Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.18 No.2 (Desember 2024) Hal. 210-219

SIFAT-FK RUANG BARISAN CESARO ORLICZ

Haryadi

Program Studi Ilmu Komputer, Universitas Muhammadiyah Palangkaraya, Indonesia
Jl. RTA Milono Km.1,5 Palangka Raya
email: *haryadi@umpr.ac.id*

ABSTRACT

The Cesaro sequence space ces_p, $(1 \leq p < \infty)$, which is the FK-space, has been generalized to the Cesaro-Orlicz sequence space ces_ϕ. This prompted the study of several properties in ces_ϕ that have been known in ces_p. In this paper, the properties of completeness and FK-properties in the Cesaro-Orlicz space are discussed. For this discussion, a modular approach is used. The results of the study show that the space ces_ϕ is a convex modular space. This sequence space is also complete to the Luxemburg norm and has K-properties. Furthermore, this space is a BK-space. These results can be used to study the Kothe-Toeplitz dual, which is an important part of the transformation of the infinite matrix.

Keywords: modular, Cesaro-Orlicz, FK, BK

ABSTRAK

Ruang barisan Cesaro ces_p, $1 \leq p < \infty$ yang merupakan ruang-FK, telah diperumum ke ruang barisan Cesaro-Orlicz ces_ϕ. Hal ini mendorong untuk menelaah beberapa sifat di ruang ces_ϕ yang telah diketahui berlaku pada ces_p. Di dalam makalah ini dibahas sifat kelengkapan dan sifat-FK pada ruang Cesaro-Orlicz. Untuk pembahasan tersebut digunakan pendekatan modular. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ruang ces_ϕ merupakan ruang modular konveks. Ruang barisan ini juga merupakan lengkap terhadap norma Luxemburg dan memiliki sifat-K. Lebih lanjut ruang ini merupakan ruang-BK. Hasil ini dapat digunakan untuk menelaah dual Kothe-Toeplitz yang merupakan bagian penting dalam tranformasi matriks tak hingga.

Kata kunci: modular, Cesaro-Orlicz, FK, BK

Received: 30 Oktober 2024, Accepted: 25 November 2024, Published: 29 November 2024

PENDAHULUAN

Diketahui ω ruang barisan dengan suku-suku bilangan real. Untuk $1 < p < \infty$, ruang barisan Cesaro ces_p, didefinisikan

$$ces_p = \left\{x \in \omega: \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^p < \infty\right\}.$$

Ruang barisan ces_p merupakan ruang Banach terhadap norma

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^p\right)^{1/p}$$

Ruang barisan ces_p telah banyak ditelaah olah para peneliti. Saejung (2010) mempelajari ruang ces_p sebagai ruang bagian tertutup l_p. Teori ruang-FK (*Frechet-Koordinat*) berperan penting dalam menyelesaikan masalah yang melibatkan keterjumlahan (Akdemir *et al*., 2022). Teori ruang-FK juga merupakan alat yang mudah dan singkat dalam keterjumlahan dan banyak digunakan dalam karakterisasi pemetaan matriks antara ruang barisan (Banas & Mursaleen, 2014). Transformasi matriks dalam ruang-BK memiliki sifat yang penting, yaitu transformasi matriks antara ruang-BK adalah kontinyu (Yaying *et al*., 2023). Sifat-BK juga berperan penting dalam menelaah ruang barisan variasi terbatas (Kirişci, 2014). Salah satu topik penting dalam ruang barisan adalah kekonveksan seperti yang dikerjakan oleh (Chen *et al*., 2016). Bhardwaj & Gupta (2013) melakukan studi ruang barisan selisih terjumlah Cesaro dan memperoleh hasil bahwa ruang barisan tersebut merupakan ruang BK namun tidak memiliki sifat AK. Studi ruang Cesaro-Orlicz yang dilakukan oleh Raj *et al*. (2019) memberikan hasil bahwa ruang tersebut merupakan ruang-BK. Hubungan inklusi antara beberapa ruang barisan yang didefinisikan melalui fungsi Orlicz dilakukan oleh (Mursaleen *et al*., 1999) dan (Faried & Bakery, 2010). Selanjutnya studi pada ruang barisan Cesaro yang diperumum dilengkapi dengan para norma yang dilakukan oleh Rahman & Karim (2016) mengungkapkan bahwa ruang tersebut merupakan ruang lengkap.

