



PERBANDINGAN TIGA ALGORITMA PEWARNAAN GRAF DALAM MEWARNAI GAMBAR MOZAIK GEOMETRIS

Raden Gunawan Santosa, Junius Karel Tampubolon

Program Studi Informatika Fakultas Teknik Informatika
Universitas Kristen Duta Wacana
Jl. Dr. Wahidin Sudirohusodo No. 5-25 Yogyakarta 55224, Indonesia
Email: gunawan@staff.ukdw.ac.id

ABSTRACT

This study compares three graph coloring algorithms (Greedy, Welch–Powell (WP), and Marble–Matula–Isaacson (MMI)) applied to geometric mosaic images in the form of undirected graphs. Each vertex represents a region in the image, while edges connect neighboring regions. Two graphs are used as research objects, namely graph (a) with $|V(G_A)| = 56$, $|E(G_A)| = 96$, $D(G_A) = 0.062234$, $\delta(G_A) = 2$, $\Delta(G_A) = 7$, and graph (b) with $|V(G_B)| = 55$, $|E(G_B)| = 115$, $D(G_B) = 0.0174$, $\delta(G_B) = 3$, $\Delta(G_B) = 6$. The three algorithms are tested through 15 experiments to minimize the number of colors so that no two neighboring vertices have the same color. The Wilcoxon Rank-Sign statistical test shows that WP and MMI are significantly more efficient than Greedy, with p-values of 0.0006269 and 0.01073 (< 0.05), respectively. The theoretical reason why the Greedy algorithm is not optimal compared to the other two algorithms is because the Greedy algorithm colors the vertices according to the input order without a vertex selection strategy based on degree or graph structure. These results confirm that WP and MMI are able to approach the theoretical limit of planar graph coloring as stated by the Four Color Theorem, which states that every planar graph can be colored with no more than four colors.

Keywords: Graph Coloring, Greedy, Matula-Marble-Isaacson, Welch-Powell, Wilcoxon Rank-Sign

ABSTRAK

Penelitian ini membandingkan tiga algoritma pewarnaan graf (Greedy, *Welch–Powell* (WP), dan Marble–Matula–Isaacson (MMI)) yang diterapkan pada gambar mozaik geometris berbentuk graf tak berarah. Setiap verteks merepresentasikan satu wilayah pada gambar, sedangkan edge menghubungkan wilayah yang saling bertetangga. Dua graf digunakan sebagai objek penelitian, yaitu graf (a) dengan $|V(G_A)| = 56$, $|E(G_A)| = 96$, $D(G_A) = 0.062234$, $\delta(G_A) = 2$, $\Delta(G_A) = 7$, dan graf (b) dengan $|V(G_B)| = 55$, $|E(G_B)| = 115$, $D(G_B) = 0.0174$, $\delta(G_B) = 3$, $\Delta(G_B) = 6$. Ketiga algoritma diuji melalui 15 eksperimen untuk meminimalkan jumlah warna sehingga tidak ada dua verteks bertetangga yang memiliki warna sama. Uji statistik Wilcoxon Rank-Sign menunjukkan bahwa WP dan MMI secara signifikan lebih efisien dibandingkan Greedy, dengan p-value masing-masing 0.0006269 dan 0.01073 (< 0.05). Alasan secara teoritis, algoritma *Greedy* tidak optimal dibanding dua algoritma yang lain adalah karena algoritma Greedy memberi warna ke *verteks* sesuai urutan input tanpa strategi pemilihan *verteks* berdasarkan derajat atau struktur graf. Hasil ini menegaskan bahwa WP dan MMI mampu mendekati batas teoretik pewarnaan graf planar sebagaimana dinyatakan oleh Teorema Empat Warna, yang menyatakan bahwa setiap graf planar dapat diwarnai dengan tidak lebih dari empat warna.

Kata kunci: Pewarnaan Graf, *Greedy*, Matula-Marble-Isaacson, Welch-Powell, Wilcoxon Rank-Sign

Received: 03 September 2025, Accepted: 07 November 2025, Published: 09 November 2025

PENDAHULUAN

Teori Graf adalah cabang matematika yang mempelajari struktur yang terdiri dari verteks (*node*) dan sisi (*edge*) yang menghubungkan verteks-verteks tersebut. Teori ini digunakan untuk menyajikan dan menganalisis relasi antar objek. Suatu Graf disimbolkan dengan $G(V,E)$ yang mempunyai komponen utama *vertex* yaitu verteks atau titik yang merepresentasikan objek dan *edge* yaitu garis yang menghubungkan dua verteks. Salah satu topik dalam Teori Graf yaitu pewarnaan graf (*graph coloring*).

Banyak sekali manfaat dari pewarnaan graf, diantaranya adalah masalah optimasi, penjadwalan, dan pengelompokan. Misalnya, masalah Penjadwalan (*Scheduling*) bertujuan menghindari konflik waktu dan memastikan efisiensi. Masalah pengalokasian sumber daya dapat digunakan untuk efisiensi pemakaian sumber daya terbatas. Permasalahan pada Frekuensi Radio (*Frequency Assignment*) untuk minim interferensi dan gangguan sinyal. Dalam jaringan komunikasi, seperti menara seluler, frekuensi berbeda diberikan ke menara tetangga untuk menghindari interferensi. Masalah pengelompokan (*Clustering*) dapat dimanfaatkan untuk pembagian kelompok tanpa konflik. Serta yang terakhir masalah pewarnaan peta (*Map Coloring*) bertujuan membuat visualisasi yang jelas, sehingga tidak ada tumpang tindih antar wilayah yang berbeda.

