



METODE BLACK-SCHOLES DALAM PENENTUAN HARGA OPSI

Ahmad Taufik, Mochammad Idris, Aprida Siska Lestia

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani Km. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
email: taufik721ahmad@gmail.com

ABSTRACT

The Black-Scholes Method is one of the option pricing method that introduced by Fischer Black and Myron Scholes in 1973. This study aim to review the determination of the price of an option with stocks as the underlying assets and based on Black and Scholes assumptions. These assumptions lead to construct an equation named Black-Scholes differential equations, which is the equation that must be satisfied for option as the derivative instrument and non-dividend giving stocks as the underlying assets. After the Black-Scholes differential equations formed successfully, the next step is to find the solution of that equation. Consider the option is call option, the solution that will be obtained from solving the equation is the price of call option. Then substitute it to the put-call parity equation, which is the equation that shows the relationship between call and put option prices, so the price of put option can be obtained too. The estimation that obtained from the Black-Scholes method is the highest price for a contract is said to be fair and worth to buy for the holder.

Keywords: options, derivative instrument, Black-Scholes differential equations

ABSTRAK

Metode Black-Scholes merupakan salah satu metode penentuan harga opsi yang dikemukakan oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji kembali penentuan harga opsi dengan aset dasar berupa saham dan berdasar pada asumsi oleh Black dan Scholes. Asumsi-asumsi ini bertujuan untuk membentuk suatu persamaan yang bernama persamaan diferensial Black-Scholes, yaitu persamaan yang harus dipenuhi oleh harga suatu instrumen derivatif berupa opsi dengan aset dasar saham yang tidak memberikan dividen. Setelah persamaan diferensial Black-Scholes berhasil terbentuk, maka langkah selanjutnya adalah mencari solusi untuk persamaan tersebut. Dengan menganggap opsi yang dimaksud adalah opsi beli, maka solusi yang diperoleh dalam menyelesaikan persamaan diferensial Black-Scholes menjadi harga opsi beli. Selanjutnya dengan mensubstitusikan harga opsi beli ke persamaan yang bernama put-call parity, yaitu persamaan yang menunjukkan hubungan antara harga opsi beli dan opsi jual, maka harga opsi jual dapat pula diperoleh. Estimasi harga opsi yang diperoleh dengan metode Black-Scholes merupakan batas tertinggi suatu kontrak dikatakan adil dan layak dibeli oleh pemegang opsi.

Kata kunci: opsi, instrumen derivatif, persamaan diferensial Black-Scholes

Received: 29 Mei 2024, Accepted: 7 Agustus 2024, Published: 7 Agustus 2024

PENDAHULUAN

Investasi (asal kata *invest*) memiliki arti menginvestasikan atau menanam uang. Investasi dapat pula diartikan sebagai suatu tindakan yang dilakukan di masa

kini untuk mempersiapkan dana di masa mendatang (Felisiah & Natalia, 2022). Orang yang melakukan investasi dinamakan investor. Berdasarkan asetnya, investasi (yang lebih lanjut membahas instrumen derivatif) dibedakan menjadi dua jenis, yaitu investasi aset nyata dan investasi aset keuangan (Chance & Brooks, 2021). Salah satu contoh investasi aset keuangan yang dapat dipilih oleh seorang investor adalah saham. Saham adalah suatu surat berharga sebagai bukti kepemilikan terhadap suatu perusahaan dan berhak atas keuntungan yang bernama dividen (Permata & Ghoni, 2019). Saham menjadi aset investasi yang populer bagi investor karena mampu memberi tingkat imbal hasil yang relatif tinggi. Istilah imbal hasil atau *return* diartikan sebagai keuntungan yang diperoleh investor setelah mengalokasikan dananya dalam suatu investasi (Felisiah & Natalia, 2022).

Meskipun investasi dalam bentuk saham mampu memberi imbal hasil tinggi, akan tetapi tingkat risiko yang tinggi juga turut membayangi para investor. Oleh sebab itu diperkenalkan suatu cara melindungi investor yang bernama instrumen derivatif. Instrumen derivatif adalah suatu instrumen keuangan yang imbal hasilnya diturunkan atau berasal dari instrumen keuangan lainnya, atau disebut juga sebagai aset dasar (Chance & Brooks, 2021). Salah satu contoh instrumen derivatif yaitu opsi. Opsi merupakan suatu surat pernyataan yang diterbitkan oleh seseorang atau lembaga yang memberikan pemegangnya suatu hak, tetapi bukan kewajiban, untuk membeli atau menjual suatu aset dasar dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu (Permata & Ghoni, 2019). Salah satu metode yang dapat digunakan dalam menentukan harga opsi dikemukakan oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973, yang dinamakan metode atau model Black-Scholes. Pada metode Black-Scholes, penentuan harga opsi menggunakan sejumlah asumsi yang ditetapkan di awal langkah, dan dengan menggunakan asumsi ini, harga opsi hanya akan bergantung pada harga saham, waktu, dan variabel yang dianggap konstan (Black & Scholes, 1973).

Penelitian terdahulu yang terkait dengan penentuan harga opsi menggunakan model Black-Scholes di antaranya oleh Chauhan & Gor (2021) yang menguji model Black-Scholes dengan model lain serta studi di pasar opsi India. Penelitian oleh Chowdhury dkk. (2020) melakukan verifikasi hasil dengan bantuan *machine learning* dan algoritma berbeda, sedangkan penelitian Morales-Bañuelos *et al.*, (2022) yang meneliti tentang modifikasi tingkat suku bunga dan variansi harga saham menjadi bergantung waktu. Oleh karena itu, dalam penelitian ini bertujuan untuk mengkaji kembali langkah-langkah penentuan harga opsi menggunakan metode Black-Scholes, dengan menganggap aset dasar berupa saham dan berdasar pada asumsi yang telah ditentukan.

TINJAUAN PUSTAKA

Sebelum melakukan penentuan harga opsi menggunakan metode Black-Scholes, terlebih dahulu diperlukan konsep-konsep yang dibutuhkan dalam pengerjaannya, yang disajikan sebagai berikut.