Pendefinisian ruang barisan ces_p dikerjakan melalui fungsi $|\cdot|^p$ dengan $1 < p < \infty$ merupakan fungsi konveks, yang merupakan anggota dari kelas fungsi Orlicz. Keadaan demikian telah mendorong para peneliti untuk memperumum ruang barisan ces_p ke ruang barisan Cesaro-Orlicz. Di dalam Bala (2012) ruang barisan Cesaro-Orlicz didefinisikan melalui fungsi modular sebagai berikut

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)$$

dan memperkenakan ruang barisan Cesaro-Orlicz ces_ϕ sebagai berikut:

$$ces_\phi = \{x \in \omega : \rho(\lambda x) < \infty, \text{untuk suatu } \lambda > 0\}$$

Dikarenakan fungsi $\phi^{-1} \circ \phi$ tidak selalu bersifat homogen, maka mendefinisikan norma tidak bisa dikerjakan seperti norma pada ruang ces_p. Kekonveksan fungsi ϕ berakibat ρ merupakan modular konveks, sehingga pada ruang ini dapat dibentuk norma Luxemburg

$$\|x\|_\rho = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 1\right\}.$$

Sifat-sifat topologi ruang barisan ces_{ϕ} diteliti di dalam (Cui *et al*., 2003). Perkembangan lanjut dalam topik ruang barisan Cesaro-Orlicz telah dikerjakan oleh Jalal & Ahmad (2015), Et (2017) dan Sengul (2017) dengan memperumum ruang barisan ces_{ϕ}.

Pentingnya teori ruang-FK dalam transformasi matriks ini dikarenakan transformasi matriks dari ruang-FK ke ruang-FK kontinyu (Malkowsky & Veličković, 2011). Oleh karena itu di dalam makalah ini ditelaah sifat-sifat topologi yang terkait dengan sifat-FK pada ruang barisan ces_{ϕ}, diantaranya sifat kelengkapan, sifat-AK dan sifat-BK.

TINJAUAN PUSTAKA

Persoalan membentuk metriks atau norma pada suatu ruang linear tidak selalu dapat dikerjakan dengan mudah. Persoalan ini telah membawa para peneliti untuk memperkenalkan fungsi modular pada ruang linear. Salah satu ruang linear yang normanya dibentuk melalui fungsi modular adalah ruang barisan Orlicz.

Untuk menelaah makalah ini perlu disampaikan beberapa pengertian yang terkait dengan ruang modular dan ruang barisan Orlicz. Berdasarkan Musielak (1983) dan Kozlowski (1988), pengertian ruang modular beserta beberapa sifatnya disampaikan sebagai berikut. Diberikan ruang linear X. Pseudomodular pada X adalah fungsi $\rho: X \to [0, \infty]$ dengan kondisi-kondisi berikut:

(1) $\rho(\theta) = 0$, dimana θ vektor nol di dalam X
(2) $\rho(-x) = \rho(x)$ untuk setiap $x \in X$, dan
(3) $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha, \beta \geq 0$ dengan $\alpha + \beta = 1$.

Jika $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha, \beta \geq 0$ dengan $\alpha + \beta = 1$, maka pseudomodular ρ dinamakan konveks. Selanjutnya, jika $\rho(x) = 0$ berakibat $x = \theta$ maka ρ dinamakan modular.

Jika ρ modular pada ruang linear X, maka himpunan

$$X_{\rho} = \left\{x \in X: \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0\right\}$$

merupakan ruang linear. Lebih lanjut jika ρ konveks, maka X_{ρ} merupakan ruang bernorma terhadap norma Luxemburg

$$\|x\|_{\rho} = inf\left\{\varepsilon > 0: \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 1\right\}.$$

Selanjutnya X_{ρ} dinamakan ruang modular.

