Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.18 No.1 (Juni 2024) Hal. 99-108

SIFAT ELEMENTER DARI RING TERGENERALISASI

Gusti Muhammad Rosyadi, Na'imah Hijriati

Program Studi Matematika Fakultas MIPA, Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
Email: *2011011110011@mhs.ulm.ac.id*

ABSTRACT

Ring is a study of algebraic structures, which is defined as a non-empty set containing two binary operations. Regarding the first binary operation, the set is a group, and the second binary operation is a semigroup, and both operations fulfill the left distributive and right distributive properties. The generalized ring concept is an extension of the ring concept, namely that for the first binary operation, each element has an identity element that is not necessarily the same. This research aims to prove the elementary properties of generalized rings and the properties of generalized rings associated with the *G*-ring structure. Furthermore, this research also proves the properties of subsets related to identity elements in generalized rings. The results of this research are that the fundamental properties of the generalized ring are valid, which are analogous to the fundamental properties of the ring, and sufficient conditions for a generalized ring to be a *G*-ring are obtained. Furthermore, if the generalized ring has a unit element, it forms an abelian group with all elements having the same identity, and the generalized ring contains all identity elements.

Keywords: *Generalized Ring, G-Ring, Identity Elements.*

ABSTRAK

Ring merupakan suatu kajian pada aljabar yang memiliki definisi sebagai himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner. Terhadap operasi biner pertama, himpunan tersebut merupakan grup, dan operasi biner kedua semigrup, serta kedua operasi memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan. Konsep ring tergeneralisasi merupakan perluasan dari konsep ring, yakni terhadap operasi biner pertama, setiap elemennya memiliki elemen identitas yang belum tentu sama. Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan sifat-sifat elementer dari ring tergeneralisasi dan membuktikan sifat-sifat ring tergeneralisasi yang dikaitkan dengan struktur *G*-ring. Lebih lanjut, penelitian ini juga membuktikan sifat dari himpunan bagian yang berkaitan dengan elemen identitas pada ring tergeneralisasi. Hasil dari penelitian ini adalah berlakunya sifat-sifat fundamental dari ring tergeneralisasi yang analog dari sifat fundamental pada ring dan diperoleh syarat cukup suatu ring tergeneralisasi merupakan suatu *G*-ring. Lebih lanjut, jika ring tergeneralisasi tersebut memiliki elemen satuan, dapat dibentuk suatu grup abelian yang seluruh elemennya memiliki identitas yang sama dan ring tergeneralisasi dengan anggotanya berupa kumpulan elemen identitas.

Kata kunci: *Ring Tergeneralisasi, G-Ring, Elemen Identitas.*

Received: 30 Mei 2024, Accepted: 31 Juli 2024, Published: 31 Juli 2024

PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan suatu kajian pada matematika yang berkaitan dengan operasi dasar pada matematika. Topik ini menjelaskan tentang himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner atau lebih. Struktur aljabar

yang dikenal sederhana diantaranya grupoid, semigrup, serta monoid. Himpunan tak kosong dengan operasi biner disebut sebagai grupoid. Grupoid dengan operasi biner memiliki sifat asosiatif disebut sebagai semigrup. Sedangkan semigrup yang setiap elemennya memiliki elemen identitas disebut dengan monoid. Lebih lanjut, apabila suatu monoid memiliki invers disebut dengan grup. Dengan kata lain, grup merupakan suatu himpunan tak kosong yang memiliki satu operasi biner dan memiliki sifat tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas dan setiap elemen memiliki elemen invers.