1. Pendahuluan Konsep Opsi

Sebagai bentuk perlindungan investor atas risiko yang membayangi para investor, diperkenalkanlah konsep instrumen derivatif. Instrumen derivatif dapat didefinisikan sebagai suatu instrumen keuangan yang imbal hasilnya diturunkan atau berasal dari instrumen keuangan lainnya, atau disebut juga sebagai aset dasar. Harga atau nilai pada instrumen derivatif berdasar pada *underlying asset* atau aset dasar. Contoh aset dasar di antaranya saham, obligasi, mata uang, dan lain sebagainya (Chance & Brooks, 2021).

Selain instrumen derivatif, investor dapat pula melakukan investasi dengan portofolio. Portofolio memiliki pengertian kumpulan investasi milik seorang investor yang terdiri dari berbagai macam aset investasi. Investor yang melakukan investasi dalam bentuk portofolio akan menanggung risiko yang lebih rendah karena dana yang dimiliki investor tidak diletakkan di satu tempat saja (Sinaga dkk., 2022). Nilai suatu portofolio dapat disimbolkan dengan G dan berbentuk

$$G = -f + S \frac{\partial f}{\partial S} \quad (1)$$

dengan f adalah harga instrumen derivatif dan S adalah harga saham (Hull, 2012).

2. Opsi

Opsi merupakan suatu jenis instrumen derivatif yang berbentuk surat pernyataan yang diterbitkan oleh seseorang atau lembaga yang memberikan pemegangnya suatu hak, tetapi bukan kewajiban, untuk membeli atau menjual suatu aset dasar dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu (Permata & Ghoni, 2019). Terdapat dua pihak yang terlibat dan sifatnya berlawanan dalam opsi. Pemegang atau pembeli opsi (*holder*) adalah investor yang membeli opsi dan memperoleh hak membeli atau menjual aset dasar setelah membayar harga opsi, dan penerbit atau penjual opsi (*writer*) adalah investor yang menerbitkan kontrak opsi dan menerima biaya untuk kontrak opsi, dan berkewajiban untuk melaksanakan opsi jika pemegangnya berkehendak (Chance & Brooks, 2021). Harga yang disepakati pada kontrak disebut harga pelaksanaan (*strike price*) dan waktu berlaku opsi pada kontrak dinamakan dengan waktu jatuh tempo (*expiration date*) (Hull, 2012).

Opsi dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu berdasarkan hak yang diberikan dan berdasarkan pelaksanaan. Berdasarkan hak yang diberikan, opsi dibedakan menjadi dua, yaitu opsi beli (*call option*), yang memberikan pemegang opsi hak untuk membeli suatu aset pada waktu tertentu dan harga tertentu, dan opsi jual (*put option*), yang memberikan pemegang opsi hak untuk menjual suatu aset pada waktu tertentu dan harga tertentu. Opsi berdasarkan pelaksanaan dibedakan menjadi dua, yakni opsi Eropa (*European option*), yaitu opsi yang hanya dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo dan opsi Amerika (*American option*), yaitu opsi yang dapat dilaksanakan pada setiap saat sampai jatuh tempo (Hull, 2012).

Harga atau nilai opsi dapat dinyatakan sebagai jumlahan antara nilai waktu opsi dan nilai instrinsik opsi. Nilai instrinsik opsi atau keuntungan (*payoff*) opsi,

yang bermakna sebagai maksimum di antara nol dan nilai suatu opsi ketika opsi tersebut segera dilaksanakan. Terdapat tiga jenis nilai opsi, yaitu *in the money* (pemegang opsi memperoleh keuntungan setelah melaksanakan opsi), *out of the money* (pemegang opsi merugi setelah melaksanakan opsi), dan *at the money* (pemegang opsi tidak untung atau rugi setelah melaksanakan opsi). Harga opsi dipengaruhi oleh beberapa faktor, yaitu harga saham (S), harga pelaksanaan (K), waktu jatuh tempo (T), tingkat suku bunga bebas risiko (r), tingkat volatilitas (σ), dan dividen (Hull, 2012).

Hubungan antara opsi beli dan opsi jual dapat dinyatakan dalam persamaan yang bernama *put-call parity*, dengan syarat saham yang tidak memberikan dividen, serta opsi beli Eropa dan opsi jual Eropa yang memiliki harga pelaksanaan dan waktu jatuh tempo yang sama. Persamaan *put-call parity* berbentuk

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0 \quad (2)$$

dengan C adalah harga opsi beli, P adalah harga opsi jual, dan S_0 adalah harga saham awal (Hull, 2012).

3. Model Black-Scholes

Fischer Black dan Myron Scholes mempublikasikan suatu metode penentuan harga opsi dalam *The Journal of Political Economy* yang berjudul "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*" pada tahun 1973. Model ini dinamakan model atau metode Black-Scholes. Black & Scholes (1973) menggunakan asumsi-asumsi berikut dalam penentuan harga opsi:

- a. Tingkat suku bunga bebas risiko (r) jangka pendek diketahui dan bernilai konstan. Pada dunia risiko netral, yaitu dunia para investor yang tidak meningkatkan ekspektasi imbal hasil dari suatu investasi terhadap peningkatan risiko yang mungkin terjadi, menganggap bahwa nilai r akan sama dengan μ , yaitu tingkat ekspektasi imbal hasil (Hull, 2012). Ekspektasi atau harapan imbal hasil adalah tingkat keuntungan yang diinginkan oleh investor sebagai kompensasi dari segala risiko yang mungkin dialami oleh investor (Suriyanti & Hamzah, 2024).
- b. Harga saham bergerak secara acak dan berdistribusi lognormal. Variansi imbal hasil dari harga saham konstan.
- c. Tidak ada dividen pada saham.
- d. Opsi yang digunakan adalah opsi Eropa.
- e. Tidak ada biaya transaksi saat membeli atau menjual saham atau opsi.
- f. Diperbolehkan bagi pembeli boleh membayar terlebih dahulu sebagian sekuritas/portofolio.
- g. Tidak ada penalti dalam *short selling*. *Short selling* adalah kegiatan seseorang membeli suatu aset (misalnya saham) dari pihak lain (penjual). Akan tetapi pihak tersebut belum tentu memiliki sahamnya, penjual bisa saja membelinya dari pihak lain lagi, contohnya *broker* (Chance & Brooks, 2021).

