



SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL CAPUTO MENGGUNAKAN POLINOMIAL INTERPOLASI KUADRATIK

Zulkarnain^{1*}, Imran M.², Khozin Mu'tamar³, Supriadi Putra⁴

^{1,2,3,4}Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Riau, Indonesia
Kampus Bina Widya KM. 12,5, Simpang Baru, Kec. Tampan,
Kota Pekanbaru, Riau 28293
email: zulkarnain87@lecturer.unri.ac.id

ABSTRACT

This study investigates the numerical solution of fractional differential equations using the Caputo fractional derivative of order $0 < \alpha < 1$. The proposed method is based on the analytical properties of fractional differential equations, which can be reformulated as nonlinear Volterra integral equations of the second kind. A quadratic polynomial interpolation is employed to approximate the solution of the integral equation. Numerical simulations are conducted to evaluate the accuracy and efficiency of the proposed method and to compare its performance with several existing numerical methods. The numerical simulations indicate that the proposed method performs better than the two benchmark methods over short time intervals, especially when using larger step sizes. This makes it more efficient by reducing the overall computational cost.

Keywords: fractional differential equations, Caputo fractional derivative, Volterra integral equation, quadratic interpolation, numerical method

ABSTRAK

Penelitian ini membahas solusi numerik untuk persamaan diferensial fraksional dengan menggunakan turunan fraksional Caputo berorde $0 < \alpha < 1$. Metode yang diusulkan didasarkan pada sifat analitik dari persamaan diferensial fraksional, yang dapat diubah menjadi persamaan integral Volterra nonlinier jenis kedua. Untuk memperoleh solusi numerik, digunakan pendekatan interpolasi polinomial kuadratik terhadap bentuk integral tersebut. Simulasi numerik dilakukan untuk menguji keakuratan dan efisiensi metode yang dikembangkan, serta untuk membandingkannya dengan beberapa metode numerik lain yang telah ada. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa metode yang diusulkan memiliki kinerja yang lebih baik dibandingkan dua metode pembandingan pada interval waktu yang pendek, terutama saat menggunakan langkah h yang lebih besar. Hal ini menjadikan metode tersebut lebih efisien karena memerlukan biaya komputasi yang lebih rendah.

Kata kunci: persamaan diferensial fraksional, turunan fraksional Caputo, persamaan integral Volterra, interpolasi kuadratik, metode numerik

Received: 7 May 2025, Accepted: 24 June 2025, Published: 27 June 2025

PENDAHULUAN

Kalkulus fraksional, yang merupakan generalisasi dari kalkulus klasik, telah menarik perhatian yang signifikan dalam beberapa dekade terakhir karena kemampuannya dalam memodelkan fenomena kompleks di berbagai bidang seperti fisika, teknik, biologi, dan keuangan (Kilbas *et al.*, 2006; Li *et al.*, 2013; Ray *et al.*, 2014). Berbeda dengan turunan berorde bilangan bulat, turunan fraksional mengandung sifat memori, sehingga sangat cocok untuk menggambarkan sistem dengan ketergantungan jangka panjang (Metzler & Klafter, 2000). Diantara berbagai definisi turunan fraksional, turunan fraksional Caputo paling banyak digunakan karena memungkinkan penyertaan kondisi awal dengan turunan biasa, sehingga lebih aplikatif dalam permasalahan dunia nyata (Li & Zeng, 2015).

Persamaan diferensial yang melibatkan turunan Caputo telah menjadi aspek fundamental dalam studi sistem dinamik fraksional. Namun, memperoleh solusi analitik dari persamaan ini sering kali sulit, sehingga diperlukan pengembangan metode numerik yang andal (Diethelm & Ford, 2010). Kesetaraan antara persamaan diferensial fraksional dengan turunan fraksional Caputo dan persamaan integral Volterra nonlinier jenis kedua membuka peluang untuk pendekatan numerik, karena persamaan integral sering kali lebih mudah didiskretisasi secara efektif (Brunner, 2004). Beberapa teknik numerik telah diusulkan untuk menyelesaikan persamaan integral ini, termasuk interpolasi polinomial, metode spektral, dan skema beda hingga (Li & Zeng, 2015; Lin & Xu, 2007).

Dalam beberapa tahun terakhir, penerapan turunan fraksional telah berkembang pesat, terutama dalam pemodelan sistem kompleks di bidang sains dan teknik. Sebagai contoh, turunan fraksional telah digunakan untuk menggambarkan perilaku material viskoelastis (Mainardi, 2022), memodelkan penyebaran penyakit menular dengan efek memori (Area *et al.*, 2015), dan mengoptimalkan sistem kontrol dalam robotika (Chávez-Vázquez *et al.*, 2022). Aplikasi ini menegaskan pentingnya pengembangan metode numerik yang akurat dan efisien untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional, karena metode tersebut sangat krusial bagi kemajuan penelitian di bidang-bidang tersebut.

Berbagai metode numerik telah dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional bertipe Caputo. Metode kolokasi B-spline fraksional khusus untuk persamaan diferensial fraksional bertipe Caputo yang akurat dan efisien telah dikembangkan oleh Jafari (Jafari *et al.*, 2013). Selanjutnya, Yan menggunakan pendekatan kuadratur konvolusi yang melibatkan transformasi persamaan diferensial fraksional menjadi persamaan integral Abel-Volterra untuk memperoleh solusi hampiran pada suatu interval tertentu (Yan *et al.*, 2014). Kemudian Garrappa melakukan survey terhadap beberapa metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional dan memberikan prosedur Matlab yang dirancang khusus untuk menyelesaikan permasalahan tersebut (Garrappa,

2018). Hasil reviewnya menggarisbawahi adanya efek memori pada solusi numerik dan penyelesaian sistem nonlinier yang menjadi ciri khas dari metode implisit.