Pada struktur aljabar terdapat struktur yang lain yakni ring yang didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong yang memuat dua operasi biner. Ring terhadap operasi pertama memenuhi seluruh aksioma pada grup. Kemudian, pada operasi kedua memenuhi seluruh aksioma pada semigrup, serta kedua operasi memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan (Sen & Dasgupta, 2010). Berdasarkan pada definisi grup dan ring tersebut diketahui bahwa setiap elemen pada grup memiliki elemen identitas yang sama. Namun terdapat suatu himpunan yang memiliki sifat tertutup, asosiatif, setiap elemen memiliki elemen invers, tetapi memiliki elemen identitas belum tentu sama untuk setiap elemennya. Elemen identitas tersebut bergantung pada setiap elemennya. Kajian tersebut disebut dengan grup tergeneralisasi atau semigrup lengkap sederhana (Fatehi & Molaei, 2012) dan (Molaei, 2005). Kajian ini pertama kali dikemukakan oleh Molaei pada tahun 1999 yang salah satunya diaplikasikan pada bidang geometri seperti yang dijelaskan oleh (Molaei & Farhangdost, 2009) dan (Molaei *et al*., 2006) serta diaplikasikan juga pada bidang sistem dinamik yang pernah dijabarkan oleh (Molaei, 2006). Selain itu, kajian ini banyak diapliakaikan juga pada teori modul (Mustafa *et al*., 2017) dan (Romeo & Sneha, 2020). Kemudian diaplikasikan juga pada pembentukan topologi (Nazari *et al*., 2019) dan ruang atas (Ebrahimi, 2014) dan (Maleki & Molaei, 2015) yang kemudian diterapkan pada teori modul (Mustafa, 2020). Grup tergeneralisasi juga menjadi dasar dalam pembentukan *g*-grup (Caraquil & Baldado, 2020) dan hypergrup tergeneralisasi (Poursalavati, 2020) serta intuitionistik grup *fuzzy* tergeneralisasi (Cuvalcioglu *et al*., 2016).

Konsep mengenai grup tergeneralisasi banyak dikemukakan oleh beberapa peneliti diantaranya adalah Toyin & Akinmoyewa (2009) mengenai subgrup dan subgrup normal tergeneralisasi, Adeniran *et al*., (2009) mengenai beberapa sifat aljabar pada grup tergeneralisasi, Aldwoah (2021) mengenai konsep grup tergeneralisasi dan ring tergeneralisasi.

Konsep ring tergeneralisasi merupakan konsep ring yang operasi pertamanya merupakan grup tergeneralisasi. Konsep ring tergeneralisasi pertama kali diperkenalkan oleh Molaei pada tahun 2005 yang menjelaskan tentang sifat elementer ring tergeneralisasi dan homomorfisma ring tergeneralisasi. Kemudian penelitian ini dilanjutkan pada 2012 oleh Molaei dan Fatehi, yang meneliti tentang penerapan konsep ring tergeneralisasi pada *G*-Ring yakni memenuhi $\boldsymbol{e_{x+y} = e_x +}$

$\boldsymbol{e_y}$ dan $\boldsymbol{e_{xy} = e_x e_y}$, dan meneliti tentang *g*-ideal yang merupakan himpunan kernel terhadap suatu elemen dari homomorfisma ring tergeneralisasi.

Pada konsep teori ring terdapat konsep mengenai sifat elementer dari ring. Namun, terdapat perbedaan pada konsep pembentukan sifat elementer ring tergeneralisasi dikarenakan elemen identitas yang bergantung pada setiap elemen. Berdasarkan hal ini muncul permasalahan apakah elemen identitas yang dimiliki setiap elemen pada ring tergeneralisasi mempengaruhi terbentuknya sifat elementer dari ring tergeneralisasi. Pada penelitian-penelitian sebelumnya telah dibuktikan berbagai sifat yang berkaitan dengan grup tergeneralisasi, subgrup tergeneralisasi, subgrup normal dari grup tergeneralisasi serta konsep dasar dari ring tergeneralisasi. Akan tetapi, perlu diteliti dan dikembangkan lebih lanjut sifat-sifat dari ring tergeneralisasi yang dianalog dari sifat elementer dari ring klasik, serta perlu diteliti juga sifat-sifat yang berkaitan dengan elemen identitas dan yang berkaitan dengan struktur *G*-ring.

