Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.18 No.1 (Juni 2024) Hal. 54-68

KONTROL *SLIDING MODE* ADAPTIF DENGAN VAKSINASI DAN *TREATMENT* PADA MODEL PENYEBARAN TUBERKULOSIS

Regina Wahyudyah Sonata Ayu

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Palangka Raya
email: *reginawsayu@mipa.upr.ac.id*

ABSTRACT

This research examines the design of adaptive sliding mode control in a tuberculosis (TB) disease spread model, considering uncertainties within the model. The TB model involves five state variables (susceptible individuals, vaccinated individuals, individuals with latent TB infection, individuals with active TB infection, and individuals under treatment) and three control input variables consisting of vaccination and treatment. The objective of this control design is to reduce the number of susceptible individuals, individuals with active TB infection, and the number of individuals under treatment by tracking the given reference functions. Stability and convergence of tracking errors of the controlled system are proved using the Lyapunov Stability Theorem. Numerical simulations are conducted to evaluate the performance of the designed control under various parameter uncertainty conditions. Based on the simulation results, it is shown that the adaptive sliding mode controllers guarantee the convergence of tracking errors is achieved despite the presence of uncertainty in the model.

Keywords: adaptive sliding mode control, TB model, Lyapunov Stability Theorem

ABSTRAK

Penelitian ini mengkaji desain kontrol *sliding mode* adaptif pada model penyebaran penyakit tuberkulosis (TB) dengan mempertimbangkan adanya ketidakpastian pada model. Model penyebaran TB yang dikaji memuat lima variabel *state* (individu rentan, individu yang divaksinasi, individu terinfeksi TB-laten, individu terinfeksi TB-aktif, dan individu yang diberi treatment) serta tiga variabel input kontrol berupa vaksinasi dan *treatment*. Tujuan desain kontrol ini adalah menurunkan jumlah individu rentan, individu terinfeksi TB-aktif serta jumlah individu yang mendapat treatment dengan mengikuti fungsi referensi yang diberikan. Kestabilan dan konvergensi eror *tracking* dari sistem yang dikontrol dibuktikan menggunakan Teorema Kestabilan Lyapunov. Simulasi numerik dilakukan untuk mengevaluasi performansi kontrol yang telah didesain dengan menerapkan beberapa kondisi ketidakpastian parameter. Berdasarkan hasil simulasi terlihat kontrol bahwa *sliding mode* adaptif menjamin konvergensi eror *tracking* tercapai meskipun terdapat ketidakpastian pada model.

Kata kunci: kontrol *sliding mode* adaptif, model penyebaran TB, Teorema Kestabilan Lyapunov

Received: 29 April 2024, Accepted: 26 Mei 2024, Published: 1 Juni 2024

PENDAHULUAN

Tuberkulosis (TB) merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis* yang ditularkan melalui *droplet* individu terinfeksi di udara. Meskipun tergolong penyakit yang dapat dicegah dan

disembuhkan, TB masih menjadi tantangan kesehatan secara global. Berdasarkan *Global Tuberculosis Report* 2023, TB merupakan penyebab kematian terbesar kedua di dunia pada tahun 2022 setelah Covid-19 dimana jumlah total kematian akibat tuberkulosis (termasuk di antaranya orang-orang dengan HIV) secara global adalah 1,30 juta (WHO, 2023). Orang yang terpapar bakteri TB berpotensi tinggi mengidap penyakit TB dalam dua tahun pertama, namun tetap berisiko mengalami penyakit TB sepanjang masa hidupnya (Lillebaek *et al*., 2002).

Pemodelan matematika dapat digunakan untuk menggambarkan dinamika penyebaran serta mengevaluasi efektivitas penerapan strategi pengendalian penyakit TB. Untuk itu, beberapa model telah dikembangkan antara lain model Mishra dan Srivastava (2014) yang mengkaji penyebaran tuberkulosis baik pada individu dengan tuberkulosis paru-paru maupun pada individu yang resisten terhadap obat-obatan (Mishra & Srivastava, 2014). Okuonghae dan Ikhimwin (2016) mengembangkan model yang mengklasifikasi individu terinfeksi TB-laten berdasarkan tingkat kesadaran mereka terhadap tuberkulosis (Okuonghae & Ikhimwin, 2016). Pemodelan yang mempertimbangkan infeksi TB-laten juga telah dikaji oleh Houben dan Dodd (Houben & Dodd, 2016). Selain itu, Egonmwan dan Okuonghae (2019) telah membuat model yang menganalisis dampak diagnosis dan pengobatan individu terinfeksi TB-laten dan TB-aktif (Egonmwan & Okuonghae, 2019).

Pendekatan kontrol optimal telah banyak digunakan untuk mengevaluasi efektivitas strategi kontrol pada model penyebaran penyakit termasuk penyakit TB. Sebagai contoh, Rodrigues *et al.* (2014) telah menganalisis keefektivitan biaya pada model kontrol optimal penyebaran TB dengan fungsi kontrol berupa pengobatan terhadap individu terinfeksi laten awal dan laten persisten (Rodrigues, *et al*., 2014). Silva dan Torres kemudian menganalisis kontrol optimal pada model koinfeksi TB-HIV/AIDS (Silva & Torres, 2015) sedangkan Choi *et al*. (2015) telah menggunakan teori kontrol optimal untuk menganalisis efek strategi kontrol pada model transmisi TB terkait merokok di Korea Selatan. Variabel kontrol berupa vaksinasi dan treatment juga telah dikaji pada model kontrol optimal penyebaran TB (Yang, *et al*., 2016; Gao & Huang, 2018; Ullah, *et al*., 2020)

Model matematika penyebaran penyakit sangat rentan dengan adanya ketidakpastian parameter sehingga perlu dipertimbangkan dalam strategi kontrol penyebaran penyakit. Ketidakpastian parameter terjadi karena nilai-nilai parameter model bervariasi dan seringkali tidak ada data real sehingga nilai-nilai parameter model pun tidak diketahui pasti nilainya. Akibatnya, validasi atau pengujian model seringkali dilakukan dengan menggunakan parameter-parameter yang berasal dari literatur ilmiah atau penelitian terdahulu. Dengan demikian, ketidakpastian bermakna terdapat perbedaan antara nilai parameter pada model dengan nilai parameter yang sebenarnya. Pada penelitian-penelitian yang mengkaji kontrol optimal pada penyebaran TB di atas, model matematika penyebaran penyakitnya dianggap diketahui sepenuhnya dan bersifat eksak. Akibatnya, tujuan desain

kontrol bisa tidak tercapai dengan adanya ketidakpastian. Kontrol *sliding mode* dan kontrol adaptif merupakan metode kontrol yang dapat menjamin performansi yang robust tanpa linearisasi meskipun terdapat ketidakpastian pada model (Ibeas, *et al*. 2014; Sharifia & Moradib, 2017; Mehra, *et al*. 2019; Badfar, Zaferani, & Nikoofard, 2022; Ayu & Aulia, 2021). Untuk itu, pada penelitian ini akan didesain kontrol adaptif *sliding mode* pada model penyebaran TB dengan variabel kontrol berupa vaksinasi dan *treatment*.