Selain seperti banyak manfaat di atas, penelitian ini mencoba melihat pewarnaan graf untuk pewarnaan gambar mozaik. Rumusan penelitian ini secara umum adalah belum adanya studi *eksperimental-empiris* pewarnaan mozaik dengan WP ataupun MMI demikian pula secara khususnya adalah melakukan *evaluasi komparatif* pada gambar mozaik yang diabstraksikan terlebih dahulu menjadi graf planar riil dari mozaik tersebut. Ciri khas mozaik adalah gambar ini tersusun dari fragmen kecil (disebut *tesserae*). Fragmen ini bisa berbentuk persegi, bulat, tidak beraturan. Gambar disusun saling berdampingan tanpa tumpang tindih di atas permukaan (dinding, lantai, meja, kanvas, dll). Sehingga susunan ini akan membentuk gambar utuh, abstrak, atau figuratif (wajah, hewan, pemandangan).

Dalam penelitian yang terdahulu Mirdayanti dkk. (2024) mengeksplorasi konsep geometri datar yang berada pada motif Batik Lontara Bugis, sehingga bentuk tersebut dapat digunakan sebagai alat mempelajari bangun geometri. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada motif Batik Lontara Bugis mengandung konsep geometri datar seperti lingkaran, persegi panjang, dan belah ketupat dimana konsep-konsep tersebut berhubungan dengan pembelajaran matematika (Mirdayanti *et al.*, 2024). Enot dkk. (2024) juga mengeksplorasi bentuk anyaman rotan dalam pembelajaran matematika. Hasilnya bahwa bentuk dari hasil anyaman

rotan di Desa Sita berhubungan dengan bangun geometri datar contohnya piring rotan berbentuk lingkaran, kursi rotan berbentuk persegi dan tudung saji bersesuaian dengan persegi panjang (Enot *et al.*, 2024). Dalam pembelajaran matematika bentuk-bentuk geometris dapat dipelajari untuk memperdalam konsep tertentu. Dalam penelitian yang dilaksanakan, akan dicoba menggabungkan konsep geometri mozaik dengan teori graf untuk masalah pewarnaan bangun geometri.

Beberapa penelitian yang menggunakan algoritma Welch-Powell, seperti disebutkan dalam bagian dibawah ini.

Maulani dan Wulandari melakukan penelitian implementasi Algoritma Welch-Powell untuk pengelompokan Siswa di Rumah Belajar Azalea. Tujuannya adalah mengelompokkan kemampuan Pra-Literasi usia 5-6 tahun sehingga hasilnya di dapat lima kelompok sesuai dengan 5 warna yang dihasilkan. (Maulani & Wulandari, 2023). Bahri dkk. melakukan penelitian dengan metode Welch-Powell yang dilakukan pada penjadwalan mata kuliah semester ganjil tahun ajaran 2022/2023 di Departemen Matematika dan Sains Data. Aplikasi metode pewarnaan dilakukan dengan menggunakan program C++ (Bahri *et al.*, 2023). Nuryatma dkk. melakukan penelitian optimalisasi distribusi beras di BULOG Kota Samarinda. Permasalahan transportasi dapat diselesaikan dengan pewarnaan graf menggunakan algoritma Welch-Powell, metode transportasi yaitu metode North West Corner (NWC) dan metode Stepping Stone (SS). Tujuan Penelitian adalah untuk mendapatkan solusi optimal dalam pendistribusian beras BST BB-PPKM 2021 di kota Samarinda (Nuryatma *et al.*, 2024).

Sintia dkk. menggunakan Algoritma Welch-Powell dan IDO (*Incident Degree Ordering*) yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimalisasi pengaturan lampu lalu lintas di persimpangan jalan dengan menggunakan 2 kasus. Penelitian ini menunjukkan bahwa algoritma Welch-Powell dan IDO yang digunakan untuk pewarnaan titik menghasilkan bilangan kromatik $\chi(G)=3$ untuk Jalan Prof. Dr. H.B Jassin, Jenderal Sudirman, dan $\chi(G)=4$ untuk Jalan Prof. Dr. H.B Jassin, Palma, dan Sarini Abdullah (Latif *et al.*, 2024).

Penelitian penjadwalan penyusunan mata pelajaran di SMP Terpadu Rea Kaltim Kembang Janggut menggunakan pewarnaan graf dilakukan oleh Yusak dkk.. Algoritma yang digunakan adalah algoritma Welch-Powell, untuk menyusun penjadwalan yang meminimalkan bentrok antara mata pelajaran yang jadwalnya tumpang tindih. Pada implementasi pewarnaan graf ini diperoleh bilangan kromatik 5 (Yusak *et al.*, 2024). Fadilah dkk. menyimpulkan dalam penelitiannya bahwa algoritma Welch Powell dan algoritma *Greedy* memiliki alur kerja yang tidak jauh berbeda, namun dapat memperoleh hasil yang sama, yaitu diperoleh 14 (empat belas) warna yang kemudian diaplikasikan pada penjadwalan ruangan yang akan digunakan dalam proses perkuliahan di Fakultas Ilmu Komputer Universitas Amikom Purwokerto (Fadilah *et al.*, 2024).

Syukron dkk. menerapkan algoritma Welch-Powell dalam penyusunan jadwal mengajar dosen Prodi Ilmu Komputer, Universitas Negeri Medan. Hal ini

sebagai solusi untuk mengatasi masalah tabrakan jadwal kelas kuliah. Dalam penelitiannya dibangun model graf yang merepresentasikan kelas, dosen, dan waktu kuliah (Syukron *et al.*, 2024). Nasir dkk. mengadakan penelitian yang mengoptimalkan sistem penjadwalan mata kuliah pada prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muslim Maros tahun akademik 2020/2021 dengan menggunakan teori Welch-Powell. Sumber data pada penelitian ini adalah Kartu Rencana Studi (KRS) setiap tingkat mahasiswa pada semester genap tahun akademik 2020/2021. Dengan algoritma tersebut dihasilkan jadwal kuliah yang optimal tanpa adanya bentrok mata kuliah (Nasir *et al.*, 2022).

