Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.18 No.2 (Desember 2024) Hal. 220-227

SEPUTAR ALJABAR ENVELOPING UNIVERSAL DARI ALJABAR LIE FROBENIUS BERDIMENSI 4

Edi Kurniadi[1], Badrulfalah[1], Kankan Parmikanti[1]

[1]Departemen Matematika FMIPA Unpad
Jl. Soekarno No. 21 Jatinangor Km. 21 Sumedang, Jawa Barat, Indonesia
email: edi.kurniadi@unpad.ac.id

ABSTRACT

Every Lie algebra has a universal enveloping algebra and it is unique. In this research, we study a universal enveloping algebra of a Frobenius Lie algebra of dimension 4. The research aims to prove that their universal enveloping algebras of Frobenius Lie algebras of dimension 4 are primitives. Firstly, we construct a basis of a universal enveloping algebra with respect to the Poincare- Birkhoff-Witt Theorem to determine the explicit formula of its universal enveloping algebra and secondly, we investigate some properties of obtained universal enveloping algebras. The results show that for case of Frobenius Lie algebras of dimension 4, their universal enveloping algebras are primitives.

Keywords: Frobenius Lie algebra, primitive algebra, Universal enveloping algebra, Tensor algebra.

ABSTRAK

Setiap aljabar Lie mempunyai aljabar enveloping universal dan bersifat tunggal. Dalam penelitian ini, dipelajari aljabar enveloping universal dari suatu aljabar Lie Frobenius berdimensi 4. Tujuannya adalah untuk membuktikan bahwa aljabar enveloping universal dari suatu aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 bersifat primitif. Pertama-tama, dikonstruksi suatu basis untuk aljabar enveloping universal menggunakan Teorema Poincare-Birkhoff-Witt untuk menentukan secara eksplisit aljabar enveloping universalnya dan langkah kedua, menentukan karakteristik aljabar enveloping universal hasil konstruksi. Hasil dalam penelitian ini menunjukkan bahwa setiap aljabar enveloping universal dari aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 senantiasa bersifat primitif.

Kata kunci: Aljabar Lie Frobenius, aljabar enveloping universal, aljabar primitif, aljabar tensor.

Received: 20 Oktober 2024, Accepted: 9 Desember 2024, Published: 12 Desember 2024

PENDAHULUAN

Aljabar enveloping universal merupakan aljabar yang bersifat asosiatif dan mempunyai unit yang memuat suatu aljabar Lie sebagai subaljabar Lie-nya dan dibangun oleh aljabar Lie tersebut. Sifat universal dari aljabar enveloping universal adalah setiap aljabar Lie dapat diperluas menjadi aljabar enveloping universal. Dalam hal ini suatu modul dari aljabar Lie dapat diperluas menjadi modul atas aljabar enveloping universal. Oleh karena itu, setiap aljabar Lie mempunyai aljabar enveloping aljabar. Eksistensi dari aljabar enveloping universal dapat diturunkan dari konstruksi ruang kuosien aljabar tensor dan eksistensinya bersifat tunggal.

Terdapat beberapa kelas terkait klasifikasi aljabar Lie. Aljabar Lie yang senantiasa berdimensi genap dan determinan matriks strukturnya tidak sama dengan nol dikenal sebagai aljabar Lie Frobenius. Dikenal pula aljabar Lie kontak yang senantiasa berdimensi ganjil dengan sifat tertentu. Di sisi lain, dikenal juga aljabar Lie solvable dan aljabar Lie nilpoten. Dari kelas-kelas aljabar Lie tersebut, aljabar enveloping universal selalu dapat dikonstruksi dan mempunyai sifat-sifat yang berbeda. Hal ini yang menjadi motivasi untuk mempelajari aljabar enveloping universal dari aljabar Lie Frobenius khususnya yang berdimensi 4.