Tujuan artikel ini adalah memberikan suatu solusi numerik dari persamaan diferensial fraksional menggunakan turunan fraksional Caputo dengan orde $0 < \alpha < 1$. Dengan memanfaatkan sifat analitik persamaan diferensial fraksional Caputo serta kesetaraannya dengan persamaan integral Volterra jenis kedua, kami mengusulkan metode numerik berbasis interpolasi polinomial kuadrat yang menghasilkan metode prediktor korektor untuk menghindari solusi hampiran implisit. Pendekatan ini bertujuan untuk mencapai keseimbangan antara efisiensi komputasi dan akurasi, sehingga menjadi alternatif kompetitif dibandingkan metode yang telah ada. Simulasi numerik dilakukan untuk memvalidasi metode yang diusulkan serta membandingkan kinerjanya dengan metode numerik lain.

Artikel ini disusun dengan struktur sebagai berikut: bagian 2 menyajikan tinjauan pustaka yang diperlukan mengenai kalkulus fraksional dan turunan Caputo. Bagian 3 menjelaskan perumusan metode numerik serta implementasinya. Bagian 4 menyajikan hasil simulasi numerik dan perbandingan dengan metode yang telah ada. Terakhir, Bagian 5 menyimpulkan makalah ini dengan pembahasan temuan serta potensi pengembangan di masa mendatang.

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini disajikan beberapa definisi utama serta hasil-hasil penelitian terdahulu sebagai landasan teoritis bagi pengembangan metode dalam penelitian ini.

1. Teori Dasar

Definisi 1. Operator integral fraksional Riemann-Liouville dengan orde $\alpha \geq 0$, dari suatu fungsi f didefinisikan sebagai

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad \alpha > 0, t > 0,$$

$$J_0 f(t) = f(t).$$

Definisi 2. Turunan fraksional Caputo dengan orde $\alpha > 0$ dari suatu fungsi $f \in C^m[a, b], m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$ didefinisikan sebagai

$$D_*^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} f^{(m)}(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds.$$

Teorema 1. (Formula Taylor yang diperumum) Misalkan $D_*^{k\alpha} f(t) \in C(0, a]$ untuk $k = 0, 1, \dots, n+1$, dengan $0 < \alpha \leq 1$, maka berlaku

$$f(t) = \sum_{i=0}^n \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} (D_*^{i\alpha} f)(0) + \frac{(D_*^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} t^{(n+1)\alpha},$$

dengan $0 \leq \xi \leq t, \forall t \in (0, a]$.

Perhatikan persamaan diferensial fraksional menggunakan turunan fraksional Caputo berikut

$$D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad (1)$$

dengan kondisi awal

$$y(0) = y_0. \quad (2)$$

Misalkan interval $[0, a]$ dibagi menjadi n subinterval $[t_j, t_{j+1}]$ dengan lebar $h = a/n$, sehingga $t_j = jh, j = 0, \dots, n$. Selanjutnya ekspansi $y(t)$ dengan menggunakan formula Taylor yang diperumum pada Teorema 1 disekitar $t = t_0 = 0$ adalah

$$y(t) = y(t_0) + (D_*^\alpha y(t))(t_0) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + (D_*^{2\alpha} y(t))(\xi) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \quad (6)$$

dengan $0 \leq \xi \leq t$. Untuk $t = t_1$, persamaan (6) dapat ditulis menjadi

$$y(t_1) = y(t_0) + f(t_0, y(t_0)) \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + (D_*^{2\alpha} y(t))(c_1) \frac{h^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

karena $(D_*^\alpha y(t))(t_0) = f(t_0, y(t_0))$ dan $h = t_1$. Untuk lebar interval h yang cukup kecil, suku dengan orde 2 dapat diabaikan sehingga diperoleh

$$y(t_1) = y(t_0) + f(t_0, y(t_0)) \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Disini, $y(t_1)$ merupakan hampiran solusi persamaan (1)-(2) pada saat $t = t_1$. Secara umum, solusi dari persamaan (1) and (2) dapat dihamperi dengan persamaan

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_j, y(t_j)), \quad (3)$$

dengan $t_{j+1} = t_j + h$ untuk $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Persamaan (3) disebut metode fraksional Euler untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional. Jika $\alpha = 1$, maka persamaan (3) akan menghasilkan metode Euler klasik untuk menyelesaikan masalah nilai awal (Atkinson *et al.*, 2009).

2. Penelitian Terdahulu

Persamaan (1)-(2) dapat diselesaikan dengan memanfaatkan sifat turunan fraksional Caputo. Diethelm & Ford (2010) menjelaskan bahwa solusi dari persamaan (1) ekuivalen dengan solusi dari persamaan integral Volterra jenis kedua berikut ini

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \quad (4)$$

Untuk memperoleh solusi hampiran dari persamaan (4), Diethelm *et al.* (2004) menghampiri fungsi $f(s, y(s))$ pada ruas kanan dengan suatu polinomial linier sepotong-sepotong pada tiap subinterval $[t_k, t_{k+1}]$, sehingga diperoleh

$$y_{k+1} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^P) \right), \quad (5)$$

dengan $y_{k+1} = y(t_{k+1})$ dan koefisien $a_{j,k}$ diberikan oleh

$$a_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \times \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha, & j=0 \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq k \\ 1, & j=k+1 \end{cases} \quad (6)$$

Perhatikan bahwa pada persamaan (5) terdapat suku y_{k+1} pada kedua ruas, sehingga diperlukan suatu formula prediktor untuk menentukan nilai y_{k+1}^P pada ruas kanan. Untuk itu, Diethelm kembali menggunakan persamaan (4) tetapi menggunakan hampiran polinomial konstan untuk menghampiri fungsi $f(s, y(s))$ pada ruas kanan. Formula prediktor untuk menghitung y_{k+1}^P diperoleh sebagai berikut

$$y_{k+1}^P = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j) \right), \quad (7)$$

dengan koefisien $b_{j,k+1}$ diberikan oleh persamaan

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha), j = 0, 1, \dots, k.$$

Persamaan (5) dan (7) dikenal sebagai formula prediktor-korektor Diethelm untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional.

Selanjutnya Odibat (Odibat & Momani, 2008) memodifikasi formula prediktor Diethelm dengan menggunakan metode fraksional Euler, tetapi tetap menggunakan persamaan (5) sebagai korektor. Formula prediktor-korektor Odibat diberikan oleh persamaan

$$y_{k+1} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^P) \quad (8)$$

$$y_{k+1}^P = y_k + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (9)$$

dimana $a_{j,k+1}$ diberikan oleh persamaan (6).