TINJAUAN PUSTAKA

1. Kontrol *Sliding Mode* Adaptif

Tinjau sistem dinamik nonlinear

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u \quad (1)$$
$$y = h(x,t) \quad (2)$$

dimana u dan y masing-masing menyatakan variabel input dan variabel output serta x menyatakan vektor *state* sistem. Kontrol *sliding mode* akan membuat output sistem y mengikuti input referensi yang diinginkan (y_r) dengan menjaga pergerakan sistem tetap pada suatu permukaan atau *manifold* S (Boufadene, 2018) yang didefinisikan sebagai

$$S = \sigma(x,t) = 0 \quad (3)$$

S merepresentasikan permukaan *sliding mode* sehingga untuk menerapkan aturan kontrol u, variabel *state* sistem harus diarahkan menuju permukaan *sliding* S. Aturan u dapat dinyatakan dalam

$$u = \hat{u}_{eq} + u_{sw} \quad (4)$$

dimana $\hat{u}_{eq}$ menyatakan vektor kontrol ekuivalen yang diperoleh dengan menentukan turunan persamaan (3) sedangkan u_{sw} menyatakan kontrol *switching* yang biasanya dinyatakan sebagai

$$u_{sw} = -k_p \, sgn(S) \quad (5)$$

dengan k_p menyatakan gain kontrol dan fungsi signum (sgn) didefinisikan sebagai

$$sgn(z) = \begin{cases} 1 & \text{jika } z > 0 \\ 0 & \text{jika } z = 0 \\ -1 & \text{jika } z < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Gain kontrol k_p kemudian akan diupdate menggunakan aturan adaptif untuk mengatasi adanya ketidakpastian pada model sehingga kontrol u yang diperoleh disebut sebagai kontrol *sliding mode* adaptif.

2. Kestabilan Lyapunov

Secara umum, terdapat terdapat tiga langkah dalam mendesain kontrol *sliding mode* adaptif yakni:

a. menentukan aturan kontrol,
b. menentukan mekanisme adaptasi gain kontrol, dan
c. menganalisis kestabilan loop tertutup dan kekonvergenan dari eror *tracking*.

Analisis kestabilan dan kekonvergenan dalam hal ini dilakukan dengan memilih fungsi Lyapunov dan kemudian menerapkan Teorema Kestabilan Lyapunov dan *Lemma Barbalat*

Teorema 1. Teorema Kestabilan Lyapunov (Khalil, 2002)
Misalkan $x = 0$ merupakan titik setimbang untuk sistem autonomous $\dot{x} = f(x)$ dan $D \in \mathbb{R}^n$ adalah domain yang memuat $x = 0$. Misalkan $V: D \to \mathbb{R}$ fungsi diferensiabel kontinu sedemikian sehingga

$$V(0) = 0 \quad \text{dan} \quad V(x) > 0, \qquad x \in D - \{0\}.$$

Jika

$$\dot{V}(x) \leq 0 \ \in D$$

maka $x = 0$ stabil. Jika

$$\dot{V}(x) < 0 \ \in D - \{0\}$$

maka $x = 0$ stabil asimtotik.

Lemma 1. Lemma Barbalat (Khalil, 2002)
Misalkan $w: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu seragam pada $[0, \infty)$. Jika $\lim_{t\to\infty} \int_0^t w(\tau)\ d\tau$ ada dan berhingga, maka $w(t) \to 0$ saat $t \to \infty$.

METODE PENELITIAN

Model yang akan dikaji dalam penelitian ini akan mengadaptasi model dengan kontrol optimal yang telah diajukan oleh Gao & Huang (2018). Variabel *state* dari sistem yang akan dikontrol adalah variabel individu rentan S, individu yang divaksinasi V, individu terinfeksi TB-laten L, individu terinfeksi TB-aktif I, dan individu yang diberi *treatment* T serta terdapat tiga variabel output yakni $S, I,$ dan T dengan input kontrol berupa vaksinasi dan *treatment*. Langkah pertama adalah menentukan aturan kontrol *sliding mode* adaptif kemudian dilanjutkan dengan menentukan aturan mekanisme adaptasi untuk masing-masing gain kontrol. Langkah selanjutnya adalah menentukan fungsi Lyapunov yang bersesuaian untuk untuk menganalisis kekonvergenan eror *tracking.* Untuk mengevaluasi strategi kontrol yang telah didesain maka akan dilakukan simulasi numerik beserta interpretasinya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Model Penyebaran Tuberkulosis

Pada penelitian ini model yang akan dikaji mengadaptasi model Gao & Huang (2018) dimana total populasi $N(t)$ dibagi ke dalam lima subpopulasi yakni individu rentan ($S(t)$), individu tervaksinasi ($V(t)$), individu terinfeksi TB-laten ($L(t)$), individu terinfeksi TB-aktif ($I(t)$) dan individu mendapat *treatment* ($T(t)$) dengan tiga variabel input kontrol yakni laju vaksinasi ($u_1(t)$), laju keberhasilan di mana individu yang berhasil mendapat *treatment* TB kembali ke tahap TB-laten ($u_2(t)$), dan laju *treatment* individu terinfeksi TB-aktif ($u_3(t)$). Model yang menggambarkan sistem yang dikontrol dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial nonlinear berikut

$$\dot{S} = \Lambda - \beta S(I + \alpha_1 T) - (\mu + u_1(t))S \quad (7)$$
$$\dot{V} = u_1(t)S - \alpha_2 \beta V(I + \alpha_1 T) - \mu V \quad (8)$$
$$\dot{L} = \rho\beta S(I + \alpha_1 T) + \alpha_2 \beta V(I + \alpha_1 T) - (\mu + \varepsilon)L + u_2(t)T \quad (9)$$
$$\dot{I} = (1 - \rho)\beta S(I + \alpha_1 T) + \varepsilon L - (\mu + \delta + u_3(t))I \quad (10)$$
$$\dot{T} = u_3(t)I - (\mu + u_2(t))T \quad (11)$$