Di dalam ruang modular disamping dikenal kekonvergenan terhadap norma, juga ada jenis kekonvergenan lainya, yaitu kekonvergenan modular. Barisan (x_k) di dalam X_{ρ} dikatakan konvergen modular, selanjutnya ditulis konvergen-ρ, ke x_0 jika terdapat $\lambda > 0$ sehingga $\rho\big(\lambda(x_k - x_0)\big) \to 0$ jika $k \to \infty$. Setiap barisan yang konvergen terdapat norma $\|\cdot\|_\rho$ merupakan barisan konvergen-ρ. Sebaliknya, barisan yang konvergen-ρ belum tentu konvergen terdapat norma $\|\cdot\|_\rho$. Teorema berikut menyatakan sifat norma Luxemburg dan kekonvergenan di ruang modular.

Teorema 1. (Musielak, 1983) Diberikan ruang modular X_ρ dan $x_k, x \in X_\rho, k = 1,2,\cdots$.

(i) Jika $\|x\|_\rho \leq 1$, maka $\rho(x) \leq \|x\|_\rho$.

(ii) $lim_{k\to\infty}\|x_k - x\|_\rho \to 0$ jika dan hanya jika $\lim_{k\to\infty} \rho\big(\lambda(x_k - x)\big) \to 0$ untuk setiap $\lambda > 0$.

Uraian tentang fungsi-N mengacu pada (Krasnosel'skii & Rutickii, 1961) dan (Rao & Ren, 2002) . Fungsi ϕ dinamakan fungsi-N jika dapat direpresentasikan dengan $\phi(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$ dimana p adalah fungsi kontinyu kanan untuk $t \geq 0$, $\phi(t) > 0$ untuk setiap $t > 0$, naik monoton, konveks, $p(0) = 0$, dan $p(t) \to \infty$ jika $t \to \infty$. Berdasarkan definisi tersebut, fungsi ϕ memiliki sifat $\phi(-u) = \phi(u)$, naik monoton untuk $u \geq 0$, $\phi(0) = 0$, $\phi(u) \to \infty$ jika $u \to \infty$ dan konveks. Dengan demikian fungsi Orlicz dapat dikatakan generalisasi dari fungsi $|\cdot|^p$ dengan $1 \leq p < \infty$.

Notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real. Diberikan ruang barisan ω. Angota ω dituliskan $x = (x_k)$ atau $x = (x_k)_{k=1}^\infty$. Barisan yang semua sukunya nol dituliskan dengan θ. Notasi (x^n) menyatakan barisan dengan suku-suku anggota ω, yakni $x^n = (x_k^n)_{k=1}^\infty$ untuk setiap n. Salah satu topik penting di dalam ruang barisan adalah kelengkapan. Oleh karena itu perlu disampaikan kembali beberapa pengertian yang terkait dengan kelengkapan.

Diberikan ruang barisan $X \subset \omega$. Jika X dilengkapi dengan metriks sehingga dengan metriks tersebut X merupakan ruang lengkap, maka X dinamakan ruang *Frechet*. Ruang X dinamakan ruang-K jika untuk setiap bilangan asli k pemetaan $P_k: X \to \mathbb{R}$ dengan $P_k(x) = x_k$ kontinyu. Jika X merupakan ruang Banach (ruang Frechet), maka X dinamakan ruang-BK (ruang-FK). Selanjutnya jika X ruang-FK maka X dikatakan memiliki sifat-AK jika $X \supset \emptyset$ dan $x = \lim_{m\to\infty} x^{[m]}$ untuk setiap $x \in X$, dimana $x^{[m]} = (x_1, x_2, \cdots x_m, 0,0, \cdots)$ dan $\emptyset$ himpunan semua barisan $x^{[m]}, m = 1,2,\cdots$ (Malkowsky & Veličković, 2011).