Dalam penelitian sebelumnya, aljabar enveloping universal dikonstruksi dari aljabar Lie berdimensi 3 sederhana (Malcolmson, 1992). Klasifikasi aljabar enveloping universalnya menggunakan *killing form* dan automorfismanya diinduksi dari isometris *killing form*-nya dalam kasus nonsplit. Penelitian selanjutnya, aljabar enveloping universal dikonstruksi dari aljabar Lie solvable berdimensi hingga dan dikaji mengenai masalah isomorfismanya (Rodríguez *et al*., 2022). Dalam penelitian tersebut, aljabar enveloping universal dari aljabar Lie solvable berdimensi hingga menentukan tipe isomorfisma dari aljabar Lie metabelian yang subaljabarnya berkodimensi satu dan hasil yang diperoleh diterapkan untuk menyelesaikan masalah isomorfisma aljabar Lie solvable berdimensi 4 atas lapangan yang berkaraktersitik nol dan berkarakteristik prima. Di sisi lain, sudah banyak peneliti yang mempelajari terkait dengan aljabar Lie Frobenius misalnya terkait dengan elemen utamanya (Diatta & Manga, 2014; Gerstenhaber & Giaquinto, 2009), quasi Frobenius Lie algebra dan solvable Frobenius Lie algebra(Alvarez *et al*., 2018; Pham, 2016), aljabar Lie Frobenius, invariant, dan sistem komutatif matriks dan Teorema Gerstenhaber (Diatta *et al*., 2020; Ooms, 2009). Namun demikian, penelitian terkait aljabar enveloping universal dari aljabar Lie Frobenius masih sedikit dikaji. Padahal dalam teori representasi, aljabar enveloping universal sangat berperan dalam mempelajari teori representasi aljabar Lie (Hilgert & Neeb, 2012).

Hubungan antara aljabar Lie Frobenius dengan aljabar enveloping universalnya bermula dari pertanyaan terkait kondisi apa yang harus dipenuhi oleh aljabar Lie berdimensi hingga yang menjamin bahwa aljabar enveloping universalnya bersifat primitif (Ooms, 1974, 1976). Tentu saja jika aljabar Lie-nya atas lapangan dengan karakteristiknya tidak sama dengan nol maka aljabar enveloping universalnya tidak pernah primitif kecuali aljabar Lie-nya sama dengan nol. Hal inilah yang menjadi motivasi untuk menyelidiki karakteristik aljabar enveloping universal dari aljabar Lie Frobenius berdimensi 4.

TINJAUAN PUSTAKA

Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie atas suatu lapangan k. Dengan kata lain, $\mathfrak{g}$ adalah suatu ruang vektor atas suatu lapangan k yang dilengkapi dengan pemetaan bilinear yang

bersifat *skew-symmetric* dan memenuhi identitas Jacobi. Misalkan $k^{(\mathfrak{g})}$ ruang vektor bebas atau *a free vector space* pada $\mathfrak{g}$, yaitu himpunan semua fungsi yang diberikan oleh $\psi\colon \mathfrak{g} \to k$ dimana himpunan $\mathfrak{A} \coloneqq \{x \in \mathfrak{g}\,; \psi(x) \neq 0\}$ hingga. Misalkan $x \in \mathfrak{g}$ dan didefinisikan $\delta_x \in k^{(\mathfrak{g})}$ oleh pengaitan $\delta_x(s) = \begin{cases} 1, x = s \\ 0, x \neq s \end{cases}$. Dalam hal ini, $k^{(\mathfrak{g})} = \langle \delta_x \rangle_{x \in \mathfrak{g}}$ dengan $\delta\colon \mathfrak{g} \ni x \mapsto \delta_x \in k^{(\mathfrak{g})}$. Sifat universal $(k^{(\mathfrak{g})}, \delta)$ diberikan sebagai berikut:
Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan k dan $f\colon \mathfrak{g} \to V$ sembarang pemetaan. Maka terdapat pemetaan linear tunggal $g\colon k^{(\mathfrak{g})} \to V$ sedemikian sehingga $g \circ \delta = f$, yakni diagram pemetaannya bersifat komutatif (Hilgert & Neeb, 2012).