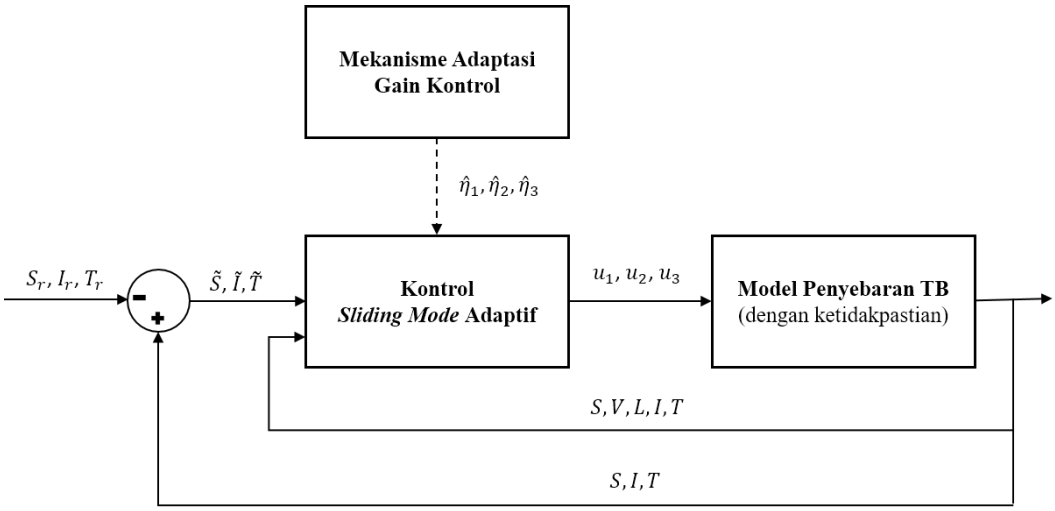
Parameter Λ menyatakan laju rekrutmen konstan individu yang rentan terhadap TB, μ menyatakan laju kematian alami, δ menyatakan laju kematian karena penyakit, dan ε menyatakan tingkat di mana individu yang laten menjadi terinfeksi TB-aktif. Individu rentan terinfeksi TB dari individu TB-aktif dengan laju $\beta S(I + \alpha_1 T)$ di mana β merupakan koefisien transmisi penyakit dan parameter α_1 menyatakan tingkat penurunan penularan di antara individu dengan TB-aktif yang mendapat *treatment*. Sebesar ρ proporsi individu rentan terinfeksi tuberkulosis diasumsikan masuk ke dalam sub-populasi TB-laten dengan laju $\beta S(I + \alpha_1 T)$ sedangkan sejumlah $(1 - \rho)$ pindah menjadi TB-aktif. Model ini dibangun dengan asumsi bahwa individu dengan TB-laten tidak menularkan penyakit. Individu yang tervaksinasi terinfeksi TB dengan laju $\alpha_2 \beta V(I + \alpha_1 T)$ dengan α_2 menyatakan tingkat pengurangan risiko infeksi karena vaksinasi. Pada model di atas, $0 \leq u_1(t) \leq u_{1max}$, $0 \leq u_2(t) \leq u_{2max}$, dan $0 \leq u_3(t) \leq u_{3max}$ merupakan input kontrol dari sistem yang didesain untuk mencapai tujuan kontrol yang diinginkan.

2. Desain Strategi Kontrol *Sliding Mode* Adaptif

Pada bagian ini, kontrol *sliding mode* adaptif akan didesain pada model penyebaran TB dengan adanya ketidakpastian parameter. Tujuan desain kontrol *sliding mode* adaptif ini adalah menurunkan jumlah individu rentan, individu terinfeksi TB-aktif serta individu yang diberi *treatment*. Jumlah individu rentan perlu diturunkan yakni melalui penerapan kontrol berupa vaksinasi sedemikian sehingga mengurangi kemungkinan penyebaran TB dari individu terinfeksi ke individu rentan. Agar tujuan ini tercapai maka laju vaksinasi, laju keberhasilan di mana individu yang berhasil mendapat *treatment* TB kembali ke tahap TB-laten,

dan laju *treatment* individu terinfeksi TB-aktif digunakan sebagai input kontrol. Ketiga input kontrol ini digunakan sedemikian sehingga variabel output sistem berupa jumlah individu rentan (S), individu terinfeksi TB-aktif (I) serta individu yang diberi *treatment* (T) menurun dengan mengikuti fungsi referensi yang terbatas dimana masing-masing dinyatakan oleh $S_r, I_r,$ dan T_r ($S \to S_r, I \to I_r,$ dan $T \to T_r$).

Lebih lanjut, dengan menerapkan kontrol yang telah didesain, performansi *tracking* bisa tercapai dengan adanya ketidakpastian parameter yang tidak diketahui. Stabilitas dinamika loop tertutup dan kekonvergenan output sistem menuju fungsi referensi akan dibuktikan dengan menggunakan prinsip kestabilan Lyapunov. Selain itu, mekanisme adaptasi gain kontrol akan didefinisikan sedemikian sehingga kestabilan Lyapunov dan kekokohan sistem terhadap ketidakpastian pada model dapat tercapai. Skema desain kontrol *sliding mode* adaptif untuk sistem (7) – (11) di atas diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Skema desain kontrol *sliding mode* adaptif pada model penyebaran TB

Untuk mendesain kontrol *sliding mode* adaptif pertama-tama kita nyatakan persamaan (7), (10) dan (11) dalam $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t),$ dan $u_3 = u_3(t)$ yakni

$$u_1 = -\frac{\dot{S}}{S} + \frac{\Lambda}{S} - \beta(I + \alpha_1 T) - \mu \tag{12}$$

$$u_2 = -\frac{\dot{T}}{T} - \frac{\dot{I}}{T} + (1-\rho)\beta\frac{SI}{T} + (1-\rho)\alpha_1\beta S + \varepsilon\frac{L}{T} - (\mu+\delta)\frac{I}{T} - \mu \tag{13}$$

$$u_3 = -\frac{\dot{I}}{I} + (1-\rho)\beta S + (1-\rho)\alpha_1\beta\frac{ST}{I} + \varepsilon\frac{L}{I} - (\mu+\delta) \tag{14}$$