Pada penelitian ini, polinomial kuadrat akan digunakan untuk menghampiri $f(s, y(s))$ pada ruas kanan persamaan (4). Selanjutnya, metode fraksional Euler akan digunakan sebagai formula prediktor pada metode baru yang dihasilkan.

METODE PENELITIAN

Misalkan interval $[0, a]$ dibagi menjadi sejumlah genap subinterval $[t_{2i}, t_{2i+2}]$ dengan $t_{2i+2} = t_{2i} + 2h$ untuk suatu lebar interval h yang tetap. Pandey

(Pandey & Agrawal, 2015) menyatakan bahwa polinomial interpolasi kuadrat untuk $f(t)$ pada interval $[0, a]$ diberikan oleh

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) = & \frac{-(t - t_{2i+1})}{2h} \left(1 - \frac{t - t_{2i+1}}{h}\right) f(t_{2i}) + \left(1 - \left(\frac{t - t_{2i+1}}{h}\right)^2\right) f(t_{2i+1}) \\ & + \frac{t - t_{2i+1}}{2h} \left(1 + \frac{t - t_{2i+1}}{h}\right) f(t_{2i+2}). \end{aligned} \quad (10)$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa persamaan (1) dapat ditulis menjadi

$$y(t) = y(0) + J^\alpha f(t, y(t)). \quad (11)$$

Hampiran dari $J^\alpha f(t, y(t))$ dengan menggunakan persamaan (10) sebagai hampiran bagi $f(t, y(t))$ diberikan oleh Lema 1 berikut.

Lema 1. (Kumar *et al.*, 2019) Misalkan $f \in C^3[0, \delta]$ dan interval $[0, \delta]$ dibagi menjadi sejumlah genap subinterval $[t_{2i}, t_{2i+2}]$ dengan $t_i = ih$ dan $h = \frac{\delta}{2n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2n$. Misalkan $\tilde{f}$ yang diberikan oleh persamaan (10) merupakan hampiran polinomial kuadrat untuk f pada subinterval $[t_{2i}, t_{2i+2}]$, maka hampiran kuadrat $IQ(f, h, \alpha)$ dari operator J^α diberikan oleh

$$IQ(f, h, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (A_{in}f(t_{2i}) + B_{in}f(t_{2i+1}) + C_{in}f(t_{2i+2})),$$

dengan

$$\begin{aligned} A_{in} = & \frac{2^\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+3)} [(n-i-1)^{\alpha+1}(2-\alpha+4i-4n) \\ & + (n-i)^\alpha(2+\alpha^2+4i^2+i(6-8n)+3\alpha(1+i-n)-6n+4n^2)] \\ B_{in} = & \frac{2^{\alpha+2} h^\alpha}{\Gamma(\alpha+3)} ((n-i-1)^{\alpha+1}(\alpha-2i+2n) + (n-i)^{\alpha+1}(2+\alpha+2i-2n)) \\ C_{in} = & -\frac{2^\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+3)} ((n-i)^{\alpha+1}(2+\alpha+4i-4n) \\ & + (n-i-1)^\alpha(\alpha^2+2i-3\alpha i+4i^2-2n+3\alpha n-8in+4n^2)) \end{aligned}$$

Bukti. Lihat (Kumar *et al.*, 2019).

Dengan menggunakan Lema 1 pada persamaan (11) diperoleh

$$y(t_{2n}) = y(0) + \sum_{i=0}^{n-1} (A_{in}f(t_{2i}, y_{2i}) + B_{in}f(t_{2i+1}, y_{2i+1}) + C_{in}f(t_{2i+2}, y_{2i+2})), \quad (12)$$

dimana $y(t_i) = y_i$. Perhatikan bahwa untuk $n = 1$, persamaan (12) menjadi

$$y_2 = y_0 + A_{01}f(t_0, y_0) + B_{01}f(t_1, y_1) + C_{01}f(t_2, y_2^P). \quad (13)$$

Ruas kanan persamaan (13) memuat y_1 dan y_2 yang belum diketahui. Untuk itu, kita menggunakan metode fraksional Euler sebagai prediktor, sehingga diperoleh

$$y_1^P = y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_0, y_0),$$

$$y_2^P = y_1 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_1, y_1^P).$$

Jadi, secara umum metode baru yang kita peroleh untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional yang diberikan oleh persamaan (1) dan (2) adalah

$$y_{2n} = y_0 + \sum_{i=0}^{n-2} (A_{in}f(t_{2i}, y_{2i}) + B_{in}f(t_{2i+1}, y_{2i+1}) + C_{in}f(t_{2i+2}, y_{2i+2})) + A_{n-1,n}f(t_{2n-2}, y_{2n-2}) + B_{n-1,n}f(t_{2n-1}, y_{2n-1}^P) + C_{n-1,n}f(t_{2n}, y_{2n}^P) \quad (14)$$

dengan

$$y_{2n-1}^P = y_{2n-2} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_{2n-2}, y_{2n-2}),$$

$$y_{2n}^P = y_{2n-1} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_{2n-1}, y_{2n-1}^P), \quad n = 1, 2, \dots$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan hasil dari simulasi numerik yang dilakukan untuk mengevaluasi keakuratan dan efisiensi metode yang diusulkan dalam menyelesaikan persamaan diferensial fraksional dengan turunan Caputo berorde $0 < \alpha < 1$. Simulasi dilakukan dengan menerapkan pendekatan interpolasi polinomial kuadratik terhadap bentuk integral Volterra nonlinier hasil transformasi dari persamaan diferensial fraksional yang diberikan pada persamaan (4). Tujuan simulasi ini adalah untuk mengamati perilaku solusi numerik yang dihasilkan oleh metode baru yang diberikan oleh persamaan (14), serta membandingkan dengan metode Diethelm dan Odibat yang diberikan oleh persamaan (5)-(7) dan (8)-(9).