Misalkan $\mathfrak{g}_1$ dan $\mathfrak{g}_2$ ruang vektor dan misalkan pula $k^{(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2)}$ merupakan ruang vektor bebas pada himpunan $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$. Untuk semua $x, y \in \mathfrak{g}_1, y_1, z \in \mathfrak{g}_2$, dan $\tau \in k$, misalkan $W \subseteq k^{(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2)}$ subruang yang dibangun oleh elemen-elemen berbentuk:

1. $\delta_{(x+y,z)} - \delta_{(x,z)} - \delta_{(y,z)}$
2. $\delta_{(x,y_1+z)} - \delta_{(x,y_1)} - \delta_{(x,z)}$
3. $\delta_{(\tau x,z)} - \delta_{(x,\tau z)}$
4. $\tau\delta_{(x,z)} - \delta_{(\tau x,z)}$

Selanjutnya hasil kali tensor dari ruang vektor $\mathfrak{g}_1$ dan $\mathfrak{g}_2$ dinotasikan oleh $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_2$ dan didefinisikan sebagai ruang kuosien $k^{(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2)}/W$. Lebih jauh, elemen dari $k^{(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2)}/W$ dinotasikan oleh $\delta_{(x,y)} + W =: x \otimes y$. Dengan demikian, diperoleh bahwa:

1. $\delta_{(x+y,z)} + W = \delta_{(x,z)} + W + \delta_{(y,z)} + W = \delta_{(x,z)} + \delta_{(y,z)} + W = x \otimes z + y \otimes z = (x + y) \otimes z$
2. $\delta_{(x,y_1+z)} + W = \delta_{(x,y_1)} + W + \delta_{(x,z)} + W = \delta_{(x,y_1)} + \delta_{(x,z)} + W = x \otimes y_1 + x \otimes z = x \otimes (y_1 + z)$
3. $\delta_{(\tau x,z)} + W = \delta_{(x,\tau z)} + W = x \otimes (\tau z) = (\tau x) \otimes z = \tau(x \otimes z)$

Secara formal, hasil di atas dapat dinyatakan dalam proposisi berikut ini:

Proposisi 1 (Hilgert & Neeb, 2012). *Misalkan* $\mathfrak{g}_1$ *dan* $\mathfrak{g}_2$ *ruang vektor, maka terdapat hasil kali tensor ruang vektor* $\mathfrak{g}_1$ *dan ruang vektor* $\mathfrak{g}_2$ *yang dinotasikan oleh* $(\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_2, \otimes)$.

Bukti. Tinggal membuktikan bahwa $(\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_2, \otimes)$ mempunyai sifat universal atau *universal property* hasil kali tensor sebagai berikut: Misalkan $\mathfrak{g}$ suatu ruang vektor. Diberikan sembarang pemetaan bilinear $\beta\colon \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}$. Karena $(k^{(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2)}, \delta)$ mempunyai sifat universal maka terdapat pemetaan linear $\gamma\colon k^{(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2)} \to \mathfrak{g}$. Selanjutnya, karena β bilinear maka W merupakan subruang dari $\ker \gamma$ sedemikian sehingga γ ini memfaktorkan suatu pemetaan linear yang diberikan oleh

$$\tilde{\beta}: \mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_2 = k^{(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2)}/W \ni (x \otimes y) = \gamma(\delta_{(x,y)}) = \beta(x,y) \in \mathfrak{g}.$$

Ingat kembali bahwa $x \otimes y$ membangun secara linear $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_2$ dan $\delta(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1)$ merupakan basis linear untuk $k^{(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2)}$.