Dari penjelasan tersebut penulis termotivasi untuk melakukan penelitian tentang sifat-sifat elementer ring tergeneralisasi. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan sifat-sifat elementer dari ring tergeneralisasi dan membuktikan sifat-sifat ring tergeneralisasi yang dikaitkan dengan struktur *G*-ring. Lebih lanjut, penelitian ini juga membuktikan sifat dari himpunan bagian yang berkaitan dengan elemen identitas pada ring tergeneralisasi.

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini dijelaskan definisi dari Ring Tergeneralisasi dan berbagai definisi lain yang berkaitan dengan struktur tersebut berdasarkan tulisan Fatehi & Molaei (2012) yang telah meneliti dan menemukan tentang konsep ring tergeneralisasi. Selain itu, akan diperkenalkan konsep *G*-ring dan korelasinya dengan ring tergeneralisasi.

Definisi 2.1

Sebuah ring tergeneralisasi merupakan suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner berbeda yaitu

$$(x, y) \longmapsto x + y$$
$$(x, y) \longmapsto xy$$

yang memenuhi aksioma berikut

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$ *untuk setiap* $x, y, z \in R$.
2. *Untuk setiap* $x \in R$, *terdapat secara tunggal* $e_x \in R$ *sedemikian sehingga* $x + e_x = e_x + x = x$.
3. *Untuk setiap* $x \in R$, *terdapat* $-x \in R$ *sedemikian sehingga* $x + (-x) = e_x = (-x) + x$.
4. $x(yz) = (xy)z$ *di mana* $x, y, z \in R$.

5. *Untuk setiap* $x, y, z \in R$. *Berlaku* $x(y+z) = xy + xz$ *dan* $(x+y)z = xz + yz$.

Kemudian dijelaskan konsep *G*-ring yang dihubungkan dengan konsep ring tergeneralisasi beserta contohnya.

Definisi 2.2

Suatu ring tergeneralisasi R disebut sebagai G-ring jika memenuhi:

1. $e_{x+y} = e_x + e_y$
2. $e_{xy} = e_x e_y$

untuk setiap $x, y \in R$.

Selanjutnya dijelaskan konsep elemen satuan dan elemen invers pada ring tergeneralisasi beserta contohnya.

Definisi 2.3

Jika terdapat $1 \in R$ *sedemikian sehingga* $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ *untuk setiap* $x \in R$, *maka R disebut sebagai ring tergeneralisasi dengan elemen satuan. Kemudian sebuah elemen* $a \in R$ *dikatakan invertible jika terdapat* $y \in R$ *sedemikian sehingga* $ay = ya = 1$. x *disebut sebagai invers dari a dan biasanya disimbolkan dengan* a^{-1}.

Pada bagian berikutnya, akan dijelaskan metode penelitian yang digunakan untuk membuktikan sifat-sifat elementer dari ring tergeneralisasi dan menyelesaikan penelitian ini.

METODE PENELITIAN

Untuk melaksanakan penelitian ini, ada beberapa langkah prosedur yang harus ditempuh untuk mencapai tujuan yang diinginkan. Langkah-langkah tersebut terdiri dari beberapa tahapan penting. Pertama, dilakukan kajian literatur mengenai berbagai konsep kunci seperti ring, subring, ideal, dan grup tergeneralisasi. Setelah itu, konsep ring tergeneralisasi dikembangkan dengan mengintegrasikan ide-ide dari ring dan grup tergeneralisasi. Kemudian, dilakukan pembuktian terhadap sifat-sifat elementer ring tergeneralisasi. Selanjutnya, penelitian dilanjutkan dengan membuktikan sifat-sifat yang berhubungan dengan struktur G-ring dan elemen identitas. Di akhir proses, kesimpulan dan rekomendasi disusun untuk memberikan masukan bagi penelitian di masa depan. Hasil penelitian ini akan dibahas lebih lanjut pada bagian berikut setelah melalui tahapan-tahapan tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dijelaskan dan dibuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan sifat elementer ring tergeneralisasi dan hubungannya dengan struktur *G*-ringberdasarkan Fatehi & Molaei (2012) yang telah meneliti dan menulis tentang sifat-sifat tersebut.