Kemudian definisikan $\dot{S} = \phi_1 = \dot{S}_r - \lambda_1\tilde{S}, \dot{T} = \phi_2 = \dot{T}_r - \lambda_2\tilde{T},$ dan $\dot{I} = \phi_3 = \dot{I}_r - \lambda_3\tilde{I}$ maka persamaan (12) – (14) menjadi

$$u_1 = -\frac{\phi_1}{S} + \frac{\Lambda}{S} - \beta(I + \alpha_1 T) - \mu \tag{15}$$

$$u_2 = -\frac{\phi_2}{T} - \frac{\phi_3}{T} + (1-\rho)\beta\frac{SI}{T} + (1-\rho)\alpha_1\beta S + \varepsilon\frac{L}{T} - (\mu+\delta)\frac{I}{T} - \mu \tag{16}$$

$$u_3 = -\frac{\phi_3}{I} + (1-\rho)\beta S + (1-\rho)\alpha_1\beta\frac{ST}{I} + \varepsilon\frac{L}{I} - (\mu+\delta) \tag{17}$$

dimana $\tilde{S} = S - S_r, \tilde{T} = T - T_r, \tilde{I} = I - I_r$ menyatakan eror *tracking* dan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ merupakan konstanta positif. Ruas kanan persamaan (15) – (17) dapat diekspresikan sebagai kombinasi linear dari parameter-parameter sistem yang mempengaruhi dinamika sistem yakni

$$u_1 = -\frac{\left(\dot{S}_r - \lambda_1\tilde{S}\right)}{S} + \boldsymbol{\mathfrak{R}_1}(S,I,T)\boldsymbol{\theta_1} \tag{18}$$

$$u_2 = -\frac{\left(\dot{T}_r - \lambda_2\tilde{T}\right)}{T} - \frac{\left(\dot{I}_r - \lambda_3\tilde{I}\right)}{T} + \boldsymbol{\mathfrak{R}_2}(S,L,I,T)\boldsymbol{\theta_2} \tag{19}$$

$$u_3 = -\frac{\left(\dot{I}_r - \lambda_3\tilde{I}\right)}{I} + \boldsymbol{\mathfrak{R}_3}(S,L,I,T)\boldsymbol{\theta_3} \tag{20}$$

$\boldsymbol{\mathfrak{R}_1}, \boldsymbol{\mathfrak{R}_2}, \boldsymbol{\mathfrak{R}_3}$ merupakan matriks regresor yang memuat fungsi-fungsi dalam variabel S, L, I, T, sedangkan vektor $\boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{\theta_2}, \boldsymbol{\theta_3}$ memuat parameter-parameter tak pasti dari sistem berdasarkan dinamika pada kompartemen individu rentan, individu terinfeksi TB-aktif dan individu yang diberi *treatment* dengan

$$\boldsymbol{\mathfrak{R}_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S} & -I & -T & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{R}_2} = \begin{bmatrix} \frac{SI}{T} & S & \frac{L}{T} & \frac{I}{T} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{R}_3} = \begin{bmatrix} S & \frac{ST}{I} & \frac{L}{I} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta_1} = [\Lambda \quad \beta \quad \alpha_1\beta \quad \mu]^T$$

$$\boldsymbol{\theta_2} = [(1-\rho)\beta \quad (1-\rho)\alpha_1\beta \quad \varepsilon \quad \mu+\delta \quad \mu]^T$$

$$\boldsymbol{\theta_3} = [(1-\rho)\beta \quad (1-\rho)\alpha_1\beta \quad \varepsilon \quad \mu+\delta]^T$$

Mengingat desain kontrol ini mempertimbangkan ketidakpastian parameter, maka vektor parameter $\boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{\theta_2}, \boldsymbol{\theta_3}$ diganti oleh vektor estimasinya yakni $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{3}}$ sehingga diperoleh aturan kontrol *sliding mode* adaptif sebagai berikut

$$u_1 = -\frac{\left(\dot{S}_r - \lambda_1\tilde{S}\right)}{S} + \boldsymbol{\mathfrak{R}_1}(S,I,T)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{1}} + \hat{\eta}_1\frac{sgn(\tilde{S})}{S} \tag{21}$$

$$u_2 = -\frac{\left(\dot{T}_r - \lambda_2\tilde{T}\right)}{T} - \frac{\left(\dot{I}_r - \lambda_3\tilde{I}\right)}{T} + \boldsymbol{\mathfrak{R}_2}(S,L,I,T)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{2}} + \hat{\eta}_2\frac{sgn(\tilde{T})}{T} \tag{22}$$

$$u_3 = -\frac{\left(\dot{I}_r - \lambda_3 \tilde{I}\right)}{I} + \mathfrak{R}_3(S, L, I, T)\widehat{\boldsymbol{\theta}}_3 + +\hat{\eta}_3 \frac{sgn(\tilde{I})}{I} \tag{23}$$

dimana $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3$ menyatakan gain kontrol yang akan diupdate menggunakan aturan adaptasi sedemikian sehingga kestabilan tetap terjamin meskipun terdapat ketidakpastian dalam model.

Proposisi. Eror *tracking* jumlah individu rentan, individu terinfeksi TB-aktif serta individu yang diberi *treatment* akan konvergen ke nol ($\tilde{S} \to 0,\ \tilde{T} \to 0,\ \tilde{I} \to 0$ saat $t \to \infty$) dengan menggunakan aturan kontrol *sliding mode* adaptif pada persamaan (21) – (23) dengan mekanisme adaptasi gain kontrol

$$\dot{\hat{\eta}}_1 = \omega_1 \left|\tilde{S}\right|, \qquad \hat{\eta}_1(0) = \eta_{10} > 0 \tag{24}$$

$$\dot{\hat{\eta}}_2 = \omega_2 \left|\tilde{T}\right|, \qquad \hat{\eta}_2(0) = \eta_{20} > 0 \tag{25}$$

$$\dot{\hat{\eta}}_3 = \omega_3 \left|\tilde{I}\right|, \qquad \hat{\eta}_3(0) = \eta_{30} > 0 \tag{26}$$

dengan konstanta adaptasi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ merupakan konstanta positif yang bersesuaian dengan laju perubahan eror *tracking* secara berturut-turut dari $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, dan $\tilde{I}$. Selain itu, $\eta_{10}, \eta_{20}, \eta_{30}$ menyatakan nilai awal dari gain kontrol $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3$ yang bernilai positif.