■

Untuk ruang vektor $\mathfrak{g}$ atas lapangan, kita bisa mengkonstruksi aljabar tensor dari $\mathfrak{g}$ dan dinotasikan oleh

$$\mathrm{T}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{g}^{\otimes n} = k \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 2} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 3} \oplus \cdots \quad (1)$$

dengan pemetaan bilinearnya diberikan oleh

$$\mu_{m,l}: \mathfrak{g}^{\otimes m} \times \mathfrak{g}^{\otimes l} \ni (x,y) \mapsto x \otimes y \in \mathfrak{g}^{\otimes (m+l)}, \ \ m,l \in \mathbb{Z}_{>0}. \quad (2)$$

Definisi 1 (Hilgert & Neeb, 2012). *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *suatu aljabar Lie. Pasangan* $(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \sigma)$ *dengan* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *suatu aljabar dan* $\sigma: \mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})_L$ *suatu homomorfisma aljabar Lie, dikatakan aljabar enveloping universal jika memenuhi sifat universal berikut ini: Misalkan* A *aljabar asosiatif unital dan* A_L *aljabar Lie-nya. Untuk setiap homomorfisma aljabar Lie* $f: \mathfrak{g} \to A_L$ *terdapat secara tunggal homomorfisma aljabar asosiatif unital* $g: \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to A$ *sedemikian sehingga* $g \circ \sigma = f$.

Selanjutnya dibahas pula bahwa setiap aljabar Lie mempunyai aljabar enveloping universal. Khususnya terkait dengan aljabar Lie Frobenius, eksistensi aljabar enveloping universal ini memiliki sifat yang khas. Lebih detail, sifat ini akan dibuktikan kemudian.

METODE PENELITIAN

Kajian studi literatur sudah dilakukan secara komprehensif khususnya terkait aljabar Lie Frobenius dan aljabar enveloping universal. Langkah pertama adalah mengkonstruksi aljabar enveloping universal melalui fakta bahwa setiap aljabar Lie mempunyai aljabar enveloping universal. Langkah kedua adalah menentukan aljabar enveloping universal dalam kasus aljabar Lie Frobenius berdimensi empat. Langkah ketiga membuktikan bahwa aljabar enveloping universal dari aljabar Lie Fronbenius berdimensi empat senantiasa bersifat primitif.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil utama dalam penelitian ini disajikan dalam Proposisi 2. Hasil klasifikasi aljabar Lie Frobenius berdimensi empat yang digunakan dalam penelitian ini merupakan hasil yang diperoleh Ooms (1974).

Proposisi 2. *Diberikan tiga kelas aljabar Lie berdimensi* 4 *sebagai berikut*:

1. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ *dengan* $\mathfrak{h}$ *aljabar Lie dibangun oleh* p *dan* q *dengan bracket Lie-nya diberikan oleh* $[p,q] = q$.

2. $\mathfrak{g}_2 := \mathfrak{h}(x), x \in \mathbb{R}$, *yaitu aljabar Lie dengan basis* $S = \{p, q, r, s\}$ *dan Lie bracket-nya yang diberikan oleh persamaan*:

$$[p, q] = xq, [p, r] = (1 - x)r, [p, s] = s = [q, r]. \quad (3)$$

   sebagian bergantung pada x. *Aljabar Lie* $\mathfrak{h}(x)$ *isomorfik dengan* $\mathfrak{h}(y)$ *jika dan hanya jika* $x = y$ *atau* $x + y = 1$.