Ruang lingkup simulasi mencakup sejumlah kasus dengan solusi analitik yang diketahui, sehingga memungkinkan penghitungan error absolut. Simulasi dilakukan pada interval waktu $[0, 2]$ dengan menggunakan diskretisasi untuk lebar langkah h yang bervariasi. Beberapa nilai α dipilih untuk mengamati pengaruh orde turunan terhadap hasil numerik. Melalui analisis hasil ini, diperoleh gambaran yang lebih jelas mengenai keunggulan dan keterbatasan pendekatan yang dikembangkan dalam menangani karakteristik nonlokal dan efek memori dari persamaan diferensial fraksional.

Contoh 1. Perhatikan persamaan diferensial fraksional linear berikut

$$D_*^\alpha y(t) = -y(t), \quad y(0) = 1, t > 0, 0 < \alpha \leq 1.$$

Solusi eksak dari permasalahan ini adalah $y(t) = E_\alpha(-t^\alpha)$ dimana $E_\alpha(t)$ adalah fungsi Mittag-Leffler orde α . Tabel 1-3 menampilkan nilai error absolut $|y_{\text{exact}} - y_{\text{approx}}|$ untuk tiga metode hampiran dengan berbagai nilai h saat $t = 1$ dan $t = 2$ untuk $\alpha = 1$, $\alpha = 0.95$, dan $\alpha = 0.9$.

Secara umum, nilai error absolut semua metode mengalami penurunan saat h semakin kecil. Hal ini menunjukkan bahwa semua metode memberikan solusi

hampiran yang konvergen. Metode Diethelm selalu memberikan eror absolut terkecil diantara dua metode lainnya untuk semua kondisi, yang menunjukkan bahwa metode tersebut mempunyai akurasi yang tinggi. Sementara itu, metode baru lebih baik dari metode Odibat hampir disemua kondisi, kecuali untuk kasus $\alpha = 0.9$ saat $t = 2$ dengan $h = \frac{1}{160}, \frac{1}{320}, \frac{1}{640}$ yang dapat dilihat pada Gambar 1.

Tabel 1. Nilai Error Absolut $|y_{\text{exact}} - y_{\text{approx}}|$ untuk Berbagai Nilai h Saat $t = 1$ dan $t = 2$ dengan $\alpha = 1$.

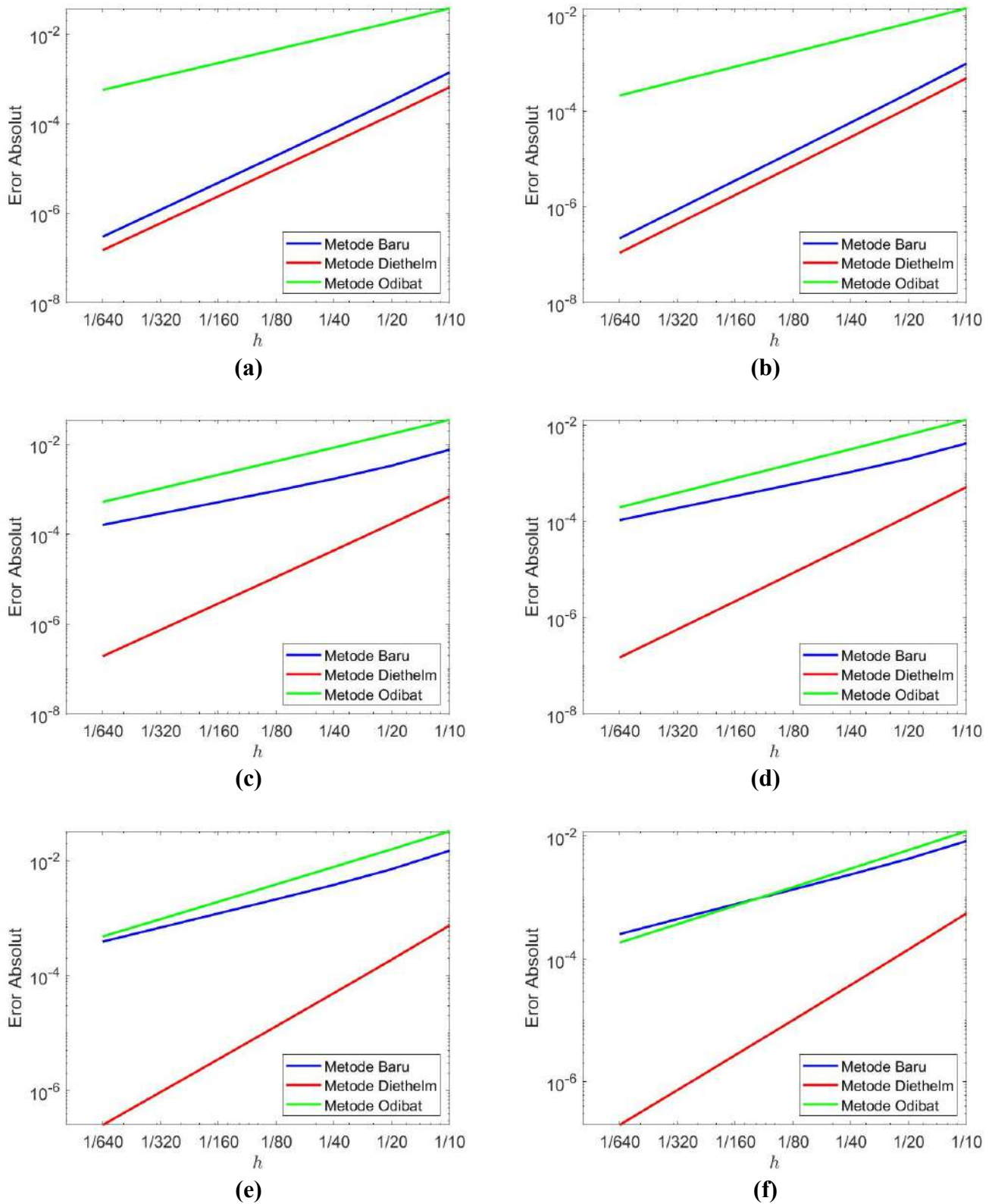
h	$t = 1$			$t = 2$		
	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat
1/10	1.4190e-03	6.6154e-04	3.8400e-02	9.8562e-04	4.8717e-04	1.3963e-02
1/20	3.2873e-04	1.5918e-04	1.8786e-02	2.3543e-04	1.1714e-04	6.8768e-03
1/40	7.9301e-05	3.9049e-05	9.2938e-03	5.7593e-05	2.8732e-05	3.4112e-03
1/80	1.9486e-05	9.6706e-06	4.6226e-03	1.4246e-05	7.1153e-06	1.6987e-03
1/160	4.8304e-06	2.4063e-06	2.3052e-03	3.5428e-06	1.7705e-06	8.4760e-04
1/320	1.2025e-06	6.0017e-07	1.1511e-03	8.8339e-07	4.4158e-07	4.2336e-04
1/640	3.0001e-07	1.4987e-07	5.7519e-04	2.2056e-07	1.1027e-07	2.1157e-04