Bukti. Mensubstitusi persamaan (12) ke (21), (13) ke (22), dan (14) ke persamaan (23), kita peroleh dinamika loop tertutup dari individu rentan, individu terinfeksi TB-aktif serta individu yang diberi *treatment* yakni

$$\dot{\tilde{S}} = -\lambda_1 \tilde{S} - S\mathfrak{R}_1\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_1 - \hat{\eta}_1 sgn(\tilde{S}) \tag{27}$$

$$\dot{\tilde{T}} = -\dot{\tilde{I}} - \lambda_2 \tilde{T} - \lambda_3 \tilde{I} - T\mathfrak{R}_2\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2 - \hat{\eta}_2 sgn(\tilde{T}) \tag{28}$$

$$\dot{\tilde{I}} = -\lambda_3 \tilde{I} - I\mathfrak{R}_3\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_3 - \hat{\eta}_3 sgn(\tilde{I}) \tag{29}$$

dimana $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_1 = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_1 - \boldsymbol{\theta}_1, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2 = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2 - \boldsymbol{\theta}_2$, dan $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_3 = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_3 - \boldsymbol{\theta}_3$ menyatakan eror estimasi vektor parameter yang terbatas. Karena variable *state* (S, L, I, T) terbatas maka terdapat konstanta positif ϵ_1, ϵ_2 dan ϵ_3 sedemikian sehingga

$$\left|S\mathfrak{R}_1\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_1\right| \le \epsilon_1 \tag{30}$$

$$\left|T\mathfrak{R}_2\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2\right| \le \epsilon_2 \tag{31}$$

$$\left|I\mathfrak{R}_3\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_3\right| \le \epsilon_3 \tag{32}$$

Untuk menganalisis kekonvergenan eror tracking pilih fungsi Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{S}^2 + \tilde{I}^2 + \tilde{T}^2 + \frac{1}{\omega_1}(\hat{\eta}_1 - \epsilon_1)^2 + \frac{1}{\omega_2}(\hat{\eta}_2 - \epsilon_2)^2 + \frac{1}{\omega_3}(\hat{\eta}_3 - \epsilon_3)^2\right].$$

Terlihat bahwa $V(t) \ge 0$ dan dengan menurunkan $V(t)$ terhadap t diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = &-\lambda_1\tilde{S}^2 - \tilde{S}\left(S\mathfrak{R}_1\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1\right) - \hat{\eta}_1\tilde{S}\ sgn\left(\tilde{S}\right) + \frac{1}{\omega_1}(\hat{\eta}_1 - \epsilon_1)\dot{\hat{\eta}}_1 - \tilde{T}\dot{\tilde{I}} \\ &- \lambda_2\tilde{T}^2 - \lambda_3\tilde{T}\tilde{I} - \tilde{T}\left(T\mathfrak{R}_2\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2\right) - \hat{\eta}_2\tilde{T}\ sgn\left(\tilde{T}\right) \\ &+ \frac{1}{\omega_2}(\hat{\eta}_2 - \epsilon_2)\dot{\hat{\eta}}_2 - \lambda_3\tilde{I}^2 - \tilde{I}\left(I\mathfrak{R}_3\tilde{\boldsymbol{\theta}}_3\right) - \hat{\eta}_3\tilde{I}\ sgn(\tilde{I}) \\ &+ \frac{1}{\omega_3}(\hat{\eta}_3 - \epsilon_3)\dot{\hat{\eta}}_3\end{aligned} \tag{33}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusi persamaan (24) – (26) ke persamaan (33) dan karena $\tilde{S}\ sgn\left(\tilde{S}\right) = \left|\tilde{S}\right|, \tilde{T}\ sgn\left(\tilde{T}\right) = \left|\tilde{T}\right|, \tilde{I}\ sgn(\tilde{I}) = \left|\tilde{I}\right|$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = &-\lambda_1\tilde{S}^2 - \tilde{S}\left(S\mathfrak{R}_1\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1\right) - \hat{\eta}_1\left|\tilde{S}\right| + (\hat{\eta}_1 - \epsilon_1)\left|\tilde{S}\right| - \tilde{T}\dot{\tilde{I}} - \lambda_2\tilde{T}^2 \\ &- \lambda_3\tilde{T}\tilde{I} - \tilde{T}\left(T\mathfrak{R}_2\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2\right) - \hat{\eta}_2\left|\tilde{T}\right| + (\hat{\eta}_2 - \epsilon_2)\left|\tilde{T}\right| - \lambda_3\tilde{I}^2 \\ &- \tilde{I}\left(I\mathfrak{R}_3\tilde{\boldsymbol{\theta}}_3\right) - \hat{\eta}_3\left|\tilde{I}\right| + (\hat{\eta}_3 - \epsilon_3)\left|\tilde{I}\right|\end{aligned} \tag{34}$$

Berdasarkan persamaan (30) – (32) maka persamaan (34) menjadi

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \le &-\lambda_1\tilde{S}^2 + \epsilon_1\left|\tilde{S}\right| - \hat{\eta}_1\left|\tilde{S}\right| + (\hat{\eta}_1 - \epsilon_1)\left|\tilde{S}\right| - \tilde{T}\dot{\tilde{I}} - \lambda_2\tilde{T}^2 - \lambda_3\tilde{T}\tilde{I} \\ &+ \epsilon_2\left|\tilde{T}\right| - \hat{\eta}_2\left|\tilde{T}\right| + (\hat{\eta}_2 - \epsilon_2)\left|\tilde{T}\right| - \lambda_3\tilde{I}^2 + \epsilon_3\left|\tilde{I}\right| \\ &- \hat{\eta}_3\left|\tilde{I}\right| + (\hat{\eta}_3 - \epsilon_3)\left|\tilde{I}\right|\end{aligned} \tag{35}$$

Persamaan (35) dapat disederhanakan menjadi

$$\dot{V}(t) \le -\lambda_1\tilde{S}^2 - \lambda_2\tilde{T}^2 - \lambda_3\tilde{I}^2 \le 0 \tag{36}$$

Karena $V(t) \ge 0$ dan $\dot{V}(t) \le 0$ maka berdasarkan Teorema Kestabilan Lyapunov, titik setimbang dari dinamika loop tertutup (27) – (29) stabil. Selanjutnya, misalkan $w(t) = \lambda_1\tilde{S}^2 + \lambda_2\tilde{T}^2 + \lambda_3\tilde{I}^2 \ge 0$, maka persamaan (36) dapat ditulis kembali menjadi

$$\dot{V}(t) \le -\lambda_1\tilde{S}^2 - \lambda_2\tilde{T}^2 - \lambda_3\tilde{I}^2 = -w(t) \tag{37}$$

Mengintegralkan kedua ruas persamaan (37) di atas dari $t = 0$ sampai $t \to \infty$ diperoleh

$$V(0) - V(\infty) \ge \lim_{t\to\infty}\int_0^t w(\tau)\ d\tau \tag{38}$$

Karena $\dot{V}(t) \le 0$, maka $V(0) - V(\infty) \ge 0$. Akibatnya, $\lim_{t\to\infty}\int_0^t w(\tau)\ d\tau$ ada dan berhingga. Sehingga, berdasarkan Lemma Barbalat

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\lambda_1\tilde{S}^2 + \lambda_2\tilde{T}^2 + \lambda_3\tilde{I}^2\right) = 0 \tag{39}$$

Karena $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ dan $\tilde{S}^2, \tilde{T}^2, \tilde{I}^2 \ge 0$ maka persamaan (39) mengimplikasi bahwa $\tilde{S} \to 0,\ \tilde{T} \to 0,\ \tilde{I} \to 0$ saat $t \to \infty$. ■

Dengan demikian, tujuan desain kontrol *sliding mode* adaptif tercapai yakni mengikuti fungsi referensi untuk subpopulasi individu rentan, individu terinfeksi TB-aktif serta individu yang diberi *treatment* ($S \to S_r, I \to I_r$, dan $T \to T_r$).