Teorema 4.1
Jika R adalah ring tergeneralisasi, maka $e_{ab} = e_a e_b$*, untuk setiap* $a, b \in R$.

Bukti.
Diberikan sebarang $a, b \in R$. Berdasarkan Definisi 2.1, terdapat $e_a, e_b \in R$ sedemikian sehingga $a + e_a = a = e_a + a$ dan $b + e_b = b = e_b + b$. Akibatnya, diperoleh $ab + ae_b = a(b + e_b) = ab$ dan $ae_b + ab = a(e_b + b) = ab$. Akibatnya berlaku $e_{ab} = ae_b$.

Kemudian, diperoleh juga bahwa, $e_a e_b + ae_b = (e_a + a)e_b = ae_b$ dan $ae_b + e_a e_b = (a + e_a)e_b = ae_b$. Jadi diperoleh $e_{ae_b} = e_a e_b$. Dari yang diperoleh sebelumnya dan Sifat 2.1 pada (Adeniran *et al*., 2009). Diperoleh $e_{ab} = e_{e_{ab}} = e_{ae_b} = e_a e_b$. ■

Contoh 4.2
Ruang euclid dua dimensi $\mathbb{R}^2$ dengan operasi pertama dan kedua didefinisikan berturut-turut sebagai berikut.

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$$
$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

merupakan ring tergeneralisasi dengan elemen identitas adalah dirinya sendiri, yakni untuk setiap $x = (a_1, b_1), y = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ berlaku $e_x = (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ dan $e_y = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ dan memenuhi aksioma 1 – 5 dari Definisi 2.1. Selanjutnya, berdasarkan definisi operasi kedua diperoleh $e_{xy} = (a_1 a_2, b_1 b_2) = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = e_x e_y$. Jadi berlaku $e_{xy} = e_x e_y$.

Kemudian berdasarkan Teorema 4.1 dikembangkan menjadi suatu sifat sebagai berikut.

Akibat 4.3
Jika R merupakan ring tergeneralisasi, maka $e_{ab} = ae_b = e_a b = e_a e_b$*, untuk setiap* $a, b \in R$.

Bukti.
Berdasarkan Teorema 4.1, diperoleh $e_{ab} = ae_b = e_a e_b$ untuk setiap $a, b \in R$. Diberikan sebarang $a, b \in R$. Diperoleh $ab + e_a b = (a + e_a)b = ab$ dan $e_a b + ab = (e_a + a)b = ab$. Diperoleh $e_{ab} = ae_b = e_a b = e_a e_b$. ■

Contoh 4.4
Dari Contoh 4.2, untuk $x = (a_1, b_1), y = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ berlaku $e_x = (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ dan $e_y = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $e_{xy} = e_x e_y$. Lebih lanjut berdasarkan definisi operasi kedua, diperoleh $e_{xy} = (a_1 a_2, b_1 b_2) = xe_y$ dan $e_{xy} = (a_1 a_2, b_1 b_2) = e_x y$. Jadi berlaku $e_{xy} = xe_y = e_x y = e_x e_y$.

Kemudian, dijelaskan hubungan ring tergeneralisasi dengan elemen satuan dengan sifat invertibel.

Teorema 4.5
Jika R merupakan ring tergeneralisasi yang memiliki elemen satuan dan $e_x \in R$ adalah invertible untuk suatu $x \in R$, maka $e_y = y$ untuk setiap $y \in R$.