3. $\mathfrak{g}_3 := \langle p, q, r, s\rangle$ *dan Lie bracket-nya diberikan oleh persamaan*:

$$[p, q] = \frac{1}{2}q + r, [p, r] = \frac{1}{2}r, [p, s] = s = [q, r]. \quad (4)$$

Maka aljabar enveloping universal $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_1), \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_2)$, *dan* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_3)$ *bersifat primitif. Akibatnya aljabar Lie* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, *dan* $\mathfrak{g}_3$ *merupakan aljabar Lie Frobenius.*

Setiap aljabar Lie $\mathfrak{g}$ senantiasa mempunyai aljabar enveloping universal $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Untuk membuktikan pernyataan ini, misalkan $\mathfrak{A}$ suatu subhimpunan dari suatu aljabar tensor $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ yang dibangun oleh elemen-elemen berbentuk sebagai berikut:

$$p \otimes q - q \otimes p - [p, q] \in \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \quad (5)$$

dengan $p, q \in \mathfrak{g}$. Selanjutnya, misalkan $I_{\mathfrak{A}}$ ideal terkecil dari $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ yang memuat $\mathfrak{A}$. Aljabar enveloping universal dapat dikontruksi dalam bentuk $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) := \mathrm{T}(\mathfrak{g})/I_{\mathfrak{A}}$ (Hilgert & Neeb, 2012, hal. 169). Dengan demikian, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ dapat dipandang sebagai aljabar asosiatif unital. Selanjutnya operasi dalam $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ dapat dinyatakan melalui homomorfisma aljabar Lie

$$\tau: \mathfrak{g} \ni p \mapsto \tau(p) := p + I_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})_{\mathrm{L}} := \mathrm{T}(\mathfrak{g})/I_{\mathfrak{A}.} \quad (6)$$

Menggunkan persamaan (5) dan sifat koset maka berlaku $\tau([p, q]) = [p, q] + I_{\mathfrak{A}} = p \otimes q - q \otimes p + I_{\mathfrak{A}}$. Selanjutnya, jika $\mathfrak{g} = \langle p_1, p_2, \dots, p_n\rangle$ basis untuk $\mathfrak{g}$, dengan menggunakan Teorema Poincare-Birkhoff-Witt (lihat (Hilgert & Neeb, 2012) hal. 173), maka basis untuk $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ dapat dinyakan dalam bentuk:

$$\{p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_n^{n_n} \ ; n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}. \quad (7)$$

Bukti Proposisi 2. Dalam bagian ini akan dibuktikan bahwa tiap-tiap aljabar enveloping universal $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_1), \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_2)$, dan $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_3)$ bersifat primitif.

Bagian I. Kita buktikan secara detail untuk kasus aljabar Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ dengan $\mathfrak{h}$ adalah aljabar Lie dibangun oleh p dan q atau $\mathfrak{h} = \langle p, q\rangle$ dengan bracket Lie-nya diberikan oleh $[p, q] = q$. Misalkan H grup aljabar yang termuat di grup dari semua automorfisma Aut $(\mathfrak{g}_1)$ yang aljabar Lie Lie (H) memuat himpunan semua representasi adjoint dari $\mathfrak{g}_1$ atau ad $(\mathfrak{g}_1)$. Dengan kata lain, Lie (H) merupakan hull aljabar dari ad $(\mathfrak{g}_1)$ di End $(\mathfrak{g}_1)$. Untuk setiap $\alpha \in \mathfrak{g}_1^*$, didefinisikan sebagai:

$$\mathfrak{g}_1[\alpha] = \{p \in \mathfrak{g}_1 \ ; \langle \alpha, Ep\rangle = 0, \forall E \in \mathrm{Lie(H)}\}. \quad (8)$$

Perhatikan bahwa, $\mathfrak{g}_1[\alpha]$ merupakan ideal dari $\mathfrak{g}_1(\alpha)$ yang didefiniskan oleh:

$$\mathfrak{g}_1(\alpha) = \{z \in \mathfrak{g}_1 \ ; \langle \alpha, [z, w]\rangle = 0, \forall w \in \mathfrak{g}_1\}. \quad (9)$$