Selain masalah penjadwalan, Manullang dkk. menggunakan algoritma Welch-Powell untuk mengatur keefektifan lampu lalu lintas di kota Medan. Lampu lalu lintas merupakan alat yang digunakan untuk mengatur kelancaraan lalu lintas di persimpangan jalan. Dengan menggunakan algoritma ini menghasilkan kesimpulan bahwa semakin efektif durasi lampu lalu lintas maka konsentrasi/kepadatan kendaraan semakin rendah (Manullang & Marpaung, 2024). Lubis dkk. menerapkan algoritma Welch-Powell untuk mempermudah identifikasi dan pemetaan destinasi kuliner. Algoritma ini menghasilkan bilangan kromatik 7 yaitu memberikan warna pada verteks-verteks graf untuk merepresentasikan tempat kuliner yang tidak terhubung, sehingga mempermudah analisis keterkaitan dan struktur antar destinasi. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat 7 kelompok tempat makan yang tidak memiliki keterkaitan langsung dengan kelompok lainnya (Lubis & Nuraini, 2024).

Maro melakukan pewarnaan graf yang dilakukan dalam penelitiannya menghasilkan minimal 5 warna yang dibutuhkan untuk mewarnai peta. Jumlah verteks (desa) pada peta Pulau Alor adalah 120, dan bilangan kromatik pada graf peta Desa di Pulau Alor adalah 5 ($\chi(G) = 5$). Verteks (desa di Pulau Alor) dapat diwarnai hanya dengan menggunakan lima warna, dan antar desa yang berbatasan memiliki warna yang berbeda (Maro, 2022).

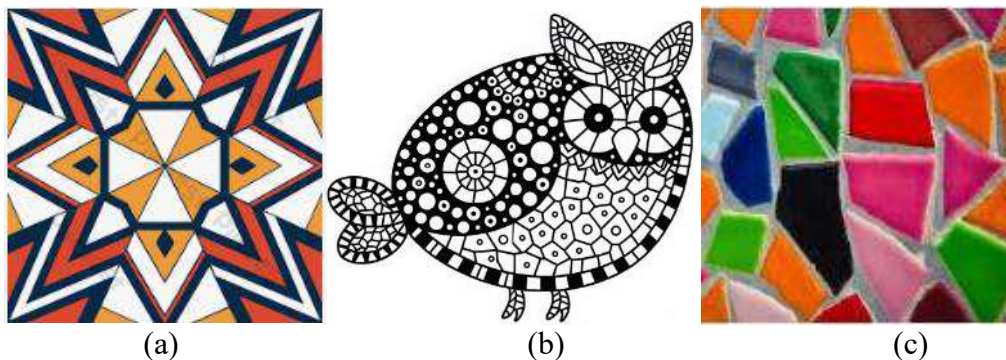
Maro menekankan penelitiannya pada penggunaan Welch-Powell untuk mewarnai desa di Pulau Alor, sedangkan penelitian ini berhubungan perbandingan beberapa metode pewarnaan gambar mozaik geometris yang dilihat melalui pendekatan teori graf yang belum ada di penelitian sebelumnya.

Krleva mengadakan penelitian yang membandingkan antara algoritma Welch-Powell dan Dsatur untuk masalah pewarnaan verteks dalam graf dengan menggunakan 46 graf uji. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dalam 50% kasus, algoritma Welch-Powell menemukan solusi yang lebih baik (total 23). sedangkan, algoritma Dsatur menemukan solusi yang lebih baik hanya dalam 19,6% kasus (total 9). Dalam 30,4% (total 14) kasus sisanya, kedua algoritma menemukan solusi yang sama (Krleva *et al.*, 2025). Berhubungan dengan hal itu, ide penelitian ini adalah membandingkan secara *heuristic* dari tiga macam pewarnaan graf dengan dua buah graf uji. Hasil penelitian ini akan melihat apakah algoritma Welch-Powell

dan MMI dapat menemukan solusi yang lebih baik dibandingkan dengan algoritma *Greedy* dalam proses pewarnaan graf.

TINJAUAN PUSTAKA

Berdasarkan motifnya, gambar mozaik dibagi tiga jenis, yaitu yang pertama adalah motif geometris. Pola geometris ini terdiri dari pola garis, kotak, segitiga (contoh: lantai mosaik) seperti pada Gambar 1(a). Motif yang kedua adalah motif figuratif, yaitu membentuk gambar benda, hewan, manusia. Pada Gambar 1(b) menunjukkan mozaik figuratif dengan bentuk burung. Sedangkan motif yang ketiga adalah motif abstrak, yaitu kombinasi warna dan bentuk tanpa objek jelas, seperti Gambar 1(c). Klasifikasi motif gambar mozaik tersebut tidak kaku, karena ada beberapa gambar mozaik yang dapat diklasifikasikan lebih dari satu jenis motif.