Berdasarkan asumsi-asumsi ini, Black dan Scholes menyebutkan harga opsi hanya akan bergantung pada harga saham, waktu, dan variabel yang dianggap konstan. Harga opsi pada model ini merupakan solusi dari suatu persamaan yang disebut persamaan diferensial Black-Scholes, yaitu persamaan yang harus dipenuhi oleh harga suatu instrumen derivatif pada saham tanpa dividen (Hull, 2012).

METODE PENELITIAN

Penelitian yang dilakukan dalam artikel ini adalah dengan cara studi literatur, yaitu bersumber pada artikel maupun buku yang relevan dengan penentuan harga opsi menggunakan metode Black-Scholes. Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menentukan harga saham jatuh tempo berdasarkan proses Wiener diperumum yang terbagi menjadi dua kasus yaitu kasus tanpa ketidakpastian (nilai ε sebagai faktor ketidakpastian adalah nol) dan kasus dengan ketidakpastian (nilai ε ada dan berperan dalam penentuan S_T).
2. Menunjukkan bahwa harga saham berdistribusi lognormal berdasarkan proses Wiener diperumum terhadap harga saham.
3. Membentuk persamaan diferensial Black-Scholes untuk opsi beli menggunakan proses harga saham dengan ketidakpastian, nilai suatu portofolio, dan Lemma Ito untuk opsi beli.
4. Menentukan harga opsi beli yang diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan diferensial Black-Scholes untuk opsi beli yang telah diperoleh.
5. Menentukan harga opsi jual menggunakan persamaan *put-call parity* berdasarkan harga opsi beli.
6. Melakukan simulasi perhitungan harga opsi beli dan opsi jual menggunakan metode Black-Scholes dan estimasi harga saham jatuh tempo dengan proses penentuan harga saham.
7. Membuat kesimpulan berdasarkan hasil penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Proses Penentuan Harga Saham

Harga saham dikatakan mengikuti proses Wiener diperumum (bentuk perumuman dari proses Wiener, yaitu suatu proses Markov, yaitu salah satu jenis proses stokastik, yang memiliki perubahan rata-rata nol dan variansi sebesar satu per tahun). Proses Wiener diperumum berbentuk sebagai berikut (Hull, 2012):

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (3)$$

dengan Δx adalah perubahan nilai variabel x , Δt adalah perubahan waktu, ε faktor ketidakpastian, dan a, b adalah konstanta (Hull, 2012).

Misalkan S_t adalah harga saham saat t , dan μ adalah tingkat ekspektasi imbal hasil (*return*). Ekspektasi imbal hasil saham dalam satu periode adalah μS_t , dan pada

interval Δt , ekspektasi imbal hasil saham menjadi $\mu S_t \Delta t$. Proses Wiener diperumum untuk harga saham menjadi

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (4)$$

dengan σ volatilitas, ε ketidakpastian. Berdasarkan nilai ε , maka dapat dibagi menjadi dua kasus penentuan harga saham, yaitu kasus tanpa ketidakpastian dan kasus dengan ketidakpastian (Hull, 2012). Pada kasus tanpa ketidakpastian, bermakna bahwa nilai ε pada Persamaan (4) adalah 0 sehingga

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t. \quad (5)$$

Ketika $\Delta t \rightarrow 0$ menjadi

$$\frac{1}{S_t} dS_t = \mu dt. \quad (6)$$

Persamaan (6) diintegrasikan terhadap waktu dengan interval 0 sampai T pada kedua ruas dan hasilnya menjadi

$$S_T = S_0 e^{\mu T}. \quad (7)$$

Kemudian pada kasus dengan ketidakpastian, bermakna bahwa nilai ε ada, volatilitas imbal hasil pada jangka waktu pendek sama, dan ketika $\Delta t \rightarrow 0$ Persamaan (4) menjadi

$$\frac{1}{S_t} dS_t = \mu dt + \sigma dz \quad (8)$$

dengan dz adalah proses Wiener yaitu Δz ketika Δt menuju 0, $\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$. Selanjutnya, harga saham merupakan variabel acak sehingga memungkinkan semua nilai menjadi harga saham. Akan tetapi, pada dunia nyata harga saham merupakan suatu nilai nonnegatif, dan pandang pula bentuk $\ln S_t$ pada pengerjaan integral pada kasus penentuan saham tanpa ketidakpastian yang dapat membantu, kemudian misalkan

$$F_{(S_t, t)} = \ln S_t. \quad (9)$$

Untuk menentukan perubahan nilai F pada jangka waktu yang pendek, dapat menggunakan Lemma Ito. Lemma Ito berperan untuk menghitung suatu proses stokastik oleh sebuah fungsi dengan variabel yang berproses stokastik juga dan diikuti oleh variabel itu sendiri. Lemma Ito untuk F dapat ditulis yaitu (Hull, 2012):

$$dF = \left(\mu S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial F}{\partial S_t} dz. \quad (10)$$

Bentuk-bentuk turunan parsial dari F dapat ditentukan, dan hasilnya menjadi

$$dF = \frac{1}{S_t} dS_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (11)$$

Persamaan (11) diintegrasikan terhadap waktu dengan interval 0 sampai T dan hasilnya adalah

$$S_T = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma z}. \quad (12)$$

Setelah berhasil menunjukkan solusi untuk S_T , selanjutnya telah diketahui bahwa dF adalah proses Wiener diperumum maka dF berdistribusi normal, dengan $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ tingkat imbal hasil dan σ^2 tingkat variansi (Hull, 2012). Hal ini bermakna perubahan $\ln S_t$ pada interval 0 sampai T juga berdistribusi normal, dengan $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$ tingkat imbal hasil dan $\sigma^2 T$ tingkat variansi, atau

$$\begin{aligned} \ln S_T - \ln S_0 &\sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \\ \ln S_T &\sim N \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right]. \end{aligned}$$

Sejalan dengan konsep distribusi lognormal, maka S_T berdistribusi lognormal (Hull, 2012).