Untuk membuktikan bahwa $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_1)$ bersifat primitif, yaitu $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_1)$ mempunyai $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_1)$-modul $\mathfrak{M}$ yang bersifat *faithful* dan sederhana, cukup ditunjukkan bahwa terdapat $\alpha_0 \in \mathfrak{g}_1^*$ sedemikian sehingga $\mathfrak{g}_1(\alpha_0) = (0)$ (Lihat (Ooms, 1976), p. 69). Untuk menunjukkan bahwa terdapat $\alpha_0 \in \mathfrak{g}_1^*$ yang memenuhi $\mathfrak{g}_1(\alpha_0) = (0)$, perhatikan matriks $[p_i, p_j]$ yang elemen-elemennya termuat di aljabar simetrik $S(\mathfrak{g}_1)$ sebagai berikut:

$$[p_i, p_j] = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,q) & (q,0) & (q,q) \\ (0,-q) & (0,0) & (q,-q) & (q,0) \\ (-q,0) & (-q,q) & (0,0) & (0,q) \\ (-q,-q) & (-q,0) & (0,-q) & (0,0) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Karena $\mathfrak{h}$ sendiri adalah aljabar Lie Frobenius (Alvarez *et al*., 2018; Pham, 2016), maka terdapat $\beta_0^* = q^* \in \mathfrak{h}^*$ sedemikian sehingga $\mathfrak{h}(\beta_0^*) = (0)$. Ini mengakibatkan $\mathfrak{h}[\beta_0^*] = (0)$. Dengan demikian, aljabar enveloping universal $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$ bersifat primitif. Oleh karena itu, pilih $\alpha_0 = (\beta_0^*, \beta_0^*) = (q^*, q^*) \in \mathfrak{g}_1^*$. Menggunakan Persamaan (9) dan *bracket* Lie $[p, q] = q$, diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1(\alpha_0) &= \{(p,q) \in \mathfrak{g}_1 \ ; \langle \alpha_0, [(p,q),(r,s)] \rangle = 0, \forall (r,s) \in \mathfrak{g}_1\} \\ &= \{(p,q) \in \mathfrak{g}_1 \ ; \langle (q^*,q^*), ([p,r],[q,s]) \rangle = 0, \forall (r,s) \in \mathfrak{g}_1\} \\ &= \{(p,q) \in \mathfrak{g}_1 \ ; (q^*,q^*)([p,r],[q,s]) = 0, \forall (r,s) \in \mathfrak{g}_1\} \\ &= (0). \end{aligned} \tag{11}$$

Jadi, $\mathfrak{g}_1(\alpha_0) = (0)$. Akibatnya, kita peroleh juga bahwa $\mathfrak{g}_1[\alpha_0] = (0)$. Oleh karena itu, aljabar enveloping universal $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_1)$ bersifat primitif. Konsekuensinya aljabar Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

Bagian II. Perhatikan matriks *bracket Lie* untuk $\mathfrak{g}_2$ dengan *bracket* Lie-nya diberikan dalam Persamaan (3) sebagai berikut:

$$[p_i, q_j](x) = \begin{pmatrix} 0 & xq & (1-x)r & s \\ -xq & 0 & s & 0 \\ (x-1)r & -s & 0 & 0 \\ -s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Menghitung langsung determinan matriks $[p_i, q_j](x)$ diperoleh $\det[p_i, q_j](x) = s^4 \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}_2)$. Dengan memilih $\tau_0 = s^* \in \mathfrak{g}_2^*$ dan dengan menggunakan persamaan (3) maka diperoleh $\mathfrak{g}_2(\tau_0) = (0)$. Akibatnya ideal $\mathfrak{g}_2[\tau_0] \subseteq \mathfrak{g}_2(\tau_0)$ juga trivial. Jadi, aljabar enveloping universal $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_2)$ bersifat primitif. Konsekuensinya aljabar Lie $\mathfrak{g}_2 \coloneqq \mathfrak{h}(x), x \in \mathbb{R}$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