Gambar 1. (a) Mozaik Geometris (b) Mozaik Figuratif (c) Mozaik Abstrak

Dalam pewarnaan graf, terdapat beberapa algoritma dan metode utama yang digunakan untuk memberikan warna pada verteks dalam graf. Berikut adalah 3 algoritma penting dalam pewarnaan graf (fokusnya pada pewarnaan verteks), yaitu Algoritma *Greedy* sering disebut *Simple Sequential Colouring*, Algoritma Welch-Powell sering disebut dengan *Largest- first Sequential Colouring* dan Algoritma Matula-Marble-Isaacson (MMI) yang sering dikenal sebagai *Smallest-last Sequential Coloring*. Secara teori, batas atas Welch-Powell tidak eksplisit, hanya heuristik sedangkan MMI mempunyai batas atas spesifik $\chi(G) \leq \delta^* + 1$ ($\delta^* = \text{degeneracy}$) (Matula & Beck, 1983). Berikut ini akan diberikan langkah-langkah untuk tiap-tiap algoritma (John & Allan, 1995).

Apabila diberikan graf $G(V,E)$, Tahapan Algoritma *Greedy* sebagai berikut:

Step 1. Daftarkan *verteks-verteks* di graf G sebagai $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Daftarkan warna yang disimbolkan dengan $1, 2, 3, \dots, n$.

Step 2. Untuk tiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$C_i = \{1, 2, 3, \dots, i\}$ adalah daftar warna-warna yang dapat mewarnai verteks x_i .

Step 3. Ambil $i = 1$.

Step 4. Misal c_i adalah warna pertama dalam C_i dan pasangkan warna ini dengan verteks x_i .

Step 5. Untuk tiap j dengan $i < j$ dan x_i adjacent dengan x_j dalam graph G , Ambil $C_j = C_j - \{c_i\}$ (Ini berarti bahwa x_j tidak diberi warna yang sama dengan x_i).

Ubah i menjadi $i+1$ dan jika $i+1 \leq n$, ke step 4.

Step 6. Catat tiap *verteks* dan warnanya.

Algoritma *Greedy* untuk pewarnaan graf adalah salah satu pendekatan paling sederhana dan cepat untuk menyelesaikan masalah pewarnaan verteks (*vertex coloring*). Dalam penelitian ini juga akan digunakan algoritma *Greedy* untuk pewarnaan gambar mozaik dengan motif geometri. Selain itu juga ada algoritma *Welch-Powell* (John & Allan, 1995).

Diberikan graf $G(V,E)$. Tahapan Algoritma *Welch-Powell* sebagai berikut:

Step 1. Daftar *verteks-verteks* pada graf G sebagai $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sehingga $d(x_1) \geq d(x_2) \geq d(x_3) \geq \dots \geq d(x_n)$.

Daftarkan warna yang disimbolkan dengan $1, 2, 3, \dots, n$.

[Sedangkan *Step 2* sampai dengan *Step 6* sama dengan Algoritma *Simple Sequential Colouring*].

Algoritma *Greedy* ini tidak menjamin solusi optimal (jumlah warna minimum), tetapi sangat efisien secara waktu dan cukup baik dalam banyak kasus praktis. Sehingga algoritma *Welch-Powell* mengkoreksinya dengan urutan verteks berdasarkan derajat tertinggi ke terendah. Demikian pula Algoritma *Welch-Powell* sangat banyak dipakai dalam penelitian-penelitian.

Untuk graf $G(V,E)$ yang diberikan, maka tahapan Algoritma MMI sebagai berikut (John & Allan, 1995):

Step 1.

- a) Pilih x_n sebagai *verteks* dengan derajat minimum dalam graph G .
- b) Untuk $i = n-1, n-2, n-3, \dots, 3, 2, 1$ pilih x_i sebagai *verteks* dengan derajat minimum dalam subgraph yg didapat dengan menghapus *verteks* x_i atau $G - \{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{i+1}\}$
- c) Buat daftar *verteks* yang baru sebagai $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$
- d) Daftarkan warna yang disimbolkan dengan: $1, 2, 3, \dots, n$.

[Sedangkan *Step 2* sampai dengan *Step 6* sama dengan Algoritma *Simple Sequential Coloring*].

Smallest Last Ordering (dipakai di algoritma Matula dkk.) juga dapat digunakan untuk mengoptimalkan algoritma *Greedy* dengan mengurangi jumlah warna yang digunakan dalam pewarnaan (John & Allan, 1995). Hal ini dapat terjadi karena algoritma MMI mengurutkan dari verteks dengan derajat terkecil sampai dengan

derajat terbesar. Urutan dari pelabelan verteks-verteks ini mempengaruhi hasil akhir dari banyaknya warna yang dipakai. Dalam prakteknya algoritma MMI jarang diaplikasikan pada pewarnaan graf, karena algoritma ini membutuhkan penghapusan verteks secara berurutan yang pada hakekatnya harus merekonstruksi graf lagi menjadi graf yang kecil atau subgraf. Algoritma *Greedy* biasanya urutan pewarnaan verteksnya tetap (statis), sedangkan DSATUR(Brelaz) dalam urutan pewarnaan verteksnya bersifat dinamis berdasarkan saturasi tetangga verteks tersebut. Dalam hal ini penelitian ini tidak membahas perbandingan tersebut secara heuristik.