METODE PENELITIAN

Seperti telah diuraikan di awal sub bagian Pendahuluan, untuk $1 \leq p < \infty$ dari definisi ruang barisan ces_p dapat dibentuk norma $\|\cdot\|$. Cara membentuk norma demikian tidak selalu dapat dikerjakan dengan mudah untuk setiap fungsi Orlicz ϕ. Oleh karena itu di dalam makalah ini, norma di ruang barisan ces_ϕ dikonstruksi melalui modular. Mengingat ruang ces_ϕ merupakan perumuman ruang ces_p, hasil-

hasil yang telah dikerjakan penulis lain pada ruang barisan ces_p yang terkait dengan sifat FK dikaji kemungkian untuk dijadikan bahan pembahanan di ruang ces_ϕ.

Sifat-FK (BK) terkait secara langsung dengan kekonvergenan. Pada ruang modular ada dua jenis kekonvergenan, yaitu kekonvergenan modular dan kekonvergenan norma, dimana kedua jenis kekonvergenan tidak selalu ekivalen. Oleh karena itu pembahasan sifat-FK ruang barisan ces_ϕ dilakukan khususnya dengan pendekatan teori modular.

Untuk menunjukkan bahwa ruang barisan ces_ϕ merupakan ruang-FK dilakukan dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:

(1) Dibuktikan bahwa ruang barisan ces_ϕ merupakan ruang lengkap terhadap modular ρ.
(2) Selanjutnya dibuktikan bahwa ruang tersebut merupakan ruang lengkap terhadap norma Luxemburg. Untuk membuktikan tahapan ini diperlukan tahapan (1), sebab norma Luxemburg dikonstruksi melalui modular.
(3) Tahap berikutnya adalah dibuktikan bahwa ruang tersebut ruang-K, yakni pemetaan $P_k : ces_\phi \to \mathbb{R}$ dengan $P_k(x) = x_k$, $k = 1,2,\cdots$ bersifat kontinyu.
(4) Berdasarkan hasil (2) dan (3) disimpulkan bahwa ces_ϕ merupakan ruang-FK.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk membahas kelengkapan ruang ces_ϕ, perlu disampaikan kembali sifat barisan Cauchy di ruang ces_ϕ. Barisan (x^m) dinamakan barisan Cauchy jika $\|x^m - x^l\|_\rho \to 0$ untuk $m, l \to \infty$. Jadi pengertian barisan Cauchy di ruang ces_ϕ adalah barisan Cauchy terhadap norma Luxemburg $\|\cdot\|_\rho$. Sedangkan barisan (x^m) merupakan barisan Cauchy-ρ jika ada $\lambda > 0$ sehingga $\rho(\lambda(x^m - x^l) \to 0$ jika $m, l \to \infty$.

Diberikan (x^m) barisan Caucy di ces_ϕ. Akibatnya untuk sebarang $\lambda > 0$ berlaku $\|\lambda(x^m - x^l)\|_\rho \to 0$ jika $m, l \to \infty$. Oleh karena itu untuk sebarang ε dengan $0 < \varepsilon < 1$, ada bilangan asli n_0 sehingga jika $m, k \geq n_0$ berlaku $\|\lambda(x^m - x^l)\|_\rho < \varepsilon$. Selanjutnya berdasarkan Teorema 1 (i),

$$\rho\Big(\lambda(x^m - x^l)\Big) \leq \|\lambda(x^m - x^l)\|_\rho < \varepsilon \qquad (m, l \geq n_0)$$

yang berarti (x^m) barisan Cauchy-ρ. Sebaliknya, jika untuk sebarang $\lambda > 0$ berlaku $\rho\Big(\lambda(x^m - x^l)\Big) \to 0$ jika $m, l \to \infty$, maka ada bilangan asli n_0 sehingga jika $m, l \geq n_0$,

$$\rho\left(\frac{x^m - x^l}{1/\lambda}\right) = \rho\Big(\lambda(x^m - x^l)\Big) < 1/\lambda$$

Oleh karena itu untuk sebarang $\lambda > 0$,

$$\|x^m - x^l\|_\rho = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \rho\left(\frac{x^m - x^l}{\varepsilon}\right) \leq 1\right\} < \frac{1}{\lambda}, \qquad (m, l \geq n_0)$$

yang berarti (x^m) merupakan barisan Cauchy. Jadi (x^m) merupakan barisan Cauchy jika dan hanya jika $\rho(\lambda(x^m - x^l) \to 0$ jika $m, l \to \infty$ untuk setiap $\lambda > 0$. Sifat ini akan digunakan untuk menunjukkan kelengkapan ruang barisan ces_ϕ.