Tabel 2. Nilai Error Absolut $|y_{\text{exact}} - y_{\text{approx}}|$ untuk Berbagai Nilai h Saat $t = 1$ dan $t = 2$ dengan $\alpha = 0.95$.

h	$t = 1$			$t = 2$		
	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat
1/10	7.6544e-03	7.0280e-04	3.5387e-02	4.1909e-03	5.1916e-04	1.2914e-02
1/20	3.3824e-03	1.7373e-04	1.7258e-02	2.0004e-03	1.2960e-04	6.3751e-03
1/40	1.7211e-03	4.3962e-05	8.5266e-03	1.0674e-03	3.3056e-05	3.1682e-03
1/80	9.3465e-04	1.1257e-05	4.2384e-03	5.9566e-04	8.5200e-06	1.5797e-03
1/160	5.1998e-04	2.8998e-06	2.1131e-03	3.3666e-04	2.2077e-06	7.8886e-04
1/320	2.9088e-04	7.4926e-07	1.0550e-03	1.9017e-04	5.7383e-07	3.9422e-04
1/640	1.6238e-04	1.9390e-07	5.2713e-04	1.0683e-04	1.4969e-07	1.9707e-04

Tabel 3. Nilai Error Absolut $|y_{\text{exact}} - y_{\text{approx}}|$ untuk Berbagai Nilai h Saat $t = 1$ dan $t = 2$ dengan $\alpha = 0.9$.

h	$t = 1$			$t = 2$		
	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat
1/10	1.4943e-02	7.5080e-04	3.2626e-02	8.2905e-03	5.5115e-04	1.1989e-02
1/20	7.1407e-03	1.9099e-04	1.5846e-02	4.2652e-03	1.4243e-04	5.9227e-03
1/40	3.8105e-03	4.9938e-05	7.8126e-03	2.3657e-03	3.7658e-05	2.9468e-03
1/80	2.1310e-03	1.3242e-05	3.8793e-03	1.3493e-03	1.0069e-05	1.4708e-03
1/160	1.2112e-03	3.5364e-06	1.9329e-03	7.7474e-04	2.7072e-06	7.3504e-04
1/320	6.9030e-04	9.4788e-07	9.6475e-04	4.4396e-04	7.3032e-07	3.6752e-04
1/640	3.9235e-04	2.5451e-07	4.8194e-04	2.5311e-04	1.9787e-07	1.8379e-04



Gambar 1. Plot error absolut untuk data pada Tabel 1 dengan skala log pada sumbu horizontal dan vertikal. Panel (a), (c), dan (e) menyatakan error absolut saat $t = 1$, sementara panel (b), (d), dan (f) saat $t = 2$. Panel (a) dan (b) menggunakan $\alpha = 1$, panel (c) dan (d) menggunakan $\alpha = 0.95$, dan panel (e) dan (f) menggunakan $\alpha = 0.9$.

Contoh 2. Perhatikan persamaan linier nonhomogen berikut

$$D_*^\alpha y(t) = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} - y(t) + t^2 - t$$

dengan $y(0) = 0, 0 < \alpha \leq 1$, dan $t > 0$. Solusi eksak untuk permasalahan ini adalah $y(t) = t^2 - t$. Tabel 4-6 menampilkan nilai eror absolut $|y_{\text{exact}} - y_{\text{approx}}|$ untuk tiga metode hampiran dengan berbagai nilai h saat $t = 1$ dan $t = 2$ untuk $\alpha = 0.1, \alpha = 0.95$, dan $\alpha = 0.9$.

Pada Contoh 2 ini, performa metode Odibat meningkat secara signifikan, terutama saat $\alpha = 1$, di mana metode ini menghasilkan eror absolut terkecil dibandingkan metode lainnya. Metode Baru dan Metode Diethelm juga memberikan solusi yang konvergen, namun dengan nilai eror yang lebih besar dibandingkan Metode Odibat.

Saat $\alpha = 0.95$, metode baru menunjukkan eror absolut terkecil pada waktu $t = 1$, namun erornya meningkat pada $t = 2$ seperti yang dapat dilihat pada Gambar 2 panel (c) dan (d). Hal ini mengindikasikan bahwa metode baru unggul untuk aproksimasi pada jangka waktu pendek, bahkan dengan nilai h yang relatif besar. Keunggulan ini berpotensi menghemat waktu komputasi tanpa mengorbankan akurasi secara signifikan pada interval waktu pendek. Hal yang sama juga dapat diamati untuk $\alpha = 0.9$ saat $h = 1/10$ pada waktu $t = 1$. Metode baru unggul dari metode Diethelm tetapi tidak lebih baik dari metode Odibat. Walaupun eror metode baru lebih besar saat h diperkecil, tetapi nilai eror tersebut turun secara konsisten yang menunjukkan kestabilan metode baru tersebut. Hal ini dapat dilihat juga pada Gambar 2 panel (e) dan (f).

Tabel 4. Nilai Eror Absolut $|y_{\text{exact}} - y_{\text{approx}}|$ untuk Berbagai Nilai h Saat $t = 1$ dan $t = 2$ dengan $\alpha = 1$.