2. Pembentukan Persamaan Diferensial Black-Scholes

Asumsikan proses harga saham S_t seperti Persamaan (4) dan bentuk diskritnya adalah sebagai berikut (Hull, 2012):

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z. \quad (13)$$

Misalkan suatu instrumen derivatif yaitu opsi beli dengan $C(S_t, t)$ harga opsi beli. Fungsi C dapat memenuhi Lemma Ito sehingga Lemma Ito untuk opsi beli adalah

$$dC = \left(\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dz$$

dan bentuk diskritnya adalah

$$\Delta C = \left(\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} \Delta z. \quad (14)$$

Nilai suatu portofolio terdapat pada Persamaan (1). Jika instrumen derivatifnya adalah opsi beli, maka menjadi

$$G = -C + S \frac{\partial C}{\partial S}. \quad (15)$$

Pada jangka waktu Δt , nilai portofolionya adalah

$$\Delta G = -\Delta C + \Delta S \frac{\partial C}{\partial S}. \quad (16)$$

Substitusi Persamaan (13) dan (14) ke Persamaan (16) dan penyederhanaannya menjadi

$$\Delta G = \left(-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta t. \quad (17)$$

Hal ini menunjukkan bahwa ΔG tidak lagi bergantung terhadap Δz , atau imbal hasil portofolio akan seperti kasus saham tanpa ketidakpastian, dan tidak ada lagi risiko dalam melakukan investasi. Gunakan nilai r sebagai imbal hasil dalam portofolio karena asumsi $\mu = r$ dan diperoleh

$$\Delta G = rG\Delta t. \quad (18)$$

Substitusi Persamaan (15) dan (16) ke Persamaan (18) dan diperoleh

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC. \quad (19)$$

Persamaan (19) inilah yang disebut persamaan diferensial Black-Scholes (Hull, 2012). Jika dikaitkan dengan asumsi oleh Black & Scholes, maka opsi yang digunakan adalah opsi Eropa, dan keuntungan dari opsi beli tipe Eropa menjadi syarat dari persamaan di atas, yaitu $C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$ (Hull, 2012). Dapat pula dibentuk syarat batas untuk Persamaan (19) berdasarkan keuntungan opsi beli, yaitu ketika $S_t = 0$ maka $C(0, t) = 0$ dan ketika $S_t = S$, dengan $S \rightarrow \infty$ maka $C(S, t) \sim S$. Solusi yang diperoleh dari Persamaan (19) akan menjadi harga opsi beli pada model atau metode Black-Scholes.

3. Penentuan Harga Opsi Beli dan Opsi Jual

Untuk menyelesaikan Persamaan (17), definisikan fungsi $v(x, \tau)$ dengan $x = \ln \frac{S}{K}$ dan $\tau = (T - t) \frac{1}{2} \sigma^2$ sebagai nilai sekarang/nilai tunai (nilai yang dimiliki sekarang dan berpotensi menjadi lebih besar di masa mendatang) (Mardiyanti, 2023) dari harga pelaksanaan sebesar K dalam harga opsi beli $C(S_t, t)$, akibatnya dapat ditulis sebagai berikut (Susanti & Devianto, 2014):

$$C(S_t, t) = Kv(x, \tau). \quad (20)$$

Syarat pada Persamaan (19) menjadi $C(S_t, t) = K \max(e^x - 1, 0)$. Selanjutnya hasil dari bentuk turunan yang terdapat pada Persamaan (19) berdasarkan nilai x dan τ dapat ditentukan dan substitusi ke Persamaan (19) sehingga diperoleh

$$-\frac{K\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + rS \left(\frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(-\frac{K}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = rC. \quad (21)$$

Persamaan (21) disederhanakan hingga menjadi

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \quad (22)$$

dengan $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ dan $v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0)$. Selanjutnya, misalkan harga pelaksanaan yaitu $v(x, \tau)$ dinyatakan dalam bentuk berikut

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau). \quad (23)$$

Turunan dari Persamaan (22) berdasarkan Persamaan (23) dapat ditentukan. Kemudian turunannya disubstitusi kembali ke Persamaan (22) dan hasil penyederhanaannya berbentuk

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} (2\alpha + k - 1) + u(\alpha^2 + k\alpha - \alpha - k - \beta). \quad (24)$$

Langkah selanjutnya adalah membentuk persamaan panas, yaitu persamaan yang berbentuk $\frac{\partial u}{\partial \tau} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, dengan k adalah konstanta (Beerends *et al.*, 2003). Hal ini bermakna bahwa $2\alpha + k - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{(k-1)}{2}$ dan $\alpha^2 + k\alpha - \alpha - k - \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{(k+1)^2}{2}$. Substitusi nilai α dan β ke Persamaan (24) dan menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (25)$$

Nilai awal untuk Persamaan (25) yaitu $u(x, 0)$ dapat diperoleh berdasarkan nilai awal $v(x, 0)$, yaitu

$$u(x, 0) = \max \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0 \right) = f(x).$$

Syarat batas Persamaan (25) diperoleh dengan syarat batas Persamaan (19) yaitu pada $S_t = 0$ dan $S_t = S$, dengan $S \rightarrow \infty$. Akibatnya diperoleh ketika $S = 0$, maka $x = \ln \left(\frac{0}{K} \right) \rightarrow -\infty$ dan $u(x, \tau) \rightarrow 0$, sedangkan ketika $S_t = S$ maka $x = \ln \left(\frac{S}{K} \right) \rightarrow \infty$ dan $u(x, \tau) \sim e^{\frac{1}{2}(k+1)x}$. Berdasarkan masalah persamaan panas, solusinya dapat ditentukan dengan metode pemisahan variabel dan berbentuk $u(x, \tau) = X(x)T(\tau)$ (Beerends *et al.*, 2003). Solusi untuk $X(x)$ dapat diselesaikan karena merupakan masalah Sturm-Liouville (Ross, 2004). Akhirnya solusi Persamaan (25) berupa

$$u(x, \tau; p) = (A \cos px + B \sin px) e^{-p^2 \tau} \quad (26)$$

dengan $A = c_1 d$ dan $B = c_2 d$. Untuk mengevaluasi nilai p , Persamaan (26) dapat ditulis menjadi

$$u(x, \tau) = \int_0^\infty (A(p) \cos px + B(p) \sin px) e^{-p^2 \tau} dp \quad (27)$$

dengan

$$u(x, 0) = \int_0^\infty (A(p) \cos px + B(p) \sin px) dp = f(x) \quad (28)$$

adalah bentuk dari integral Fourier (Susanti & Devianto, 2014). Akibatnya nilai A dan B menjadi

$$A(p) = \int_{-\infty}^\infty f(w) \cos pw dw$$

$$B(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \sin pw \, dw$$

$$f(w) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)w} - e^{\frac{1}{2}(k-1)w}, 0)$$