Teorema 2. Setiap barisan Cauchy-ρ di dalam ces_ϕ konvergen-ρ ke suatu $x \in ces_\phi$.

Bukti: Diketahui (x^m) barisan Cauchy-ρ di dalam ces_ϕ, yakni terdapat $\lambda > 0$ sehingga $\rho\big(\lambda(x^m - x^l)\big) \to 0$ jika $m, l \to \infty$. Akan ditunjukan terlebih dahulu bahwa untuk setiap k terdapat x_k sehingga $|x_k^m - x_k| \to 0$ jika $m \to \infty$. Untuk sebarang bilangan asli n,

$$\phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda\left|x_k^m - x_k^l\right|\right) \leq \rho\big(\lambda(x^m - x^l)\big).$$

Karena ϕ kontinyu, maka $\left|x_k^m - x_k^l\right| \to 0$ untuk setiap k jika $m, l \to \infty$. Dengan demikian $(x_k^m)_{m=0}^{\infty}$ merupakan barisan Cauchy didalam $\mathbb{R}$. Kelengkapan $\mathbb{R}$ berakibat terdapat bilangan x_k sehingga $|x_k^m - x_k| \to 0$ jika $m \to \infty$. Selanjutnya dibentuk barisan $x = (x_k)$. Diambil sebarang bilangan asli N dan sebarang $\varepsilon > 0$. Terdapat bilangan asli $m(k)$ sehingga $|x_k^m - x_k| < \frac{\varepsilon}{\lambda 2^N}$ untuk setiap $m \geq m(k)$. Oleh karena itu jika $m \geq m_0$ dengan $m_0 = maks\{m(k) : 1 \leq k \leq N\}$, maka

$$\sum_{n=1}^{N} \phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda|x_k^m - x_k|\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^N}\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^N}\phi(1) < \varepsilon$$

Karena N sebarang bilangan asli, maka

$$\rho\big(\lambda(x^m - x)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda|x_k^m - x_k|\right) < \varepsilon \quad (m \geq m_0)$$

Dengan demikian barisan (x^m) konvergen-ρ ke x.

Selanjutnya diambil $\alpha = \frac{\lambda}{2}$. Berdasarkan pengkonstruksian x,

$$\begin{aligned}\rho(\alpha x) = \rho(\alpha(x - x^m + x^m) &\leq \frac{1}{2}\rho\big(2\alpha(x - x^m)\big) + \frac{1}{2}\rho(2\alpha x^m)\\ &= \frac{1}{2}\rho\big(\lambda(x - x^m)\big) + \frac{1}{2}\rho(\lambda x^m) < \infty\end{aligned}$$

yang berarti $x \in ces_\phi$.

Teorema 3. Ruang barisan ces_ϕ merupakan ruang lengkap terhadap norma $\|\cdot\|_\rho$.

Bukti: Diketahui (x^m) barisan Cauchy di dalam ces_ϕ, yakni $\|x^m - x^l\|_\rho \to 0$ jika $m, l \to \infty$. Berdasarkan Teorema 1 (ii), untuk sebarang $\lambda > 0$, $\rho\Big(\lambda(x^m - x^l)\Big) \to 0$ jika $m, l \to \infty$, sehingga berdasarkan Teorema 2, (x^m) konvergen-ρ ke suatu $x \in ces_\phi$, yakni $\rho\big(\lambda(x^m - x)\big) \to 0$ jika $m \to \infty$. Karena $\lambda > 0$ sebarang maka $\|x^m - x\|_\rho \to 0$ jika $m \to \infty$.