Bukti.
Karena e_x invertible, akibatnya terdapat $z \in R$ sedemikian sehingga $ze_x = 1$. Berdasarkan Akibat 4.3, berlaku $e_{zx} = ze_x = 1$. Selanjutnya berdasarkan Sifat 2.1 pada (Adeniran *et al*., 2009), berlaku $e_{zx} = e_{e_{zx}} = e_1$. Akibatnya dengan menghubungkan dua persamaan ini, diperoleh $e_1 = 1$. Selanjutnya, ambil sebarang $y \in R$, berdasarkan Akibat 4.3 dan $e_1 = 1$, diperoleh $e_y = e_{y \cdot 1} = ye_1 = y \cdot 1 = y$. Dengan demikian, terbukti bahwa $e_y = y$ untuk setiap $y \in R$. ■

Contoh 4.6
Diberikan ring tergeneralisasi $\mathbb{R}^2$ yang didefinisikan pada Contoh 4.2 dengan elemen identitas adalah dirinya sendiri. Diketahui di $\mathbb{R}^2$ terdapat $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ sedemikian sehingga $e_{(1,1)} = (1,1)$ dan $(1,1)^{-1} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{1}\right) = (1,1)$. Berdasarkan Teorema 4.1, diperoleh $e_y = e_{y\cdot(1,1)} = ye_{(1,1)} = y$.

Berdasarkan Akibat 4.3, diperoleh untuk membuktikan *G*-ring, cukup dengan membuktikan $e_{x+y} = e_x + e_y$. Kemudian akan dijelaskan hubungan ring tergeneralisasi dengan elemen satuan dan *G*-ring.

Teorema 4.7
Jika R merupakan ring tergeneralisasi yang memiliki elemen satuan, maka R merupakan G-ring.

Bukti.
Berdasarkan Akibat 4.3 diperoleh $e_x = e_{x\cdot 1} = xe_1$. Akibatnya diperoleh $e_x + e_y = xe_1 + ye_1 = (x + y)e_1 = e_{(x+y)\cdot 1} = e_{x+y}$. Jadi terbukti bahwa R adalah $G-$ring. ■

Contoh 4.8
Ring tergeneralisasi $\mathbb{R}^2$ dari Contoh 4.2 merupakan *G*-ring karena untuk $x = (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$, terdapat secara tunggal $e_x = (a_1, b_1) \in \mathbb{R}$ dan untuk $y = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$, terdapat secara tunggal $e_y = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}$. Akibatnya diperoleh $e_{x+y} = e\big((a_1, b_2)\big) = (a_1, b_2) = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = e_x + e_y$.

Selanjutnya dijelaskan dan ditunjukkan beberapa sifat elementer pada ring juga berlaku pada ring tergeneralisasi.

Teorema 4.9
Jika R merupakan ring tergeneralisasi yang memiliki elemen satuan, maka:
1. $(-x) = x(-1) = (-1)x$, *untuk setiap* $x \in R$.
2. $-(xy) = (-x)y = x(-y)$, *untuk setiap* $x, y \in R$.
3. $-(x + y) = (-x) + (-y)$, *untuk setiap* $x, y \in R$.

Bukti.

Diberikan sebarang $x, y \in R$, karena R adalah ring tergeneralisasi dengan elemen satuan, akibatnya berdasarkan Definisi 2.3 dan Definisi 2.1 terdapat $1 \in R$ sedemikian sehingga $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ dan terdapat $-1 \in R$ sedemikian sehingga $1 + (-1) = e_1 = (-1) + 1$.