Nilai $A(p)$ dan $B(p)$ disubstitusi ke Persamaan (27) dan disederhanakan hingga menjadi

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \int_0^{\infty} \cos(p(w-x)) e^{-p^2 \tau} \, dp \, dw.$$

Misalkan $u^2 = p^2 \tau$, maka $dp = \frac{1}{\sqrt{\tau}} du$. Kemudian misalkan pula $a = \frac{w-x}{\sqrt{\tau}}$ diperoleh $p(w-x) = 2au$, dengan menggunakan permisalan ini maka diperoleh

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\pi\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cos(2au) \, du \, dw. \quad (29)$$

Selanjutnya dengan menggunakan formula de Moivre (Brown & Churchill, 2009), teorema integral Cauchy (Brown & Churchill, 2009) dan integral Gauss (Beerends *et al.*, 2003) menghasilkan

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{-\frac{(x-w)^2}{4\tau}} \, dw. \quad (30)$$

Persamaan (30) diuraikan dengan memasukkan nilai $f(w)$

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)w - \frac{1}{4\tau}(x-w)^2} \, dw - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)w - \frac{1}{4\tau}(x-w)^2} \, dw$$

$$= I_1 - I_2.$$

Lakukan penyederhanaan sedemikian sehingga I_1 dan I_2 menjadi

$$I_1 = e^{\frac{2x(k+1) + \tau(k+1)^2}{4}} N(d_1)$$

$$I_2 = e^{\frac{2x(k-1) + \tau(k-1)^2}{4}} N(d_2)$$

dengan

$$d_1 = \frac{x + \tau(k+1)}{\sqrt{2\tau}}$$

$$d_2 = \frac{x + \tau(k-1)}{\sqrt{2\tau}}.$$

$N(d_1)$ dan $N(d_2)$ adalah nilai fungsi distribusi kumulatif (CDF) normal baku untuk d_1 dan d_2 . CDF diperoleh dengan cara menjumlahkan seluruh peluang variabel acak X untuk setiap nilai x , atau ditulis $F(x) = P(X \leq x)$ (Devore & Berk, 2012). Selanjutnya substitusi I_1 dan I_2 ke $u(x, \tau)$ yang menjadi

$$u(x, \tau) = e^{\frac{2x(k+1)+\tau(k+1)^2}{4}} N(d_1) - e^{\frac{2x(k-1)+\tau(k-1)^2}{4}} N(d_2). \quad (31)$$

Kemudian $u(x, \tau)$ disubstitusikan ke Persamaan (23) yaitu $v(x, \tau)$

$$v(x, \tau) = e^x N(d_1) - e^{-k\tau} N(d_2). \quad (32)$$

Substitusi pula nilai $v(x, \tau)$ ke Persamaan (20) yaitu harga opsi beli

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2).$$

Ketika kontrak opsi ditandatangani saat $t = 0$ maka nilai C menjadi

$$C(S_0, t) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2). \quad (33)$$

Substitusi juga nilai x dan τ untuk d_1 dan d_2

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + T(r + \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + T(r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Terakhir, untuk memperoleh harga opsi jual berdasarkan harga opsi beli yaitu dengan menggunakan persamaan *put-call parity* yang menghasilkan

$$P(S_0, 0) = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \quad (34)$$

4. Simulasi Kontrak Opsi Beli dan Opsi Jual

4.1. Simulasi Kontrak Opsi Beli

Pada kasus ini akan diberikan simulasi perhitungan kontrak opsi beli yang disertai juga dengan perhitungan harga saham saat jatuh tempo dan perubahan parameter yang terjadi baik pada harga saham maupun harga opsi.

Bapak A yang berprofesi sebagai penerbit opsi, menawarkan Ibu B menjadi pemegang opsi dalam sebuah kontrak opsi beli tipe Eropa terhadap saham PT. PQR sebanyak 1 lot (100 lembar) dengan harga opsi dan harga pelaksanaan berturut-turut sebesar Rp440,- dan Rp5.000,- per lembar. Ibu B ingin mengestimasi harga opsi dengan metode Black-Scholes untuk memastikan apakah kontrak tersebut adil dan layak dibelinya. Diketahui pada saat itu harga saham awal sebesar Rp5.200,- per lembar, tingkat suku bunga bebas risiko 5%, tingkat volatilitas sebesar 30%, dan waktu jatuh tempo selama 3 bulan atau 90 hari. Tentukan:

- Estimasi harga opsi beli;
- Interpretasikan kemungkinan nilai S_T terhadap kontrak Bapak A dan Ibu B;
- Peluang Ibu B mendapatkan keuntungan paling sedikit Rp200,- per lembar saham dalam kontrak opsi tersebut;
- Hitung peluang S_T ketika terjadi perubahan kondisi berikut: T menjadi 180 dan 365 hari; r menjadi 3% dan 10%; dan σ menjadi 20% dan 40%;

- e. Hitung harga opsi ketika terjadi perubahan kondisi berikut: T menjadi 180 dan 365 hari; S_0 menjadi Rp4.500,- per lembar; r menjadi 10%; σ menjadi 20%; dan K menjadi Rp4.700,-.