Teorema 4. Ruang ces_ϕ merupakan ruang-*K*.
Bukti: Akan ditunjukkan bahwa pemetaan $P_k: ces_\phi \to \mathbb{R}$, dengan $P_k(x) = x_k, k = 1,2,3,\cdots$ kontinyu. Diambil sebarang barisan (x^m) di dalam ces_ϕ sehingga $\|x^m - x\|_\rho \to 0$ untuk suatu $x \in ces_\phi$. Dengan demikian untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan $\lambda > 0$, $\rho\big(\lambda(x^m - x)\big) \to 0$ jika $m \to \infty$. Dengan menggunakan cara seperti pada bukti Teorema 2, diperoleh $|x_k^m - x_k| \to 0$ untuk setiap k. Oleh karena itu

$$|P_k(x^m) - P_k(x)| = |x_k^m - x_k| \to 0$$

jika $m \to \infty$, yakni P_k kontinyu.

Teorema 4 dapat dinterpretasikan bahwa ruang ces_ϕ memiliki sifat koordinat yang kontinyu. Selanjutnya berdasarkan Teorema 3 dan 4, diperoleh akibat berikut.

Akibat 5. Ruang ces_ϕ merupakan ruang-FK.

Dengan demikian berdasarkan Teorema 3 ruang barisan ces_ϕ merupakan ruang Banach dengan norma $\|\cdot\|_\rho$, sehingga berdasarkan Teorema 4, ruang barisan ces_ϕ merupakan ruang-BK.

Selanjutnya untuk menelaah sifat-AK dari ruang barisan ces_ϕ, perlu disampaikan terlebih dahulu lemma berikut.

Lemma 6. Jika $x \in ces_\phi$, maka $\rho(\lambda\big(x^{[m]} - x\big) \to 0$ jika $m \to \infty$ untuk setiap $\lambda > 0$.

Bukti: Diambil sebarang $x \in ces_\phi$ dan diambil sebarang $\lambda > 0$. Untuk sebarang bilangan asli n, jika $m \geq n$ maka berlaku

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda \left| x_k^{[m]} - x_k \right| = 0$$

Karena n sebarang bilangan asli, maka

$$\rho\big(\lambda(x^{[m]} - x\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda \left| x_k^{[m]} - x_k \right|\right) \to 0$$

jika $m \to \infty$.

Berdasarkan Lemma 6 dan Teorema 1 diperoleh hasil berikut.

Teorema 7. Untuk setiap $x \in ces_\phi$ berlaku $\left\|x^{[m]} - x\right\|_\rho \to 0$ jika $m \to \infty$.

Salah satu penerapan sifat-FK adalah dalam permasalahan mencari ruang dual Kothe-Toeplitz. Perlu disampaikan kembali Teorema Hahn-Banach, yakni jika (Λ^n) adalah barisan operator linear kontinyu dan $\Lambda^n \to \Lambda$, maka Λ operator linear kontinyu (Rudin, 1991).

Lemma 8. Pemetaan $\Lambda^n: ces_\phi \to \mathbb{R}$ dengan

$$\Lambda(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

merupakan operator linear kontinyu.

Bukti: Diketahui (x^m) barisan di dalam ces_ϕ sehingga $x^m \to \theta$. Karena ces_ϕ merupakan ruang-FK maka $x_k^m \to 0$ jika $m \to \infty$ untuk setiap bilangan asli k. Oleh karena itu jika $m \to \infty$, maka

$$|\Lambda^n(x^m)| \leq \sum_{k=1}^{n} |y_k| \cdot |x_k^m| \to 0$$

Teorema 9. Jika untuk setiap $(x_k) \in ces_\phi$, $\Lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ konvergen, maka Λ merupakan operator linear kontinyu pada ces_ϕ.

Bukti: Diambil sebarang $(x_k) \in ces_\phi$. Berdasarkan Lemma 8, Λ^n kontinyu untuk setiap n. Lebih lanjut $\Lambda^n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \to \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \Lambda(x)$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema Hahn-Banach, Λ kontinyu.

KESIMPULAN

Ruang barisan Cesaro-Orlicz ces_ϕ merupakan ruang lengkap terhadap norma Luxemburg. Lebih lanjut, ruang barisan tersebut merupakan ruang-FK dan ruang-BK. Berdasarkan hasil tersebut, terbuka kemungkinan untuk meneliti topik lebih lanjut, diantaranya menelaah transformasi matriks tak hingga di ruang barisan Cesaro-Orlicz.