1. Untuk membuktikan $(-x) = x(-1) = (-1)x$, untuk setiap $x \in R$, cukup dibuktikan $x(-1)$ dan $(-1)x$ invers dari x. Berdasarkan Akibat 4.3 dan Definisi 2.1, diperoleh
$$x + x(-1) = x\big(1 + (-1)\big) = xe_1 = e_{x.1} = e_x.$$
$$x(-1) + x = x((-1 + 1) = xe_1 = e_{x.1} = e_x.$$
Diperoleh $x(-1)$ invers dari x. Dengan cara yang sama diperoleh juga
$$x + (-1)x = \big(1 + (-1)\big)x = e_1x = e_{1.x} = e_x.$$
$$(-1)x + x = ((-1) + 1)x = e_1x = e_{1.x} = e_x.$$
Diperoleh $(-1)x$ invers dari x. Karena invers dari operasi pertama suatu ring tergeneralisasi bersifat tunggal yang dinyatakan dalam Teorema 2.1 pada (Adeniran *et a*l., 2009), akibatnya haruslah $(-x) = x(-1) = (-1)x$.
2. Diberikan sebarang $x, y \in R$. Akan dibuktikan $x(-y)$ dan $(-x)y$ invers dari xy. Berdasarkan Akibat 4.3 dan Definisi 2.1, diperoleh
$$xy + x(-y) = x\big(y + (-y)\big) = xe_y = e_{xy}.$$
$$x(-y) + xy = x((-y) + y) = xe_y = e_{xy}.$$
Diperoleh $x(-y)$ invers dari xy. Dengan cara yang sama diperoleh juga
$$xy + (-x)y = \big(x + (-x)\big)y = e_xy = e_{xy}.$$
$$(-x)y + xy = ((-x) + x)y = e_xy = e_{xy}.$$
Diperoleh $(-x)y$ invers dari xy. Berdasarkan Teorema 2.1 pada (Adeniran *et al*., 2009), diketahui invers dari operasi pertama suatu ring tergeneralisasi bersifat tunggal, akibatnya haruslah $-(xy) = x(-y) = (-x)y$.
3. Akan dibuktikan $(-x) + (-y)$ adalah invers dari $x + y$ untuk setiap $x, y \in R$. Berdasarkan *(1)* dan Definisi 2.1, diperoleh
$$\begin{aligned} x + y + (-x) + (-y) &= x + y + (-1)x + (-1)y \\ &= (x + y) + (-1)(x + y) \\ &= (x + y) + \big(-(x + y)\big) \\ &= e_{x+y} \end{aligned}$$
dan
$$\begin{aligned} (-x) + (-y) + x + y &= (-1)x + (-1)y + x + y \\ &= (-1)(x + y) + (x + y) \\ &= \big(-(x + y)\big) + (x + y) \\ &= e_{x+y}. \end{aligned}$$
Diperoleh $(-x) + (-y)$ invers dari $x + y$. Berdasarkan Teorema 2.1 pada (Adeniran *et al*., 2009), diketahui invers dari suatu ring tergeneralisasi bersifat tunggal, akibatnya diperoleh $-(x + y) = (-x) + (-y)$. ■

Contoh 4.10

Berdasarkan Contoh 4.2, suatu ring tergeneralisasi $\mathbb{R}^2$ memiliki elemen satuan dan memenuhi untuk setiap $x = (a_1, b_1), y = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ berlaku $1 = (1,1), -x = (a_1, b_1), -y = (a_2, b_2)$ dan $-1 = (1,1)$. Diperoleh

1. $(-x) = (a_1, b_1) = (a_1, b_1)(1,1) = (a_1, b_1) = x(-1)$
   $= (1,1)(a_1, b_1) = (a_1, b_1) = (-1)x.$
2. $-(xy) = -\big((a_1, b_1)(a_2, b_2)\big) = -(a_1a_2, b_1b_2)$
   $= (a_1a_2, b_1b_2) = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (-x)y$
   $= (a_1, b_1)(a_2, b_2) = x(-y).$
3. $-(x + y) = -\big((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\big) = -(a_1, b_2) = (a_1, b_2)$
   $= (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (-x) + (-y).$

Kemudian, dijelaskan hubungan ring tergeneralisasi dengan suatu himpunan baru yang dibentuk dengan memiliki elemen identitas yang serupa dan mengacu pada elemen identitas suatu elemen.

Lemma 4.11

Jika R merupakan ring tergeneralisasi dengan elemen satuan, maka $R_a = \{x \in R | e_x = e_a\}$ merupakan grup abelian, untuk setiap $a \in R$.

Bukti.

