x_1^2 - dy_1^2 = -1$, akibatnya
$x_m^2 - dy_m^2 = (-1)^{2m-1}$
$= -1$
Jadi x_m dan y_m juga merupakan solusi dari persamaan $x^2 - dy^2 = -1$.
Dari a dan b teorema ini terbukti. ■

Bukti Teorema 4.4
(⇒)Diketahui $d \equiv 1,2\ (mod\ 4)$ bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna, $x^2 - dy^2 = -1$ mempunyai solusi dan (x_1, y_1) solusi fundamental dari $x^2 - dy^2 = 1$. Karena persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ mempunyai solusi maka terdapat solusi fundamental (p_0, q_0). Jika (p_0, q_0) merupakan solusi fundamental dari $x^2 - dy^2 = -1$ maka berdasarkan Teorema 4.3 maka agar diperoleh solusi fundamental dari $x^2 - dy^2 = 1$

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = \left(p_0 + q_0\sqrt{d}\right)^2$$

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = p_0^2 + dq_0^2 + 2p_0q_0\sqrt{d}$$

Menurut Lemma 2.9 diperoleh
$x_1 = p_0^2 + dq_0^2 = p_0^2 - dq_0^2 + 2dq_0^2 = -1 + 2dq_0^2$ …(3)
Karena terdapatsuatu bilangan bulat q_0^2 sedemikian sehingga $x_1 = -1 + 2dq_0^2$maka diperoleh $x_1 \equiv -1(mod\ 2d)$.
Jadi terbukti bahwa $x_1 \equiv -1(mod\ 2d)$ dimana (x_1, y_1) adalah solusi fundamental dari persamaan pell positif.
(⇐) Diketahui (x_1, y_1) adalah solusi fundamental dari persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ dengan $x_1 \equiv -1(mod\ 2d)$. Sedemikan sehingga diperoleh
$x_1 = -1 + 2dk$ …(4)
Dari persamaan pell $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ substitusikan persamaan (4) maka diperoleh

$$(-1 + 2dk)^2 - dy_1^2 = 1$$

$$4d^2k^2 - 4dk - dy_1^2 = 0$$

Dimisalkan $y_1 = 2y_2$ maka

$$k(dk-1) = y_2^2$$

Dimisalkan bahwa $k = r^2$ dan $dk - 1 = s^2$ dimana $(k, dk-1) = 1$ diperoleh

$$dk - 1 = s^2$$
$$dr^2 - 1 = s^2$$
$$s^2 - dr^2 = -1$$

Maka terbukti bahwa persamaan pell negatif mempunyai solusi, jadi teorema ini terbukti.■

5 KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari penilitian ini adalah

1. Persamaan Pell negatif adalah persamaan diophantin nonlinier berbentuk persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ yang solusinya dapat ditentukan dengan menggunakan ekspansi pecahan kontinu dari $\sqrt{d}$ dimana d adalah anggota bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna. Jika ${p_k}/{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ merupakan kekonvergenan ke- k dari ekspansi pecahan kontinu dari $\sqrt{d}$ maka solusi positifnya dapat ditemukan diantara p_k dan q_k.
2. Persamaan Pell negatif $x^2 - dy^2 = -1$ mempunyai solusi jika terpenuhi syarat sebagai berikut:
   a. n berupa bilangan bulat positif ganjil sedemikian sehingga solusi positif dari persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ adalah $x = p_{(2k-1)n-1}$ dan $y = q_{(2k-1)n-1}$ dimana ${p_k}/{q_k}$ adalah kekonvergenan ke-k dari ekspansi pecahan kontinu $\sqrt{d}$ dan n adalah panjang periode dari ekspansi pecahan kontinu $\sqrt{d}$ dengan $p_0 = a_0$; $q_0 = 1$, $p_1 = a_0a_1 + 1$; $q_1 = a_1$, dan $p_k = a_kp_{k-1} + p_{k-2}$; $q_k = a_kq_{k-1} + q_{k-2}$, $k = 2,3, \dots$.
   b. $d \equiv 1,2 \ (mod\ 4)$ dan (x_1, y_1) merupakan solusi fundamental dari persamaan $x^2 - dy^2 = 1$ yang memenuhi $x_1 \equiv -1 \ (mod\ 2d)$.
3. Jika x_1, y_1 adalah solusi terkecil untuk persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ dan n ganjil maka setiap pasang bilangan bulat x_m, y_m yang didefinisikan oleh kondisi $x_m + y_m\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{2m-1}$; $m = 1,2,3, \dots$ adalah juga merupakan solusi positif.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Arnold, Jimmy. 2005. *An Introduction to Mathematical Proofs*. http://www.math.vt.edu/people/elder/Math3034.

[2] Bartle & Sherbet. 2011. *Introduction to Real Analysis 4th Edition*. Hamilton: United State of Amerika.

[3] Burton, D. M. 2007. *Elementary Number Theory Fifth Edition*. McGraw Hill: New York.

[4] Jacobson & Williams. 2009. *Solving the Pell Equation*. CMS Books in Mathematics: Canadian Mathematical Society.

[5] Mollin, Richard A. 2007. *Fundamental Number Theory with Applications Second Edition*. CRC: Taylor & Francis Group.

[6] Mollin & Srinivasan. A Note on the Negative Pell Equation. *International Journal of Algebra*. Vol 4(19) : 919-922.

[7] Nathanson. M. B. 1999. *Elementary Method in Number Theory*. Springer: New Jersey.

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.2 (Desember 2017) Hal. 47-55

[8] Rosen. K. H. 1993. *Elementary Number Theory And Its Aplication*. Murray Hills: New Jersey.

[9] Yang, Seung Hyun. 2008. *Continued Fraction and Pell’s Equation*. http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Yang.pdf.