Penyelesaian:

- a. Diketahui bahwa $C = 440, K = 5000, S_0 = 5200, r = 0,05, \sigma = 0,3$, dan $T = \frac{90}{365} = 0,2466$. Langkah pertama dalam menggunakan metode Black-Scholes adalah menentukan nilai d_1 dan d_2 , dan diperoleh $d_1 = 0,4205$ dan $d_2 = 0,2716$. Kemudian tentukan nilai CDF dari d_1 dan d_2 yakni $N(0,4205) = 0,6629$ dan $N(0,2716) = 0,6070$. Substitusi nilai ini ke dalam harga opsi beli yang menghasilkan $C = 449,4328$. Berdasarkan hasil tersebut, harga opsi Rp449,43,- per lembar saham merupakan batas tertinggi dari suatu kontrak dianggap adil, dan karena harga yang ditawarkan Bapak A adalah Rp440,- per lembar, maka Ibu B direkomendasikan untuk membeli kontrak opsi tersebut.
- b. Untuk mengestimasi nilai S_T dapat menggunakan model harga saham dengan ketidakpastian yang terdapat pada Persamaan (12), dan diperoleh $S_T = 5200 \cdot e^{0,0012+0,3z}$. Nilai z dapat dihasilkan dengan fitur *Random Number Generation* pada Microsoft Excel dan hasilnya adalah 0,9685. Akibatnya estimasi S_T menjadi Rp6.961,76,-. Kemudian untuk mengetahui nilai S_T dalam bentuk interval dengan selang kepercayaan 97,5% maka tentukan rata-rata, variansi, dan standar deviasinya seperti berikut: $\mu_{\ln S_T} = 8,5576$; $\sigma_{\ln S_T}^2 = 0,0222$; $\sigma_{\ln S_T} = 0,1490$. Kemudian dikarenakan selang kepercayaan yang digunakan adalah 97,5%, maka nilai $\alpha = 0,025$ dan $z_\alpha = 1,96$. Berdasarkan konsep opsi beli, maka yang hendak diketahui nilainya adalah batas bawah S_T , akibatnya interval nilai S_T adalah pada $P[S_T > 3888,07] = 0,975$. Dengan selang kepercayaan 97,5%, maka estimasi nilai S_T PT. PQR berada di atas Rp3.888,07,- per lembar. Ibu B akan berada dalam kondisi *in the money* ketika $S_T > 5440$ dan *at the money* saat $S_T = 5440$, sedangkan kondisi *out of the money* dialami Ibu B pada saat $3888,07 < S_T < 5440$. Meskipun demikian, Ibu B tetap disarankan untuk melaksanakan opsi ketika $5000 < S_T < 5440$ untuk meminimalkan kerugian.
- c. Untuk menentukan peluang Ibu B mendapat keuntungan minimal Rp200,- bermakna bahwa nilai S_T haruslah di atas jumlahan antara harga pelaksanaan, harga opsi beli, dan keuntungan yang diinginkan, yaitu sebesar Rp5.640,-. Lakukan transformasi ke distribusi normal baku dan hasil peluangnya adalah sebesar 29,56%. Nilai ini tergolong cukup rendah dan berisiko bagi Ibu B untuk melaksanakan opsinya di masa depan dengan keuntungan yang diinginkannya. Meskipun demikian, Ibu B bisa saja tetap melanjutkan kontrak dengan menganggap bahwa berinvestasi dalam opsi tidak akan membuatnya rugi terlalu besar.
- d. Berikut adalah hasil perhitungan sesuai dengan perubahan kondisi:

Tabel 1. Perubahan Parameter Terhadap Peluang S_T Kasus 4.1

Parameter	Nilai Baru	$P[S_T \geq 5640]$
T	180 hari	35,43%
	365 hari	39,97%
r	3%	28,43%
	10%	32,48%
σ	20%	22,86%
	40%	32,77%

Berdasarkan hasil di atas, dapat disimpulkan bahwa semakin lama waktu jatuh tempo yang ditawarkan penerbit opsi (Bapak A), maka peluang pemegang opsi (Ibu B) mendapatkan keuntungan yang diinginkan semakin besar. Hal yang sama juga ditunjukkan oleh tingkat suku bunga bebas risiko dan tingkat volatilitas, yaitu semakin besar nilai yang diketahui, maka peluang harga saham jatuh tempo sesuai dengan yang diinginkan akan semakin membesar pula.

- e. Berikut disajikan harga opsi dengan perubahan kondisi:

Tabel 2. Perubahan Parameter Terhadap Harga Opsi Beli Kasus 4.1

Parameter	Nilai baru	Harga opsi beli
T	180 hari	Rp602,83,-
	365 hari	Rp841,33,-
S_0	Rp4.500,-	Rp113,63,-
r	10%	Rp487,12,-
σ	20%	Rp357,82,-
K	Rp4.700,-	Rp651,57,-

Berdasarkan hasil di atas, dapat diinterpretasikan bahwa semakin lama waktu jatuh tempo, maka harga opsi beli yang harus dibayar menjadi semakin tinggi yang disebabkan oleh semakin banyak risiko yang perlu ditanggung oleh penerbit (Bapak A) dalam kontrak tersebut, begitu pula dengan tingkat volatilitas. Kemudian ketika harga saham berada di bawah harga pelaksanaan, harga opsi turun drastis. Hal ini dikarenakan penerbit opsi merasa tidak memiliki risiko besar dalam membuat kontrak, sedangkan terhadap pemegang opsi (Ibu B) terdapat kemungkinan harga saham jatuh tempo tidak mencapai harga pelaksanaan, dan hal sebaliknya terjadi jika harga pelaksanaan jauh di bawah harga saham awal. Selanjutnya ketika tingkat suku bunga bebas risiko naik, harga opsi turut naik terkait dengan ekspektasi imbal hasil saham yang lebih besar.

Dapat pula ditarik kesimpulan sebagai pertimbangan bagi pemegang opsi sebelum memulai kontrak opsi beli. Sebagai contoh terhadap parameter waktu jatuh tempo (T) dalam soal ini, meskipun peluang Ibu B untuk

memperoleh keuntungan semakin besar dengan nilai T yang membesar, akan tetapi harga opsi yang ditawarkan penerbit juga akan semakin besar. Oleh sebab itu, pemegang opsi dapat memilih kontrak opsi dengan waktu jatuh tempo yang pendek untuk memperkecil modal yang perlu dikeluarkan dan tetap memiliki peluang memperoleh keuntungan sesuai dengan yang diinginkan.

4.2. Simulasi Kontrak Opsi Jual

Pada kasus ini akan diberikan simulasi perhitungan kontrak opsi jual yang disertai juga dengan perhitungan harga saham saat jatuh tempo dan perubahan parameter yang terjadi baik pada harga saham maupun harga opsi.