Berdasarkan Teorema 2.4 pada (Mehrabi *et al*., 2000), diperoleh R_a merupakan subgrup tergeneralisasi dari R. Karena setiap elemen R_a memiliki identitas yang sama diperoleh R_a merupakan grup. Kemudian, ambil sebarang $x, y \in R_a$ dengan $e_x = e_a = e_y$ untuk setiap $a \in R$. Diperoleh $x + x + y + y = (x + y)(1 + 1) = x + y + x + y$. Selanjutnya berdasarkan persamaan tersebut, Definisi 2.1 dan $e_x = e_a = e_y$, diperoleh $x + y = e_x + x + y + e_y = (-x) + x + x + y + y + (-y) = (-x) + x + y + x + y + (-y) = e_x + y + x + e_y = e_y + y + x + e_x = y + x$. Akibatnya, diperoleh R_a adalah grup abelian. ■

Contoh 4.12.

Ruang euclid dua dimensi $\mathbb{R}^2$ dengan operasi pertama dan kedua sebagai berikut

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$$

merupakan ring tergeneralisasi dengan elemen identitas adalah $(a, 0)$ untuk $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ dan memenuhi aksioma 1 – 5 dari Definisi 2.1. Ring tergeneralisasi ini juga memiliki elemen satuan $(1,1)$ dan invertible dengan elemen invers pada operasi kedua adalah $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sesuai Definisi 2.3, diperoleh himpunan $R_a = \{x \in R | e_r = e_a\} = \{(a, p) |$untuk $a \in \mathbb{R}$ dan setiap $p \in \mathbb{R}\}$ merupakan grup abelian sesuai Lemma 4.11.

Kemudian, dijelaskan juga penerapan konsep *G*-ring pada himpunan elemen identitas yakni himpunan $R^e = \{e_x | x \in R\}$.

Teorema 4.13
Jika R merupakan suatu G-ring, maka $R^e = \{e_x | x \in R\}$ merupakan ring tergeneralisasi.

Bukti.
Akan dibuktikan $R^e = \{e_x | x \in R\}$ merupakan ring tergeneralisasi. Karena R adalah suatu G-ring, berlaku $e_x + e_y = e_{x+y}$ dan $e_x e_y = e_{xy}$ sedemikian sehingga R^e tertutup pada operasi penjumlahan dan perkalian. Kemudian, berdasarkan Definisi 2.2 dan Sifat 2.1 pada (Adeniran *et al*., 2009). Diperoleh untuk setiap $e_a, e_b, e_c, e_d \in R^e$ dengan $e_a = e_c$ dan $e_b = e_d$ di mana $a, b, c, d \in R$ berlaku $e_{a+b} = e_{c+d}$ dan $e_{ab} = e_{cd}$ sedemikian sehinggaR^e *well-defined* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Selanjutnya, untuk setiap $e_x \in R^e$ terdapat $e_x \in R^e$ sebagai elemen identitas dan elemen invers pada R^e sedemikian sehingga $e_x + e_x = e_x$. Kemudian, ambil sebarang $e_x, e_y, e_z \in R^e$ dengan $x, y, z \in R$. Berdasarkan Definisi 2.1 dan Definisi 2.2. Diperoleh $(e_x + e_y) + e_z = e_x + (e_y + e_z)$, $(e_x e_y)e_z = e_x(e_y e_z)$, $(e_x + e_y)e_z = e_x e_z + e_y e_z$ dan $e_x(e_y + e_z) = e_x e_y + e_x e_z$. Dengan demikian, diperoleh R^e asosiatif dan distributif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Jadi, diperoleh $R^e = \{e_x | x \in R\}$ merupakan ring tergeneralisasi. ■