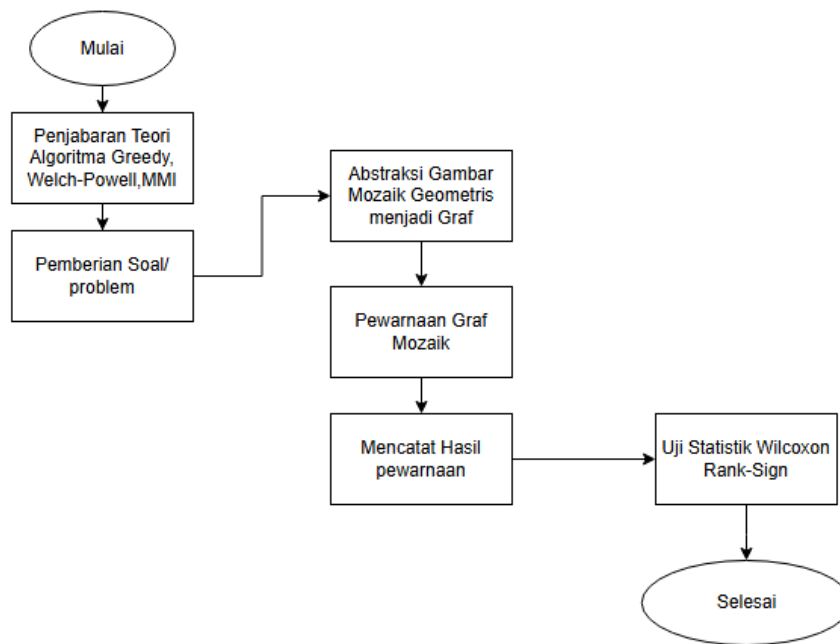
Hasil pewarnaan graf yang diperoleh melalui algoritma Welch–Powell dan *smallest-last ordering* tidak hanya dapat dinilai secara prosedural, tetapi juga memiliki dasar teoretik yang kuat apabila dikaitkan dengan parameter struktural graf. Dalam konteks ini, bilangan kromatik $\chi(G)$, yang merepresentasikan jumlah warna minimum yang diperlukan agar tidak ada dua verteks bertetangga memiliki warna sama, dapat dipahami sebagai besaran yang berada di antara dua batas teoritis penting: ukuran *clique maksimum* $\omega(G)$ dan *degeneracy* $\delta^*(G)$, melalui hubungan $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \delta^*(G)+1$ dan untuk graf planar berlaku $\chi(G) \leq 4$ (Diestel, 2017). Graf mozaik dapat dipandang sebagai graf planar. Jadi dalam konteks graf planar, hasil yang diperoleh dari kedua algoritma tersebut tetap tunduk pada Teorema Empat Warna, yaitu $\chi(G) \leq 4$.

Tujuan dalam pewarnaan graf secara umum adalah pewarnaan verteks dalam graf sehingga tidak ada dua verteks bertetangga memiliki warna yang sama, dan jumlah warna yang digunakan seminimal mungkin sehingga tidak selalu optimal, tapi cukup efisien (Diestel, 2017). Penerapan dari masalah pewarnaan graf dapat diaplikasikan pada pewarnaan gambar mozaik. Hal ini dapat dilakukan karena daerah (*region*) dalam gambar mozaik dapat dipandang sebagai verteks. Sehingga permasalahannya menjadi pewarnaan verteks dalam suatu graf yang terbentuk.

Secara teori, algoritma *Greedy (Simple Sequential Algorithm)* merupakan algoritma dengan penggunaan warna yang lebih banyak dari kedua algoritma yang lain (John & Allan, 1995). Permasalahan dalam penelitian ini adalah apakah algoritma Welch-Powell dan algoritma MMI dapat mengurangi penggunaan warna yang digunakan untuk mewarnai gambar mozaik geometris. Dengan kata lain banyak warna yang digunakan mewarnai gambar mozaik geometris dengan algoritma Welch-Powell dan algoritma MMI lebih sedikit daripada algoritma *Greedy*. Proses penelitian dalam pewarnaan ini dilakukan secara eksperimental. Kebaruan dan kontribusi dari penelitian ini adalah belum adanya penelitian *eksperimental-empiris* yang belum dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya.

METODE PENELITIAN

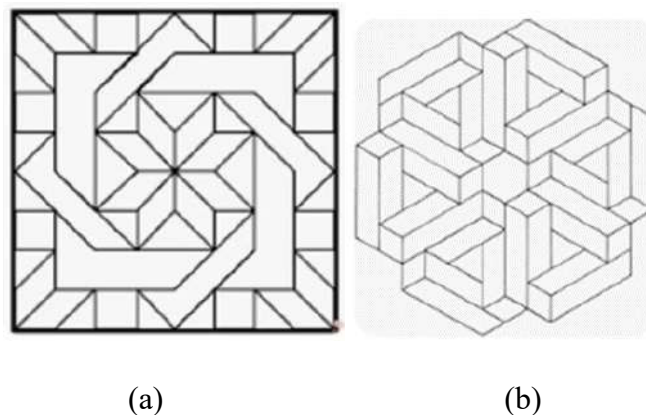
Penelitian ini menggunakan metode *kuantitatif-eksperimental* dengan pendekatan *problem-solving* berbasis *graph-coloring*. Data yang dianalisis akan diperoleh melalui teori dan eksperimen pemecahan masalah yang dilakukan oleh para siswa. Langkah-langkah penelitian ini, dapat digambar pada *flowchart* seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Flowchart Metode Penelitian

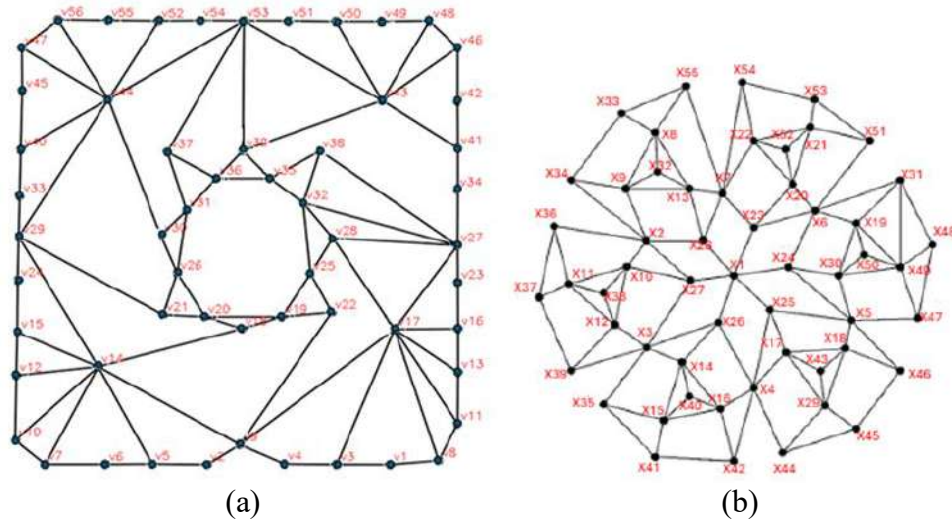
Penjabaran dari *flowchart* penelitian meliputi:

1. Penjabaran teori dari tiga metode *graph coloring*, yaitu algoritma *Greedy*, algoritma *Welch-Powel* dan metode *MMI*.
2. Pemberian soal *problem-solving*: hal ini dilakukan dengan memberi dua buah gambar mozaik yang akan diwarnai dengan menggunakan tiga metode pewarnaan *graph*.



Gambar 3. Dua Buah Gambar Mozaik Geometris

3. Abstraksi graf pada bentuk Gambar 3, dapat dilihat pada Gambar 4 di bawah ini. Cara abstraksi menjadi graf adalah setiap *region* dipandang sebagai verteks, dan dua verteks dihubungkan oleh *edge* (garis) bila ada sebuah *border* pada dua *region* tersebut (Diestel, 2017).



Gambar 4. Dua Buah abstraksi graf dari dua gambar Mozaik Geometris

4. Eksperimen pewarnaan mozaik: Para siswa yang terdiri dari 15 orang menerapkan tiga metode pewarnaan untuk mewarnai abstraksi dua gambar mozaik (Gambar 4) yang telah diberikan dan mencatat banyak warna berbeda yang digunakan.
5. Mencatat hasil pewarnaan: Dalam tahap ini dilakukan pencatatan untuk banyak warna yang dibutuhkan untuk mewarnai gambar. Seorang siswa mewarnai Gambar 4(a) dengan menerapkan algoritma *Greedy* dan Algoritma Welch-Powell, setelah itu siswa tersebut mewarnai Gambar 4(b) dengan algoritma *Greedy* dan Algoritma MMI.
6. Melakukan uji Statistik nonparametrik yaitu Wilcoxon Rank-Sign test. Alasan digunakan uji Statistik tersebut karena uji ini akan menguji rata-rata perbedaan mean data berpasangan (*dependent*) dengan asumsi bahwa data tidak diasumsikan berdistribusi normal (Ewens & Brumberg, 2023).

Hasil percobaan dianalisis secara deskriptif dalam bentuk tabel untuk mengidentifikasi banyak warna yang dibutuhkan untuk pewarnaan gambar mozaik tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

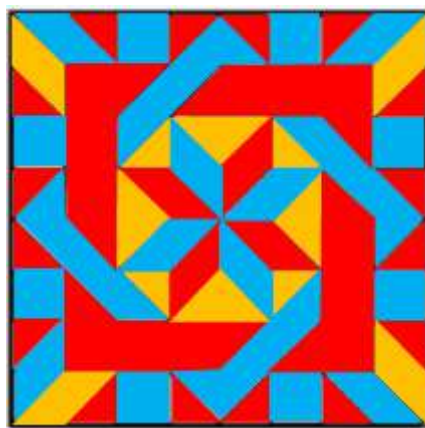
Hasil pencatatan dari pewarnaan graf pada langkah 4 di sajikan dalam Tabel 1 dibawah ini yang merupakan hasil pewarnaan abstraksi gambar mozaik.

Tabel 1. Hasil Pewarnaan dengan Menggunakan 3 (tiga) Pewarnaan Graph

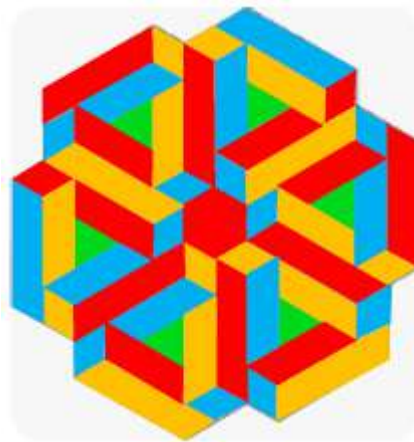
Eksperimen	Gambar Graf 3a		Gambar Graf 3b	
	Algoritma Greedy	Welch-Powel	Algoritma Greedy	MMI
Eksperimen 1	4	3	5	4
Eksperimen 2	4	3	4	4
Eksperimen 3	4	4	4	4
Eksperimen 4	4	3	4	4
Eksperimen 5	4	3	4	4
Eksperimen 6	4	4	5	4
Eksperimen 7	4	3	5	4
Eksperimen 8	4	4	5	4
Eksperimen 9	5	4	4	4
Eksperimen 10	4	3	5	4
Eksperimen 11	4	3	4	3
Eksperimen 12	4	3	4	4
Eksperimen 13	4	3	5	4
Eksperimen 14	4	3	4	4
Eksperimen 15	4	3	4	4
Rata-rata	4.0667	3.2667	4.4000	3.9333
Stand. Deviasi	0.2582	0.4577	0.5071	0.2582

Hasil pewarnaan abstraksi gambar mozaik Gambar graf 3a dan Gambar graf 3b, apabila diwarnai menggunakan tiga algoritma pewarnaan tersebut, dapat menghasilkan banyak warna yang berbeda karena pelabelan dan urutan penamaan verteks pada Gambar 4 dapat berbeda-beda.