Ibu C yang berprofesi sebagai penerbit opsi, menawarkan Bapak D menjadi pemegang opsi dalam sebuah kontrak opsi jual tipe Eropa terhadap saham PT. XYZ sebanyak 1 lot (100 lembar) dengan harga opsi dan harga pelaksanaan berturut-turut sebesar Rp230,- dan Rp7.000,- per lembar. Bapak D ingin mengestimasi harga opsi dengan metode Black-Scholes untuk memastikan apakah kontrak tersebut adil dan layak membelinya. Diketahui pada saat itu harga saham awal sebesar Rp6.900 per lembar, tingkat suku bunga bebas risiko 10%, tingkat volatilitas sebesar 20%, dan waktu jatuh tempo selama 3 bulan atau 90 hari. Tentukan:

- Estimasi harga opsi jual;
- Interpretasikan kemungkinan nilai S_T terhadap kontrak Ibu C dan Bapak D;
- Peluang Bapak D mendapatkan keuntungan paling sedikit Rp100,- per lembar saham dalam kontrak opsi tersebut;
- Hitung peluang S_T ketika terjadi perubahan kondisi berikut: T menjadi 180 dan 365 hari; r menjadi 5% dan 15%; dan σ menjadi 10% dan 30%;
- Hitung harga opsi ketika terjadi perubahan kondisi berikut: T menjadi 180 dan 365 hari; S_0 menjadi Rp7.500,- per lembar; r menjadi 5%; σ menjadi 30%; dan K menjadi Rp6.500,-.

Penyelesaian:

- Diketahui bahwa $P = 230, K = 7000, S_0 = 6900, r = 0,1, \sigma = 0,2$, dan $T = \frac{90}{365} = 0,2466$. Langkah pertama dalam menggunakan metode Black-Scholes adalah menentukan nilai d_1 dan d_2 , dan diperoleh $d_1 = 0,1531$ dan $d_2 = 0,0537$. Kemudian tentukan nilai CDF dari $-d_1$ dan $-d_2$ yakni $N(-0,1531) = 0,4392$ dan $N(-0,0537) = 0,4786$. Substitusi nilai ini ke dalam harga opsi jual yang menghasilkan $P = 238,0748$. Berdasarkan hasil tersebut, harga opsi Rp238,07,- per lembar saham merupakan batas tertinggi dari suatu kontrak dianggap adil, dan karena harga yang ditawarkan Ibu C adalah Rp230,- per lembar, maka Bapak D direkomendasikan untuk membeli kontrak opsi tersebut.
- Untuk mengestimasi nilai S_T dapat menggunakan model harga saham dengan ketidakpastian yang terdapat pada Persamaan (12), dan diperoleh $S_T = 6900 \cdot e^{0,0197+0,2z}$. Nilai z dapat dihasilkan dengan fitur *Random Number*

Generation pada Microsoft Excel dan hasilnya adalah -0,3639. Akibatnya estimasi S_T menjadi Rp6.543,41,-. Kemudian untuk mengetahui nilai S_T dalam bentuk interval dengan selang kepercayaan 97,5% maka tentukan rata-rata, variansi, dan standar deviasinya seperti berikut: $\mu_{\ln S_T} = 8,8590$; $\sigma_{\ln S_T}^2 = 0,0099$; $\sigma_{\ln S_T} = 0,0993$. Kemudian dikarenakan selang kepercayaan yang digunakan adalah 97,5%, maka nilai $\alpha = 0,025$ dan $z_\alpha = 1,96$. Berdasarkan konsep opsi jual, maka yang hendak diketahui nilainya adalah batas atas S_T , akibatnya interval nilai S_T adalah pada $P[S_T < 8549,74] = 0,975$. Dengan selang kepercayaan 97,5%, maka estimasi nilai S_T PT. XYZ berada di bawah Rp8.549,74,- per lembar. Bapak D akan berada dalam kondisi *in the money* ketika $S_T < 6770$ dan *at the money* saat $S_T = 6770$, sedangkan kondisi *out of the money* dialami Bapak D pada saat $6770 < S_T < 7000$. Meskipun demikian, Bapak D tetap disarankan untuk melaksanakan opsi ketika $6770 < S_T < 7000$ untuk meminimalkan kerugian.

- c. Untuk menentukan peluang Bapak D mendapat keuntungan minimal Rp100,- bermakna bahwa nilai S_T haruslah di bawah selisih antara harga pelaksanaan, harga opsi jual, dan keuntungan yang diinginkan, yaitu sebesar Rp6.670,-. Lakukan transformasi ke distribusi normal baku dan hasil peluangnya adalah sebesar 29,46%. Nilai ini tergolong cukup rendah dan berisiko bagi Bapak D untuk melaksanakan opsinya di masa depan dengan keuntungan yang diinginkannya. Meskipun demikian, Bapak D bisa saja tetap melanjutkan kontrak dengan menganggap bahwa berinvestasi dalam opsi tidak akan membuatnya rugi terlalu besar.
- d. Berikut adalah hasil perhitungan sesuai dengan perubahan kondisi:

Tabel 3. Perubahan Parameter Terhadap Peluang S_T Kasus 4.2

Parameter	Nilai baru	$P[S_T \leq 6670]$
T	180 hari	30,07%
	365 hari	28,45%
r	5%	33,88%
	15%	25,33%
σ	10%	12,41%
	30%	37,50%

Berdasarkan hasil di atas, dapat disimpulkan bahwa waktu jatuh tempo terbaik agar Bapak D mendapatkan keuntungan yang diinginkannya adalah 180 hari. Pada tingkat suku bunga bebas risiko, semakin besar nilainya maka semakin kecil peluang Bapak D mendapatkan keuntungan yang dikehendaknya. Hal ini terbalik dengan tingkat volatilitas, semakin besar nilai yang diketahui, maka peluang harga saham jatuh tempo sesuai dengan yang diinginkan akan semakin membesar pula.