Contoh 4.14
Berdasarkan Contoh 4.12, dari suatu G-ring $R = \mathbb{R}^2 - \{(0, a)\}$ untuk $a \in \mathbb{R}$ dapat dibentuk suatu himpunan $R^e = \{(x, 0) | \forall x \in \mathbb{R}\}$ merupakan ring tergeneralisasi dengan elemen identitas adalah dirinya sendiri yakni $(a, 0)$ untuk $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$ dan memenuhi aksioma 1 – 5 dari Definisi 2.1 dan memenuhi Teorema 4.13.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang dijabarkan sebelimnya diperoleh seuatu kesimpulan yakni berlakunya sifat-sifat elementer dari ring tergeneralisasi yang analog dari sifat fundamental pada ring yakni $(-x) = x(-1) = (-1)x$, $-(xy) = (-x)y = x(-y)$, $-(x + y) = (-x) + (-y)$, untuk setiap $x, y \in R$. Kemudian diperoleh juga syarat cukup suatu ring tergeneralisasi merupakan suatu G-ring, jika ring tergeneralisasi tersebut memiliki elemen satuan. Lebih lanjut, jika ring tergeneralisasi tersebut memiliki elemen satuan, dapat dibentuk suatu grup abelian $R_a = \{x \in R | e_x = e_a\}$ dan ring tergeneralisasi $R^e = \{e_x | x \in R\}$.

REFERENSI

Adeniran, J., O. Akinmoyewa, J. T., Solarin, A. R. T., & Jaiyeola, T. G. (2009). *On Some Algebraic Properties of Generalized Groups*. 1–9.

Aldwoah, K. (2021). *Generalized Groups. Basic and Applied Sciences - Scientific Journal of King Faisal University*. Vol. 22(2), 1–4.

Caraquil, J. A., & Baldado Jr., M. P. (2022). *Some Properties of g-Groups.* Vol. 15(3), 887-896.

Cuvagcloglu, G., Citil, M., & Bal, A. (2016). *On Intuitionistic Fuzzy Generalized Groups.* Vol. 22(2), 64-70.

Ebrahimi, N. (2016). *Local Lie Groups and Local Top Spaces.* Vol. 24, 20-24.

Fatehi, F., & Molaei, M. R. (2012). *Some Algebraic Properties Of Generalized Rings*.

Fatehi, F., & Molaei, M. R. (2012). *On completely simple semigroups*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyh´azi. (N.S.). Vol. 28, 95–102.

Maleki, H., & Molaei, M. R. (2015). *T-Spaces.* Vol. 39(6), 851-863.

Malik, D., Moderson, J. N., & Sen, M. (2007). *Introduction to Abstract Algebra*. Department of Mathematics.

Molaei, M. R., & Farhangdoost, M. R. (2009). *Lie Algebras of A Class of Top Spaces*, Balkan J. Geom. Appl. Vol. 14, 46–51.

Molaei, M. R. (2005). *Complete Semi-dynamical Systems*, J. Dyn. Syst. Geom. Theor. Vol. 3, 95–107.

Molaei, M. R. (2005). *Mathematical Structures Based on Completely Simple Semigroups*, Hadronic Press, Palm Harbor, FL.

Molaei, M. R., Khadekar, G. S., & Farhangdost, M. R. (2006). *On Top Spaces*, Balkan J. Geom. Appl. Vol. 11, 101–106.

Mustafa, H. G. (2021). *On the Topological Generalid Crossed Modules.* Vol. 48(2), 183-193.

Mustafa, H. G., Aslan, H., & Ilhan, I. (2017). *Generalized Crossed Modules and Group-Groupoids*. Vol. 41(6), 1535-1551.

Nazari, Z., Delbaznasab, & Kamandar, M. (2019). *New Methods for Constructing Generalized Groups, Topological Generalized Groups, and Top Spaces.* Vol. 7(2), 83-94.

Poursalavati, N. S. (2017). *On the Construction of Molaei's Generalized Hypergroups.* Vol. 5(3), 106-109.

Romeo, P. G., & Sneha, K. K. (2020). *Generalized Groups and Module Groupoids.*

Sen, M. K. & Dasgupta, U. (2010). *Some Aspects of* $G_H - rings$, An. S¸tiint¸. Univ. "Al.I. Cuza" Ia¸si. Mat. (N.S.). Vol. 56, 253–272.

Toyin, J., & Akinmoyewa. (2009). *A study of Some Properties of Generalized Groups*. Vol. 17(2), 599–626.