Salah satu bentuk hasil pewarnaan graf dengan menggunakan algoritma Welch-Powell dan algoritma MMI dapat dilihat pada Gambar 4 dibawah ini.



(a)

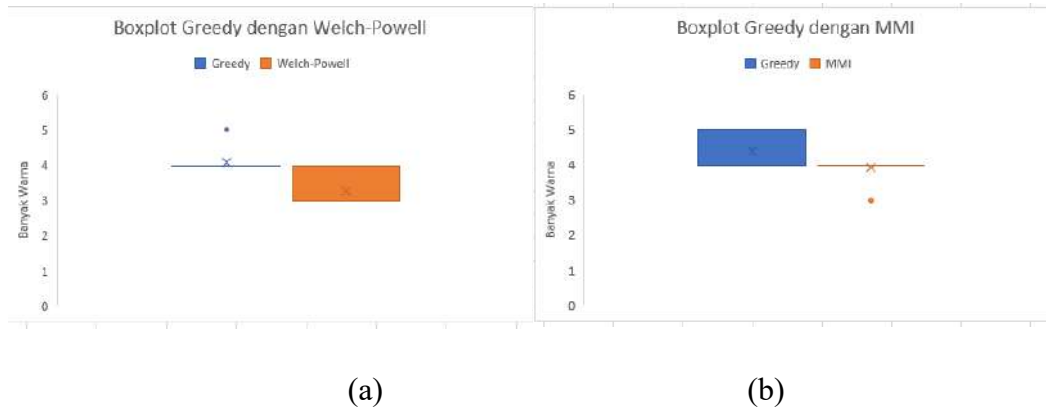


(b)

Gambar 4. Hasil Pewarnaan Welch-Powell (a) dan algoritma MMI (b)

Gambar 4(a) merupakan hasil pewarnaan graf menggunakan algoritma Welch-Powell yang menghasilkan pewarnaan tiga warna (merah, biru, kuning), sedangkan Gambar 4(b) hasil pewarnaan graf menggunakan algoritma MMI yang butuh empat warna (merah, biru, kuning, hijau) dalam proses pewarnaannya.

Untuk melihat distribusi dan sebaran perbandingan banyak warna, dapat dilihat pada Boxplot Gambar 5



Gambar 5. Boxplot *Greedy* vs Welch-Powell (a) dan *Greedy* vs MMI (b)

Berdasarkan Gambar 5(a), terlihat bahwa algoritma Welch-Powell memiliki box yang lebih tebal daripada algoritma *Greedy* karena standar deviasi Welch-Powell (0.4577) lebih besar daripada standar deviasi *Greedy* (0.2582). Berdasarkan Gambar 5(b) algoritma *Greedy* mempunyai box lebih tebal dari standar deviasi MMI karena standar deviasi *Greedy* (0.5071) lebih besar daripada standar deviasi MMI (0.2582).

Dengan penamaan verteks yang berbeda-beda maka penggunaan sebuah algoritma pun akan menghasilkan banyak warna yang beda. Secara empirik dari Gambar graf 3(a), apabila menggunakan algoritma *Greedy* untuk pewarnaan ada 14 eksperimen yang menggunakan 4 warna dan ada 1 eksperimen yang menggunakan 5 warna. Kemudian terdapat 4 eksperimen yang menggunakan 4 warna dan 11 eksperimen menggunakan 3 warna, bila Gambar 1 diwarnai dengan algoritma Welch-Powell. Untuk Gambar 3(b), apabila menggunakan algoritma *Greedy* untuk pewarnaan, ada 9 eksperimen yang menggunakan 4 warna dan ada 6 eksperimen yang menggunakan 5 warna. Sedangkan, terdapat 14 eksperimen yang menggunakan 4 warna dan 1 eksperimen menggunakan 3 warna, apabila Gambar graf 3(b) diwarnai dengan algoritma Welch-Powell.

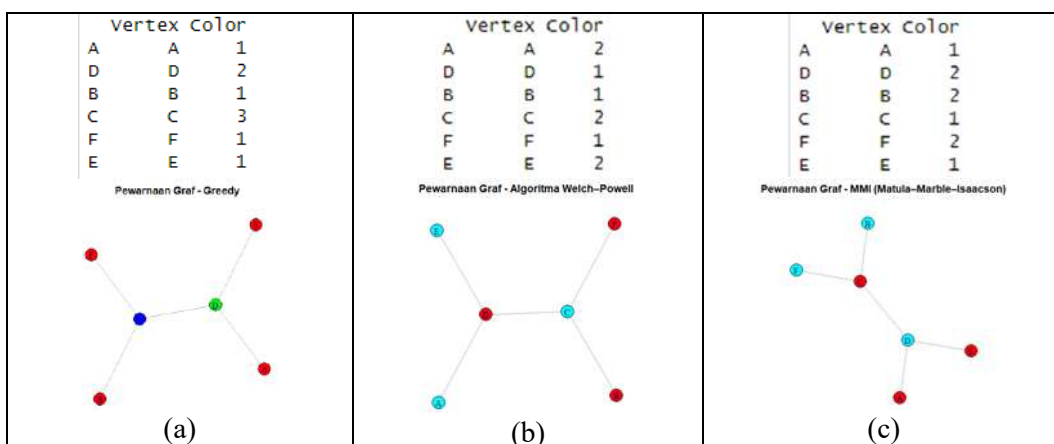
Analisis sensitivitas tidak dapat dilakukan karena, percobaan ini dilakukan oleh siswa secara manual dan random sesuai pelabelan tiap siswa. Dari Tabel 1, dapat dilihat keunggulan dari masing-masing algoritma yang disajikan pada Tabel 2 dibawah ini. Keunggulan dari algoritma dilihat dari sedikitnya jumlah warna yang dipakai untuk mewarnai.