- e. Berikut disajikan harga opsi dengan perubahan kondisi:

Tabel 4. Perubahan Parameter Terhadap Harga Opsi Jual Kasus 4.2

Parameter	Nilai baru	Harga opsi jual
T	180 hari	Rp272,91,-
	365 hari	Rp291,38,-
S_0	Rp4.500,-	Rp65,88,-
r	10%	Rp280,72,-
σ	20%	Rp373,32,-
K	Rp4.700,-	Rp72,24,-

Berdasarkan hasil di atas, dapat diinterpretasikan bahwa semakin lama waktu jatuh tempo, maka harga opsi jual yang harus dibayar menjadi semakin tinggi yang disebabkan oleh semakin banyak risiko yang perlu ditanggung oleh penerbit (Ibu C) dalam kontrak tersebut, begitu pula dengan tingkat volatilitas. Kemudian ketika harga saham berada di atas harga pelaksanaan, harga opsi turun drastis. Hal ini dikarenakan penerbit opsi merasa tidak memiliki risiko besar dalam membuat kontrak, sedangkan terhadap pemegang opsi (Bapak D) terdapat kemungkinan harga saham jatuh tempo tidak berada di bawah harga pelaksanaan, dan hal sebaliknya terjadi jika harga pelaksanaan jauh di bawah harga saham awal. Selanjutnya ketika tingkat suku bunga bebas risiko turun, harga opsi turut naik terkait dengan ekspektasi imbal hasil saham yang lebih kecil.

Dapat pula ditarik kesimpulan sebagai pertimbangan bagi pemegang opsi sebelum memulai kontrak opsi jual. Sebagai contoh terhadap parameter waktu jatuh tempo (T) dalam soal ini, peluang terbesar Bapak D memperoleh keuntungan sesuai yang diinginkannya terdapat pada saat T selama 180 hari atau 6 bulan, serta harga opsi yang harus dibayar juga tidak terlalu besar dibandingkan saat T selama 365 hari atau satu tahun. Oleh sebab itu, pemegang opsi dapat mempertimbangkan bahwa perlu memilih kontrak opsi dengan waktu jatuh tempo yang tidak terlalu cepat dan tidak terlalu lama agar tepat mengeluarkan modal dalam memperoleh keuntungan.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan maka dapat ditarik kesimpulan bahwa pembentukan persamaan diferensial Black-Scholes berdasarkan model harga saham dengan ketidakpastian, Lemma Ito untuk opsi beli, dan nilai portofolio bertujuan agar memperoleh solusi atau harga opsi beli ketika persamaan tersebut diselesaikan. Persamaan diferensial Black-Scholes untuk opsi beli $C(S_t, t)$ adalah $\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC$, dengan keuntungan opsi beli menjadi syarat persamaan di atas, yaitu $C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$. Solusi dari persamaan diferensial Black-Scholes untuk opsi beli yaitu berbentuk $C(S_0, 0) = S_0 N(d_1) -$

$Ke^{-rT}N(d_2)$ dengan $d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + T(r + \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T}}$ dan $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Selanjutnya harga opsi jual pada metode Black-Scholes dapat dicari dengan menggunakan persamaan *put-call parity* berdasarkan harga opsi beli. Bentuk dari harga opsi jual adalah $P(S_0, 0) = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$ dengan d_1 dan d_2 memiliki nilai yang sama seperti pada opsi beli. Terakhir, simulasi perhitungan harga opsi beli dan opsi jual bertujuan untuk melihat apakah kontrak yang ditawarkan oleh penerbit opsi adil terhadap pemegang opsi. Estimasi harga opsi dapat dilakukan salah satunya dengan menggunakan metode Black-Scholes, dan harga opsi yang diperoleh merupakan batas tertinggi suatu kontrak dikatakan adil dan layak dibeli oleh pemegang opsi.

REFERENSI

- Beerends, R. J., ter Morsche, H. G., van den Berg J C, & van de Vrie E M. (2003). *Fourier and Laplace Transforms*. Cambridge University Press.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*. Vol. 81(3), 637–654.
- Brown, J. Ward., & Churchill, R. V. (2009). *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill Higher Education.
- Chance, D. M., & Brooks, R. (2021). *Introduction to Derivatives and Risk Management*. Cengage Learning.
- Chauhan, A., & Gor, R. (2021). Black-Scholes Option Pricing Model and Its Relevancy in Indian Options Market: A Review. *IOSR Journal of Economics and Finance*. Vol. 12, 1–07.
- Chowdhury, R., Mahdy, M. R. C., Alam, T. N., Dastegir, G., & Quaderi, A. (2020). Predicting the Stock Price of Frontier Markets Using Modified Black-Scholes Option Pricing Model and Machine Learning. *Physica A: Statistical Mathematics and its Applications*. Vol. 555.
- Devore, J. L., & Berk, K. N. (2012). *Modern Mathematical Statistics with Applications* (2nd ed.).
- Felisiah, E., & Yanti Natalia, E. (2022). Analisis Pengetahuan Investasi, Return Investasi dan Motivasi Investasi Terhadap Minat Investasi Mahasiswa Akuntansi Kota Batam. *Transekonomika*. Vol. 2(1), 29–44.
- Hull, J C. (2012). *Options, Futures, and Other Derivatives* (8th ed.). Prentice Hall.
- Mardiyanti, E. (2023). Matematika dan Kecerdasan Finansial: Memahami Matematika Sebelum Berwirausaha. *JPPN: Jurnal Penyuluhan dan Pemberdayaan Masyarakat*. Vol. 2(2), 1–10.
- Morales-Bañuelos, P., Muriel, N., & Fernández-Anaya, G. (2022). A Modified Black-Scholes-Merton Model for Option Pricing. *Mathematics*. Vol 10(9).
- Puspa Permata, C., & Ghoni, M. A. (2019). Peranan Pasar Modal dalam Perekonomian Negara Indonesia. *Jurnal AkunStie (JAS)*. Vol. 5(2).
- Ross, S. L. (2004). *Differential Equations* (3rd ed.). John Wiley & Sons, Inc.

- Sinaga, M. H., Tarigan, W. J., & Saragih, M. (2022). Pengukuran Kinerja Portofolio Investasi dengan Menggunakan Indeks Sharpe pada Emiten Sektor Transportasi dan Logistik yang Terdaftar Di Bursa Efek Indonesia Sebelum Dan Selama Masa Pandemi Covid - 19. *Owner: Riset & Jurnal Akuntans*. Vol. 6(4), 3541–3552.
- Suriyanti, & Hamzah, F. F. (2024). *Teori Portofolio dan Analisis Investasi*. Eureka Media Utama.
- Susanti, D., & Devianto, D. (2014). Penurunan Model Black-Scholes dengan Persamaan Diferensial Stokastik untuk Opsi Tipe Eropa. *Jurnal Matematika UNAND*. Vol. 3(1), 17–26.