3. Simulasi Numerik

Untuk mengevaluasi strategi kontrol *sliding mode* adaptif yang telah didesain (persamaan (21) – (23)), maka pada bagian ini akan disajikan beberapa hasil simulasi numerik. Nilai-nilai parameter model kontrol TB (7) – (11) yang akan digunakan dalam simulasi mengikuti nilai-nilai parameter dalam penelitian Gao & Huang (Gao & Huang, 2018), disajikan pada Tabel 1. Simulasi numerik dilakukan menggunakan MATLAB dengan lama periode kontrol adalah 20 tahun $(t_f = 20)$.

Nilai awal untuk masing-masing variabel *state* adalah $S(0) = S_0 = 15000$, $V(0) = V_0 = 10000$, $L(0) = L_0 = 12000$, $I(0) = I_0 = 1500$, dan $T(0) = T_0 = 1000$. Fungsi referensi yang akan digunakan dalam simulasi adalah

$$S_r = (S_0 - S_f)e^{-k_1 t} + S_f \tag{40}$$

$$T_r = (T_0 - T_f)e^{-k_2 t} + T_f \tag{41}$$

$$I_r = (I_0 - I_f)e^{-k_3 t} + I_f \tag{42}$$

dimana k_1, k_2, k_3 menyatakan laju penurunan populasi, sedangkan S_f, T, dan I_f menyatakan jumlah akhir yang diinginkan dari individu rentan, individu yang diberi *treatment* dan individu terinfeksi TB-aktif. Nilai-nilai yang akan digunakan dalam simulasi diberikan sebagai berikut

$$k_1 = 0{,}4 \quad ; \quad S_f = 1000$$
$$k_2 = 1 \quad ; \quad T_f = 200$$
$$k_3 = 1 \quad ; \quad I_f = 220$$

Tabel 1. Nilai Parameter untuk Simulasi Model Kontrol TB

Parameter	Nilai	Satuan
Λ	1428	Orang tahun^{-1}
β	0,003	Orang^{-1} tahun^{-1}
α_1	0,25	-
α_2	0,3	-
μ	$1/70$	Tahun^{-1}
ρ	0,9	-
ε	0,00368	Tahun^{-1}
δ	0,17	Tahun^{-1}
u_{1max}, u_{3max}	1	-
u_{2max}	1,125	Tahun^{-1}

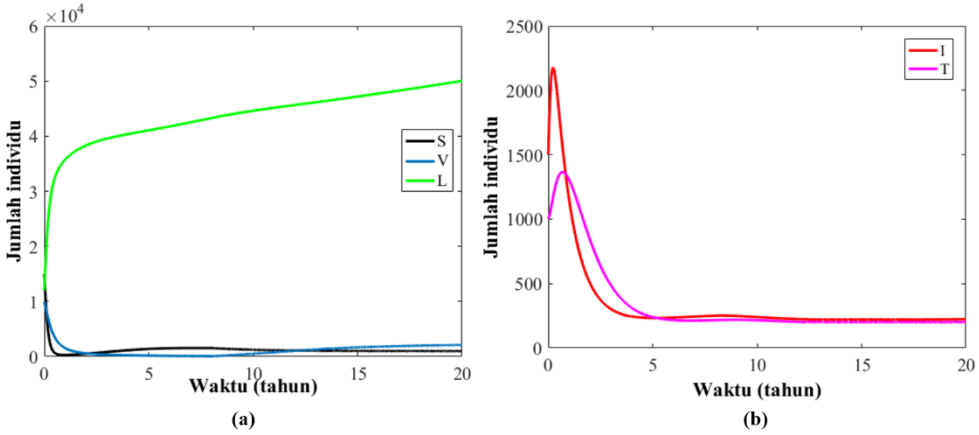
Nilai konstanta adaptasi dan nilai awal dari gain kontrol yang dipilih adalah

$$\omega_1 = 1 \quad ; \quad \eta_{10} = 100$$

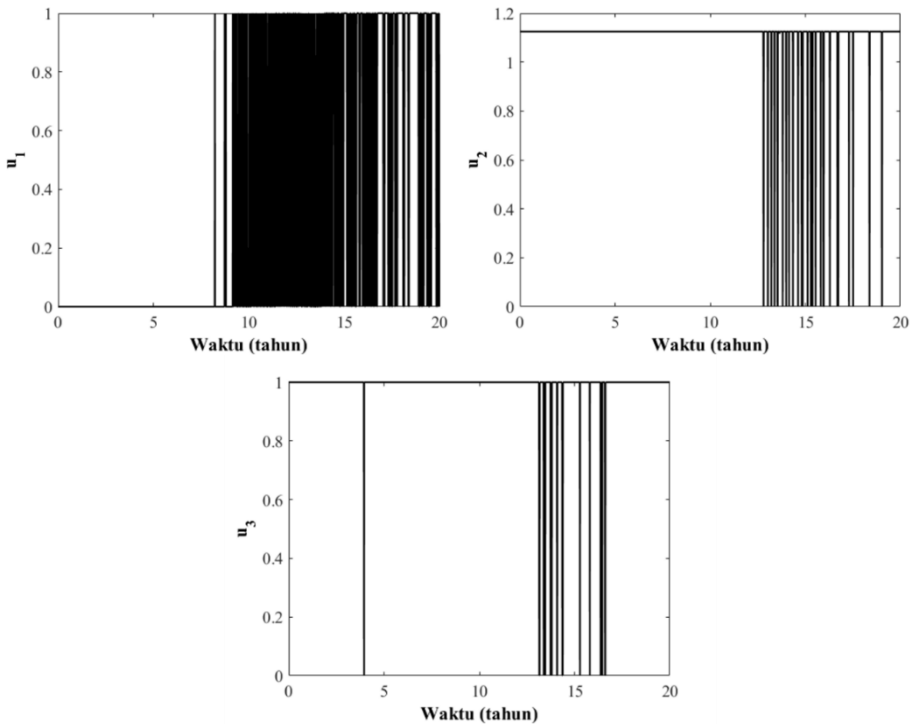
$$\omega_2 = 0{,}5 \quad ; \quad \eta_{20} = 100$$
$$\omega_3 = 1 \quad ; \quad \eta_{30} = 100$$

Lebih lanjut, akan ditinjau efek ketidakpastian parameter pada performansi kontrol *sliding mode* adaptif. Untuk itu, $20\%, 40\%, 60\%$, dan 80% ketidakpastian dipilih sebagai nilai awal vektor estimasi parameter ($\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_2$, dan $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_3$). Dalam hal ini dipilih $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_i = 1{,}2\,\boldsymbol{\theta}_i, 1{,}4\,\boldsymbol{\theta}_i, 1{,}6\,\boldsymbol{\theta}_i$, dan $1{,}8\,\boldsymbol{\theta}_i$ untuk masing-masing $20\%, 40\%, 60\%$, dan 80% ketidakpastian.