Bagian III. Dengan menggunakan cara pembuktian yang sama pada bagian I dan II, dapat dibuktikan bahwa $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_3)$ juga bersifat primitif. Perhatikan matriks *bracket Lie* untuk $\mathfrak{g}_3$ dengan *bracket* Lie-nya diberikan dalam Persamaan (4) sebagai berikut:

$$[p_i, q_j] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}q + r & \frac{1}{2}r & s \\ -\frac{1}{2}q - r & 0 & s & 0 \\ -\frac{1}{2}r & -s & 0 & 0 \\ -s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Menghitung langsung determinan matriks $[p_i, q_j]$ diperoleh $\det[p_i, q_j] = s^4 \in S(\mathfrak{g}_3)$. Dengan memilih $\sigma_0 = s^* \in \mathfrak{g}_3^*$ dan dengan menggunakan persamaan (4) maka diperoleh $\mathfrak{g}_3(\sigma_0) = (0)$. Akibatnya ideal $\mathfrak{g}_3[\sigma_0] \subseteq \mathfrak{g}_2(\sigma_0)$ juga (0). Jadi, aljabar enveloping universal $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_3)$ bersifat primitif. Konsekuensinya aljabar Lie $\mathfrak{g}_3 \coloneqq \langle p, q, r, s \rangle$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

KESIMPULAN

Hasil dalam penelitian ini menunjukkan bahwa setiap aljabar enveloping universal dari aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 senantiasa bersifat primitif, yaitu aljabar enveloping universal $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_1), \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_2)$, dan $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_3)$ bersifat primitif. Akibatnya aljabar Lie $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, dan $\mathfrak{g}_3$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

REFERENSI

Alvarez, M. A., Rodríguez-Vallarte, M. C., & Salgado, G. (2018). Contact and Frobenius solvable Lie algebras with abelian nilradical. *Communications in Algebra*. Vol. 46(10), 4344–4354. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1439048

Diatta, A., & Manga, B. (2014). On Properties of Principal Elements of Frobenius Lie Algebras. *Journal of Lie Theory*. Vol. 24(3), 849–864.

Diatta, A., Manga, B., & Mbaye, A. (2020). *On Systems of Commuting Matrices, Frobenius Lie algebras and Gerstenhaber's Theorem*. http://arxiv.org/abs/2002.08737

Gerstenhaber, M., & Giaquinto, A. (2009). The Principal Element of a Frobenius Lie Algebra. *Letters in Mathematical Physics*. Vol. 88(1–3), 333–341. https://doi.org/10.1007/s11005-009-0321-8

Hilgert, J., & Neeb, K.-H. (2012). *Structure and Geometry of Lie Groups*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-84794-8

Malcolmson, P. (1992). Enveloping Algebras of Simple Three-dimensional Lie Algebras. *Journal of Algebra*. Vol. 146(1), 210–218. https://doi.org/10.1016/0021-8693(92)90064-S

Ooms, A. I. (1974). On Lie Algebras Having a Primitive Universal Enveloping Algebra. *Journal of Algebra*. Vol. 32(3), 488–500. https://doi.org/10.1016/0021-8693(74)90154-9

Ooms, A. I. (1976). On Lie Algebras with Primitive Envelopes, Supplements. *Proceedings of the American Mathematical Society*. Vol. 58(1), 67–67. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0430007-6

Ooms, A. I. (2009). Computing Invariants and Semi-invariants by Means of Frobenius Lie Algebras. *Journal of Algebra*. Vol. 321(4), 1293–1312. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.10.026

Pham, D. N. (2016). $\mathfrak{g}$-quasi-Frobenius Lie Algebras. *Archivum Mathematicum*. Vol. 4, 233–262. https://doi.org/10.5817/AM2016-4-233

Rodríguez, J. L. V., Schneider, C., & Usefi, H. (2022). The Isomorphism Problem for Universal Enveloping Algebras of Solvable Lie Algebras. *Journal of Algebra*. Vol. 603, 281–306. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.01.035