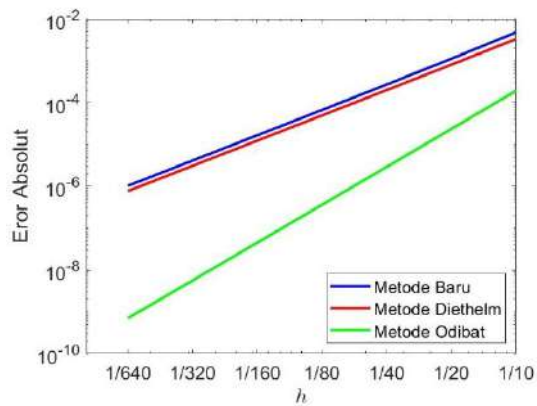
h	$t = 1$			$t = 2$		
	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat
1/10	4.7989e-03	3.3235e-03	1.9250e-04	6.2776e-03	4.5483e-03	7.0740e-05
1/20	1.1229e-03	8.1021e-04	2.3548e-05	1.5028e-03	1.1084e-03	8.6606e-06
1/40	2.7183e-04	2.0003e-04	2.9094e-06	3.6783e-04	2.7362e-04	1.0702e-06
1/80	6.6887e-05	4.9694e-05	3.6148e-07	9.1005e-05	6.7976e-05	1.3298e-07
1/160	1.6591e-05	1.2385e-05	4.5047e-08	2.2634e-05	1.6941e-05	1.6572e-08
1/320	4.1315e-06	3.0914e-06	5.6221e-09	5.6438e-06	4.2286e-06	2.0683e-09
1/640	1.0309e-06	7.7223e-07	7.0222e-10	1.4091e-06	1.0563e-06	2.5833e-10

Tabel 5. Nilai Error Absolut $|y_{\text{exact}} - y_{\text{approx}}|$ untuk Berbagai Nilai h Saat $t = 1$ dan $t = 2$ dengan $\alpha = 0.95$.

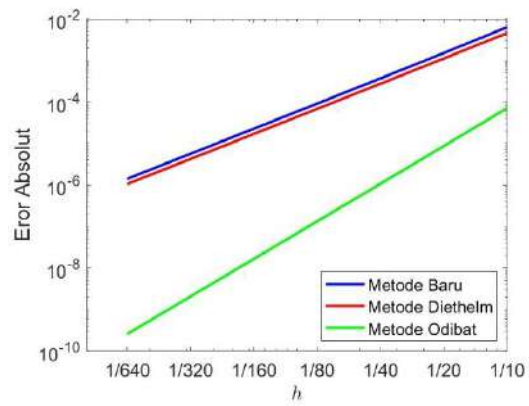
h	$t = 1$			$t = 2$		
	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat
1/10	5.0529e-04	1.7791e-02	1.5137e-02	2.8416e-02	1.0610e-02	4.3882e-03
1/20	1.1274e-03	7.7361e-03	6.9543e-03	1.7579e-02	3.8861e-03	2.1874e-03
1/40	1.0225e-03	3.5229e-03	3.3012e-03	1.0212e-02	1.5706e-03	1.1057e-03
1/80	6.8983e-04	1.6476e-03	1.5858e-03	5.7751e-03	6.8120e-04	5.5395e-04
1/160	4.2299e-04	7.8200e-04	7.6492e-04	3.2197e-03	3.0925e-04	2.7443e-04
1/320	2.4818e-04	3.7417e-04	3.6947e-04	1.7787e-03	1.4429e-04	1.3477e-04
1/640	1.4203e-04	1.7981e-04	1.7852e-04	9.7610e-04	6.8380e-05	6.5781e-05

Tabel 6. Nilai Error Absolut $|y_{\text{exact}} - y_{\text{approx}}|$ untuk Berbagai Nilai h Saat $t = 1$ dan $t = 2$ dengan $\alpha = 0.9$.

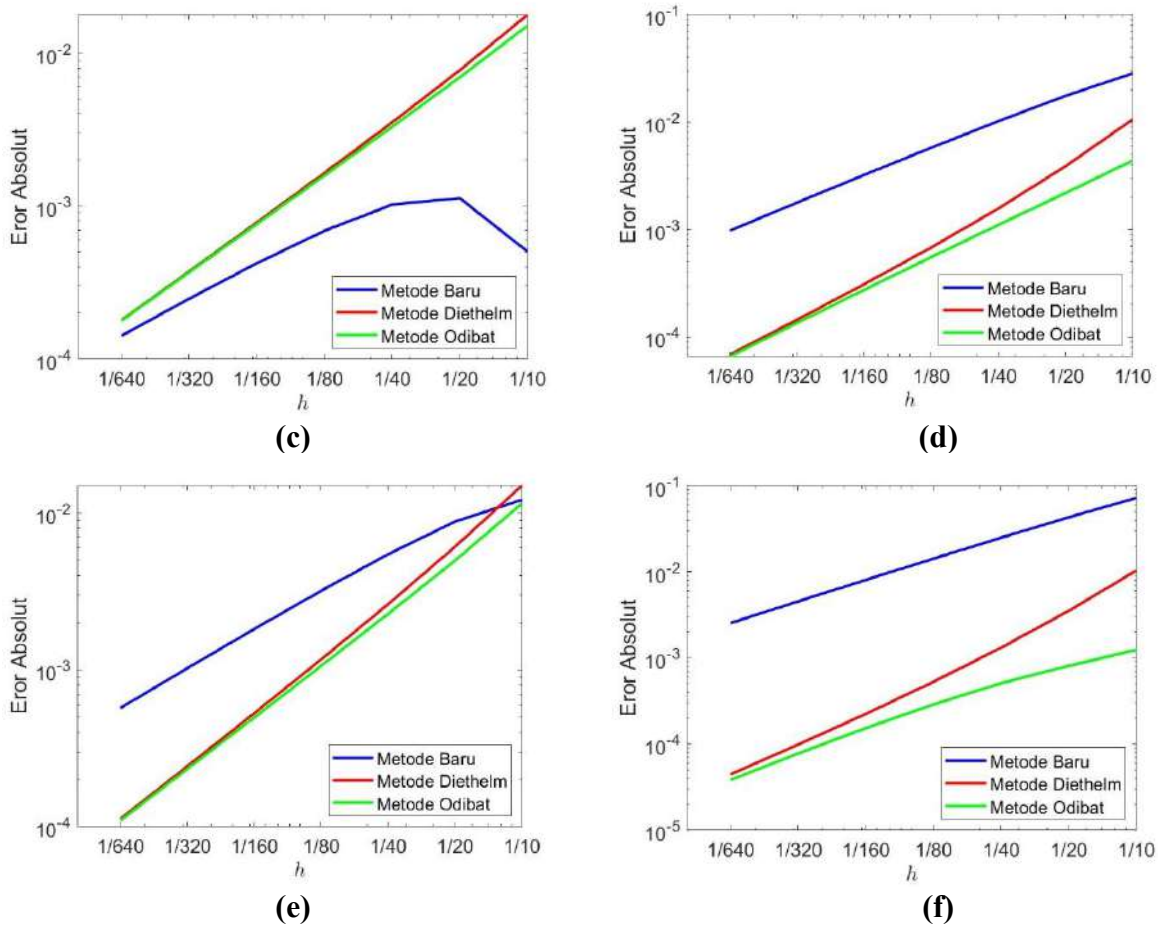
h	$t = 1$			$t = 2$		
	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat
1/10	1.2118e-02	1.4924e-02	1.1474e-02	7.2628e-02	1.0387e-02	1.2410e-03
1/20	8.8020e-03	6.0844e-03	4.9687e-03	4.3236e-02	3.5356e-03	8.1246e-04
1/40	5.4495e-03	2.6163e-03	2.2708e-03	2.5026e-02	1.3178e-03	5.0841e-04
1/80	3.1881e-03	1.1633e-03	1.0586e-03	1.4290e-02	5.2878e-04	2.8887e-04
1/160	1.8178e-03	5.2777e-04	4.9639e-04	8.0906e-03	2.2408e-04	1.5318e-04
1/320	1.0223e-03	2.4230e-04	2.3296e-04	4.5519e-03	9.8554e-05	7.7654e-05
1/640	5.6998e-04	1.1201e-04	1.0924e-04	2.5477e-03	4.4387e-05	3.8241e-05