Berdasarkan hasil simulasi terlihat bahwa jumlah individu rentan (S) (Gambar 2.a) serta jumlah individu terinfeksi TB-aktif (I) dan individu yang diberi *treatment* (T) (Gambar 2.b) mengalami penurunan setelah diberikan kontrol dengan mempertimbangkan adanya 80% ketidakpastian parameter. Penurunan ketiga subpopulasi ini menyebabkan adanya penurunan jumlah individu yang tervaksinansi (V) serta peningkatan jumlah individu terinfeksi Tb-laten (L) seperti terlihat pada Gambar 2.a. Kontrol yang diberikan ($0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1{,}125$, dan $0 \leq u_3 \leq 1$) disajikan pada Gambar 3.

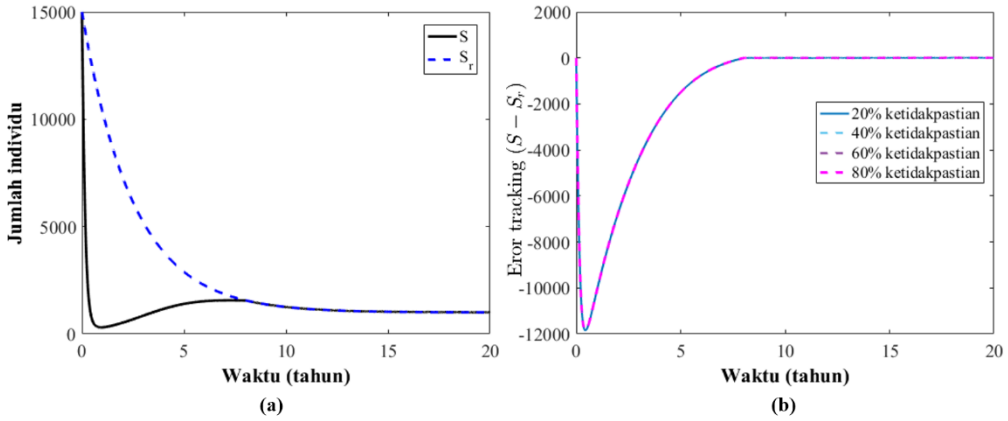


Gambar 2. Grafik variabel *state*: (a) S, V, L dan (b) I, T setelah dikenakan kontrol untuk kondisi 80% ketidakpastian



Gambar 3. Grafik variabel input kontrol (u_1, u_2, u_3) untuk kondisi 80% ketidakpastian

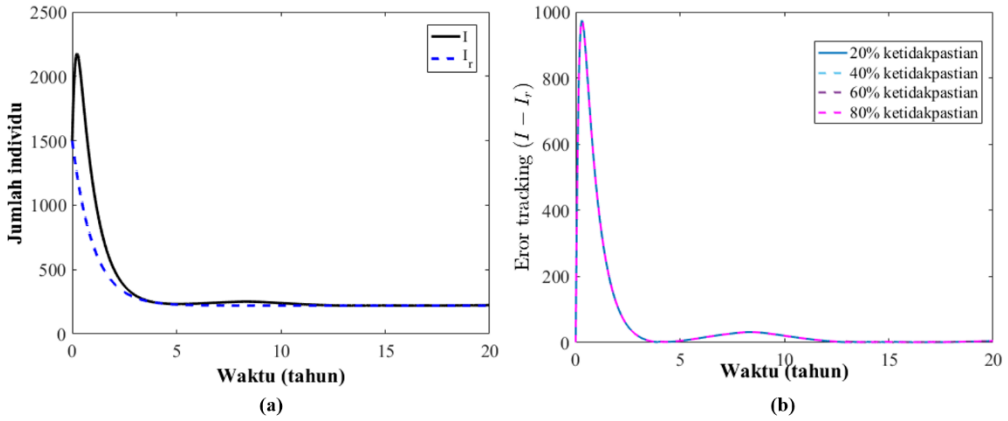
Selain itu, dengan mempertimbangkan kondisi 80% ketidakpastian, ketiga subpopulasi yang merupakan variabel output kontrol (S, I, T) mengalami penurunan dengan mengikuti fungsi referensinya masing-masing (S_r, I_r, T_r) seperti terlihat pada Gambar 4.a, Gambar 5.a dan Gambar 6. a.



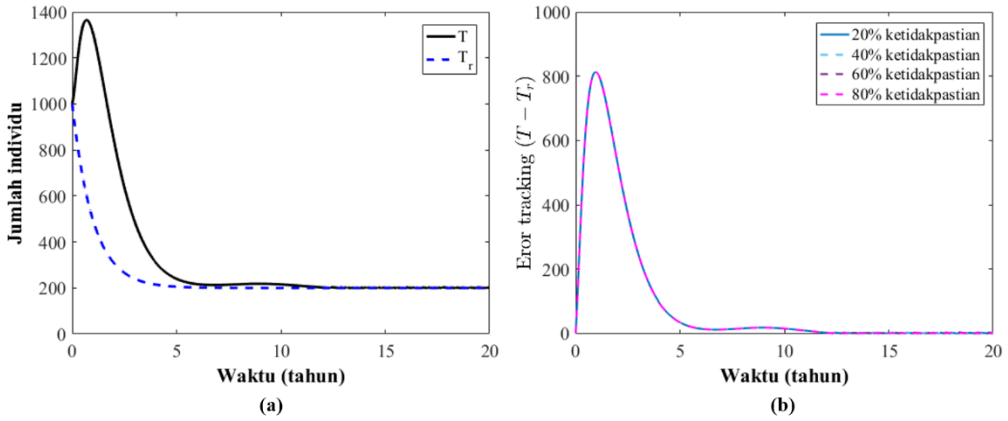
Gambar 4. (a) Grafik jumlah individu rentan (S) dibandingkan dengan fungsi referensinya (S_r) untuk kondisi 80% ketidakpastian (b) Efek 20%, 40%, 60% dan 80% ketidakpastian pada eror *tracking* jumlah individu rentan $(\tilde{S})$

Berdasarkan Gambar 4.b, Gambar 5.b dan Gambar 6.b, terlihat bahwa eror *tracking* individu rentan $\tilde{S}$, eror *tracking* individu terinfeksi TB-aktif $\tilde{I}$ dan eror *tracking* individu yang diberi *treatment* $\tilde{T}$ konvergen ($\tilde{S} \to 0, \tilde{I} \to 0, \tilde{T} \to 0$,saat $t \to$

∞) dengan menerapkan aturan kontrol *sliding* mode serta mekanisme adaptasi gain kontrol yang telah desain. Kekonvergenan ini tercapai untuk semua kondisi ketidakpastian yang diberikan.