REFERENSI

Akdemir, A. O., Ersoy, M. T., Furkan, H., & Ragusa, M. A. (2022). Some Functional Sections in Topological Sequence Spaces. *Journal of Function Spaces*. Vol. 2022, 1–7. https://doi.org/10.1155/2022/6449630

Bala, I. (2012). On Cesàro Sequence Space Defined by An Orlicz Function. *Communications in Mathematics and Applications*. Vol. 3(2), 197–204. http://www.rgnpublications.com

Banas, J., & Mursaleen, M. (2014). *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations*. Springer.

Bhardwaj, V. K., & Gupta, S. (2013). Cesàro Summable Difference Sequence Space. *Journal of Inequalities and Applications*. Vol. 315, 1–9. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-315

Chen, L., Chen, D., & Jiang, Y. (2016). Complex Convexity of Orlicz Modular Sequence Spaces. *Journal of Function Spaces*. Vol. 2016, 1–6. https://doi.org/10.1155/2016/5917915

Cui, Y., Hudzik, H., Petrot, N., Suantai, S., & Szymaszkiewicz, A. (2003). Basic Topological and Geometric Properties of Cesàro-Orlicz spaces. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci*). Vol. 115(4), 461–476.

Et, M. (2017). Generalized Cesàro Summable Difference Sequence Spaces. *ITM Web of Conferences*. Vol. 13, 1–5. https://doi.org/10.1051/itmconf/20171301007

Faried, N., & Bakery, A. A. (2010). The Difference Sequence Space Defined on Orlicz-Cesaro Function. *Journal of American Science*. Vol. 6(10), 25–30. http://www.americanscience.orgeditor@americanscience.org

Jalal, T., & Ahmad, R. (2015). A New Generalized Vector-valued Paranormed Sequence Space Using Modulus Function. *Malaya J. Mat*. Vol. 3(1), 110–118.

Kirişci, M. (2014). *The sequence space bv and some applications*. http://arxiv.org/abs/1403.1720

Kozlowski, W. (1988). *Modular Function Spaces*. Marcer Dekker, Inc.

Krasnosel'skii, M. A., & Rutickii, Y. B. (1961). *Convex Functions and Orlicz Spaces* (L. Boron, Trans.).

Malkowsky, E., & Veličković, V. (2011). Topologies of Some New Sequence Spaces, Their Duals, and The Graphical Representations of Neighborhoods. *Topology and Its Applications*. Vol. 158(12), 1369–1380. https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.05.011

Mursaleen, Khan, M., & Qamaruddin. (1999). Difference Sequence Spaces Defined by Orlicz Functions. *Demonstratio Mathematica*. Vol. XXXII(1), 145–150.

Musielak, J. (1983). *Orlicz Spaces and Modular Spaces* (A. Dold & B. Eckmann, Eds.). Springer-Verlag.

Rahman, M. F., & Karim, R. (2016). Dual Spaces of Generalized Cesaro Sequence Space and Related Matrix Mapping. *International Journal of Mathematics and Statistics Invention (IJMSI).* Vol. 4(4), 44–50. www.ijmsi.org

Raj, K., Anand, R., & Pandoh, S. (2019). Cesàro Orlicz Sequence Spaces and Their Kothe-Toeplitz Duals. *Math. J. Okayama Univ*. Vol. 61, 141–158.

Rao, M. M., & Ren, Z. D. (2002). *Applications Of Orlicz Spaces*. CRC Press.

Rudin, W. (1991). *Functional Analysis* (2nd ed.). McGraw-Hill.

Saejung, S. (2010). Another Look at Cesàro Sequence Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 366(2), 530–537. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.01.029

Sengul, H. (2017). Some Cesàro-Type Summability Spaces Defined By A Modulus Function of Order (α,β). *Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1*. Vol. 66(2), 80–90. https://doi.org/10.1501/Com

Yaying, T., Hazarika, B., Mohiuddine, S. A., & Et, M. (2023). On Sequence Spaces Due to lth Order q-Difference Operator and its Spectrum. *Iranian Journal of Science*. Vol. 47(4), 1271–1281. https://doi.org/10.1007/s40995-023-01487-7