(a)



(b)



Gambar 2. Plot eror absolut untuk data pada Tabel 2 dengan skala log pada sumbu horizontal dan vertikal. Panel (a), (c), dan (e) menyatakan eror absolut saat $t = 1$, sementara panel (b), (d), dan (f) saat $t = 2$. Panel (a) dan (b) menggunakan $\alpha = 1$, panel (c) dan (d) menggunakan $\alpha = 0.95$, dan panel (e) dan (f) menggunakan $\alpha = 0.9$.

Contoh 3. Perhatikan persamaan nonlinear berikut

$$D_*^\alpha y(t) = (y(t))^2 - \frac{2}{(t+1)^2}$$

dengan $y(0) = -2, 0 < \alpha \leq 1$, dan $t > 0$. Permasalahan ini hanya mempunyai solusi eksak untuk $\alpha = 1$ yaitu $y(t) = -\frac{2}{t+1}$. Tabel 7 menampilkan nilai eror absolut $|y_{\text{exact}} - y_{\text{approx}}|$ untuk tiga metode hampiran dengan berbagai nilai h saat $t = 1$ dan $t = 2$ untuk $\alpha = 1$. Sementara itu, perbandingan nilai hampiran untuk $\alpha = 0.95$ dan $\alpha = 0.9$ saat $t = 1$ diberikan pada Tabel 8.

Pada Contoh 3 ini, meskipun metode Diethelm menunjukkan eror absolut terkecil dan akurasi terbaik pada solusi eksak dengan $\alpha = 1$, metode baru tetap menampilkan performa yang stabil dan konvergen secara konsisten seiring pengecilan nilai h . Keunggulan metode baru terlihat dari kemampuannya memberikan solusi yang cukup akurat dengan eror yang menurun secara signifikan,

sekaligus mempertahankan kestabilan numerik pada berbagai nilai h dan waktu t . Hal ini menunjukkan bahwa metode baru merupakan pilihan yang baik, terutama ketika diperlukan metode yang efisien tanpa mengorbankan kualitas aproksimasi secara signifikan.

Selain itu, untuk nilai $\alpha = 0.95$ dan $\alpha = 0.9$ dimana solusi eksak tidak tersedia, metode baru mampu menghasilkan solusi aproksimasi yang konsisten dan mendekati hasil metode lain, menandakan kestabilannya dalam menyelesaikan persamaan diferensial fractional untuk parameter α yang bervariasi. Dengan demikian, metode baru menawarkan keseimbangan yang baik antara akurasi, kestabilan, dan efisiensi komputasi, menjadikannya alternatif yang baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial fractional secara numerik.

Tabel 7. Nilai eror absolut $|y_{\text{exact}} - y_{\text{approx}}|$ untuk berbagai nilai h Saat $t = 1$ dan $t = 2$ dengan $\alpha = 1$.

h	$t = 1$			$t = 2$		
	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat
1/10	4.0445e-03	2.2334e-05	1.0759e-03	1.4686e-03	1.1817e-03	4.1922e-04
1/20	9.0535e-04	3.0664e-05	2.1208e-04	3.4529e-04	2.5921e-04	8.3051e-05
1/40	2.1656e-04	1.0452e-05	4.6015e-05	8.4186e-05	6.0589e-05	1.8077e-05
1/80	5.3072e-05	2.9407e-06	1.0633e-05	2.0805e-05	1.4640e-05	4.1871e-06
1/160	1.3142e-05	7.7490e-07	2.5497e-06	5.1722e-06	3.5979e-06	1.0055e-06
1/320	3.2702e-06	1.9861e-07	6.2388e-07	1.2895e-06	8.9178e-07	2.4625e-07
1/640	8.1567e-07	5.0259e-08	1.5428e-07	3.2194e-07	2.2199e-07	6.0922e-08

Tabel 8. Solusi aproksimasi y_{approx} untuk berbagai nilai h saat $t = 1$ dengan $\alpha = 0.95$ dan $\alpha = 0.9$.