Gambar 5. (a) Grafik jumlah individu terinfeksi TB-aktif (I) dibandingkan dengan fungsi referensinya (I_r) untuk kondisi 80% ketidakpastian (b) Efek 20%, 40%, 60% dan 80% ketidakpastian pada eror *tracking* jumlah individu terinfeksi TB-aktif $(\tilde{I})$



Gambar 6. Grafik jumlah individu yang diberi *treatment* (T) dibandingkan dengan fungsi referensinya (T_r) untuk kondisi 80% ketidakpastian (b) Efek 20%, 40%, 60% dan 80% ketidakpastian pada eror *tracking* jumlah individu yang diberi *treatment* $(\tilde{T})$

KESIMPULAN

Pada penelitian ini, kontrol *sliding mode* adaptif diterapkan pada model penyebaran TB dengan mempertimbangkan adanya ketidakpastian parameter pada model. Desain kontrol ini bertujuan untuk menurunkan jumlah individu rentan, individu terinfeksi TB-aktif serta jumlah individu yang mendapat *treatment* dengan mengikuti fungsi referensi yang diberikan. Untuk itu, input kontrol berupa vaksinasi dan pengobatan diterapkan pada model. Kestabilan dinamika lup tertutup serta konvergensi eror *tracking* dibuktikan dengan menggunakan Teorema Kestabilan Lyapunov. Selain itu, simulasi numerik dilakukan untuk melihat

performansi kontrol yang telah didesain. Berdasarkan hasil simulasi terlihat bahwa eror *tracking* jumlah individu rentan, individu terinfeksi TB-aktif serta jumlah individu yang mendapat *treatment* konvergen meskipun terdapat berbagai kondisi ketidakpastian.

REFERENSI

Ayu, R. W. S., & Aulia, H. H. (2021). Kontrol Adaptif pada Model Penyebaran Kolera dengan Adanya Ketidakpastian Parameter. *Math Educa Journal*. Vol. 5(2), 154–162.

Badfar, E., Zaferani, E. J., & Nikoofard, A. (2022). Design a Robust Sliding Mode Controller Based on the State And Parameter Estimation for the Nonlinear Epidemiological Model of COVID-19. *Nonlinear Dyn.* Vol. 109(1), 5–18.

Boufadene, M. (2018). *Nonlinear Control Systems using MATLAB®* (1st ed.). CRC Press.

Choi, S., Jung, E., & Lee, S.-M. (2015). Optimal Intervention Strategy for Prevention Tuberculosis using a Smoking-Tuberculosis Model. *Journal of Theoretical Biology*. Vol. 380, 256–270.

Egonmwan, A. O., & Okuonghae, D. (2019). Analysis of a Mathematical Model for Tuberculosis With Diagnosis. *J. Appl. Math. Comput.* Vol. 59, 129–162.

Gao, D., & Huang, N. (2018). Optimal Control Analysis of a Tuberculosis Model. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 58, 47–64.

Houben, R. M. G. J., & Dodd, P. J. (2016). The Global Burden of Latent Tuberculosis Infection: A Re-estimation Using Mathematical Modelling. *PLoS Med*. Vol. 13(10), e1002152.

Ibeas, A., Sen, M. de la, & Alonso-Quesada, S. (2014). Robust Sliding Control of SEIR Epidemic Models. *Mathematical Problems in Engineering*. Vol. 11.

Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems* (3rd ed.). Prentice Hall.

Lillebaek, T., Dirksen, A., Baess, I., Strunge, B., Thomsen, V. Ø., & Andersen, A. B. (2002). Molecular Evidence of Endogenous Reactivation of Mycobacterium tuberculosis after 33 Years of Latent Infection. *The Journal of Infectious Diseases*. Vol. 185(3), 401–404.

Mehra, A. H. A., Zamani, I., Abbasi, Z., & Ibeas, A. (2019). Observer-Based Adaptive PI Sliding Mode Control of Developed Uncertain SEIAR Influenza Epidemic Model Considering Dynamic Population. *Journal of Theoretical Biology*. Vol. 482, 109984.

Mishra, B. K., & Srivastava, J. (2014). Mathematical Model on Pulmonary and Multidrug-resistant Tuberculosis Patients With Vaccination. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. Vol. 22(2), 311–316.

Okuonghae, D., & Ikhimwin, B. O. (2016). Dynamics of a Mathematical Model for Tuberculosis with Variability in Susceptibility and Disease Progressions Due to Difference in Awareness Level. *Frontiers in Microbiology*. Vol. 6, 1530.

Rodrigues, P., Silva, C. J., & Torres, D. F. M. (2014). Cost-Effectiveness Analysis of Optimal Control Measures for Tuberculosis. *Bull Math Biol*. Vol. 76, 2627–2645.

Sharifia, M., & Moradib, H. (2017). Nonlinear Robust Adaptive Sliding Mode Control of Influenza Epidemic in The Presence of Uncertainty. *Journal of Process Control*. Vol. 56, 48–57.

Silva, C. J., & Torres, D. F. M. (2015). A TB-HIV/AIDS Coinfection Model and Optimal Control Treatment. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A.* Vol. 35(9), 4639–4663.

Ullah, S., Ullah, O., Khan, M. A., & Gul, T. (2020). Optimal Control Analysis of Tuberculosis (TB) with Vaccination and Treatment. *Eur. Phys. J. Plus*. Vol. 135, 602.

WHO. (2023). *Global Tuberculosis Report 2023*. Geneva: World Health Organization.

Yang, Y., Tang, S., Ren, X., Zhao, H., & Guo, C. (2016). Global Stability and Optimal Control for a Tuberculosis Model with Vaccination and Treatment. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B.* Vol. 21, 1009–1022.