h	$\alpha = 0.95$			$\alpha = 0.9$		
	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat	Metode Baru	Metode Diethelm	Metode Odibat
1/10	-1.0271	-1.0134	-1.0121	-1.0518	-1.0260	-1.0245
1/20	-1.0192	-1.0135	-1.0132	-1.0380	-1.0263	-1.0258
1/40	-1.0164	-1.0135	-1.0134	-1.0325	-1.0263	-1.0261
1/80	-1.0151	-1.0135	-1.0135	-1.0298	-1.0263	-1.0263
1/160	-1.0144	-1.0135	-1.0135	-1.0283	-1.0263	-1.0263
1/320	-1.0140	-1.0135	-1.0135	-1.0275	-1.0263	-1.0263
1/640	-1.0138	-1.0135	-1.0135	-1.0270	-1.0263	-1.0263

KESIMPULAN

Pada artikel ini telah diberikan satu metode numerik baru untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional. Dari uji komputasi yang dilakukan secara keseluruhan, metode baru menawarkan keseimbangan yang baik antara akurasi, kestabilan, dan efisiensi komputasi, menjadikannya alternatif yang baik dalam penyelesaian persamaan diferensial fractional seperti model fraksional onkologi (Alinei-Poiana *et al.*, 2023), kontrol orde fraksional pada sistem hidrolik

(Sangpet & Kuntanapreeda, 2013), dan sistem dinamik orde fraksional lainnya (Zhao, 2016). Keunggulan ini sangat bermanfaat dalam aplikasi yang membutuhkan solusi numerik cepat dan andal, terutama ketika waktu komputasi menjadi kendala utama.

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami ingin menyampaikan terima kasih atas dukungan dari LPPM Universitas Riau melalui hibah RIPEKDOM No. 967/UN19.5.1.3/AL.04/2024.

REFERENSI

- Alinei-Poiana, T., Dulf, E.-H., & Kovacs, L. (2023). Fractional Calculus in Mathematical Oncology. *Scientific Reports*. Vol. 13(1), 10083.
<https://doi.org/10.1038/s41598-023-37196-9>
- Area, I., Batarfi, H., Losada, J., Nieto, J. J., Shammakh, W., & Torres, Á. (2015). On a Fractional Order Ebola Epidemic Model. *Advances in Difference Equations*. Vol. 2015, 1–12.
- Atkinson, K., Han, W., & Stewart, D. E. (2009). *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons.
- Brunner, H. (2004). *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations*. Vol. 15. Cambridge University Press.
- Chávez-Vázquez, S., Gómez-Aguilar, J. F., Lavín-Delgado, J., Escobar-Jiménez, R. F., & Olivares-Peregrino, V. H. (2022). Applications of Fractional Operators in Robotics: A review. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. Vol. 104(4), 63.
- Diethelm, K., & Ford, N. (2010). The Analysis of Fractional Differential Equations. *Lecture Notes in Mathematics*, 2004.
- Diethelm, K., Ford, N. J., & Freed, A. D. (2004). Detailed Error Analysis for a Fractional Adams Method. *Numerical Algorithms*. Vol. 36(1), 31–52.
- Garrappa, R. (2018). Numerical Solution of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial. *Mathematics*. Vol. 6(2), 16.
<https://doi.org/10.3390/math6020016>
- Jafari, H., Khalique, C., Ramezani, M., & Tajadodi, H. (2013). Numerical Solution of Fractional Differential Equations by Using Fractional B-spline. *Open Physics*. Vol. 11(10), 1372–1376.
<https://doi.org/10.2478/s11534-013-0222-4>
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* (Vol. 204). Elsevier.
- Kumar, K., Pandey, R. K., & Sharma, S. (2019). Approximations of Fractional Integrals and Caputo Derivatives with Application in Solving Abel's

- Integral Equations. *Journal of King Saud University-Science*. Vol. 31(4), 692–700.
- Li, C., Chen, Y., & Kurths, J. (2013). Fractional Calculus and its Applications. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 371(1990), 20130037. <https://doi.org/10.1098/rsta.2013.0037>
- Li, C., & Zeng, F. (2015). *Numerical Methods for Fractional Calculus*. CRC Press.
- Lin, Y., & Xu, C. (2007). Finite Difference/spectral Approximations for the Time-fractional Diffusion Equation. *Journal of Computational Physics*. Vol. 225(2), 1533–1552.
- Mainardi, F. (2022). *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. World Scientific.
- Metzler, R., & Klafter, J. (2000). The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. *Physics Reports*. Vol. 339(1), 1–77.
- Odibat, Z. M., & Momani, S. (2008). An Algorithm for the Numerical Solution of Differential Equations of Fractional Order. *Journal of Applied Mathematics & Informatics*. Vol. 26(1_2), 15–27.
- Pandey, R. K., & Agrawal, O. P. (2015). Comparison of Four Numerical Schemes for Isoperimetric Constraint Fractional Variational Problems with A-Operator. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 57199, V009T07A025.
- Ray, S. S., Atangana, A., Noutchie, S. C. O., Kurulay, M., Bildik, N., & Kiliçman, A. (2014). Fractional Calculus and Its Applications in Applied Mathematics and Other Sciences. *Mathematical Problems in Engineering*. Vol. 2014(1), 849395. <https://doi.org/10.1155/2014/849395>
- Sangpet, T., & Kuntanapreeda, S. (2013). Force Control of an Electrohydraulic Actuator Using a Fractional-Order Controller. *Asian Journal of Control*. Vol. 15(3), 764–772. <https://doi.org/10.1002/asjc.600>
- Yan, Y., Pal, K., & Ford, N. J. (2014). Higher Order Numerical Methods for Solving Fractional Differential Equations. *BIT Numerical Mathematics*. Vol. 54(2), 555–584. <https://doi.org/10.1007/s10543-013-0443-3>
- Zhao, B. (2016). Dynamic Systems for Signaling Parasite-Host from Differential Equations. *Journal of Bacteriology & Parasitology*. Vol. 07(04). <https://doi.org/10.4172/2155-9597.1000285>