Tabel 2. Kinerja Keunggulan Tiga Algoritma Pewarnaan

	Graf 3(a)			Graf 3(b)		
	Greedy Unggul	Identik	WP Unggul	Greedy Unggul	Identik	MMI Unggul
Jumlah	0	3	12	0	8	7
Proporsi	0	0.20	0.80	0	0.53	0.47

Berdasar Tabel 1, dapat dilihat keunggulan dari masing-masing algoritma yang diringkaskan pada Tabel 2. Keunggulan dari algoritma dilihat dari sedikitnya jumlah warna yang dipakai untuk mewarnai. Terlihat dari Tabel 2, bahwa algoritma *Greedy* tidak pernah unggul dalam kinerjanya dibandingkan dua algoritma tersebut.

Ketiga algoritma tersebut dapat dituangkan dalam bentuk *script* program. Hasil contoh output dari algoritma tersebut yang diterapkan pada graf sederhana yang terdiri dari 6 verteks dan 5 edge dapat digambarkan pada Gambar 6. Gambar 6(a) adalah hasil dari algoritma *Greedy*, Gambar 6(b) adalah hasil dari algoritma Welch-Powell dan Gambar 6(c) adalah Hasil dari algoritma MMI. Algoritma *Greedy* membutuhkan tiga warna, sedangkan algoritma Welch-Powell dan MMI hanya membutuhkan dua warna.



Gambar 6. Hasil Pewarnaan Tiga Algoritma untuk suatu graf

Alasan algoritma *Greedy* tidak optimal dibanding dua algoritma yang lain adalah karena algoritma *Greedy* memberi warna ke *verteks* sesuai urutan input acak atau random tanpa strategi pemilihan verteks berdasarkan derajat atau struktur graf. Verteks penting (dengan banyak tetangga) kemungkinan bisa diwarnai lebih belakangan, sehingga memaksa penggunaan warna baru padahal bisa dihindari jika diberi prioritas. Algoritma *Greedy* tidak menghitung atau memperkirakan dua hal yaitu berapa banyak warna yang mungkin dibutuhkan oleh *verteks* tertentu dan konflik potensial dengan tetangganya. Kelemahan algoritma *Greedy* ini dikoreksi dengan algoritma Welch-Powell yaitu dengan memberi warna verteks “sibuk” dulu untuk menghemat warna. Arti “sibuk” disini adalah verteks dengan derajat yang terbesar. Demikian juga kelemahan algoritma *Greedy* ini juga dikoreksi atau

diperbaiki oleh algoritma MMI dengan mewarnai verteks “sepi” terlebih dahulu, sehingga memberi ruang fleksibel warna untuk *verteks* “sibuk”. Arti “sepi” disini adalah verteks dengan derajat terkecil dan kemudian dihapus dalam grafnya.

Untuk penelitian *kuantitatif-empiris* dilakukan uji secara statistik. Dan untuk kasus ini digunakan uji Wilcoxon Rank-Sign. Apabila dilakukan Wilcoxon Rank-Sign (WRS) test terkait Gambar1 di Tabel 1 didapat hasil seperti pada Gambar 7.

```
wilcox.test(Gambar1Greedy, Gambar1WP, paired = TRUE, exact = FALSE, correct = TRUE)

Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  Gambar1Greedy and Gambar1WP
V = 78, p-value = 0.0006269
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Gambar 7. Hasil WRS test pada Gambar 3 di Tabel 1

Apabila dilakukan Wilcoxon Rank-Sign test terkait Gambar 3 di Tabel 1 didapat hasil seperti pada Gambar 8.

```
wilcox.test(Gambar2Greedy, Gambar2MMI, paired = TRUE, exact = FALSE, correct = TRUE)

Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  Gambar2Greedy and Gambar2MMI
V = 28, p-value = 0.01073
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Gambar 8. Hasil WRS test pada Gambar 4 di Tabel 1

Uji hipotesis dari Wilcoxon Rank-Sign test adalah H_0 : Median dari kedua data tersebut sama versus H_1 : Median dari kedua data tersebut tidak sama. Ambil tingkat signifikansi 5%, artinya bersedia menerima risiko 5% untuk menolak hipotesis nol (H_0) padahal H_0 sebenarnya benar. Untuk Gambar graf 3(a), berdasarkan Gambar 7 didapat $p\text{-value} = 0.0006269$ artinya H_0 ditolak sehingga banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai Gambar 1 tidak sama. Artinya secara statistik ada perbedaan yang signifikan banyak warna antara menggunakan *Greedy* dan menggunakan algoritma Welch-Powell. Untuk Gambar graf 3(b), berdasarkan Gambar 8 didapat $p\text{-value} = 0.01073$ artinya H_0 juga ditolak sehingga banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai Gambar 3 tidak sama. Artinya secara statistik ada perbedaan yang signifikan banyak warna antara menggunakan algoritma *Greedy* dan menggunakan Algoritma MMI.

KESIMPULAN

Penelitian ini memiliki beberapa keterbatasan. Pertama, analisis hanya dilakukan pada dua graf uji sehingga generalisasi hasil masih terbatas. Kedua, algoritma *Greedy coloring* yang digunakan bersifat sangat sensitif terhadap urutan verteks, sehingga hasil pewarnaan dapat bervariasi tergantung pada urutan input.

Ketiga, penelitian ini belum mencakup perbandingan dengan pendekatan heuristik lain seperti DSATUR atau varian *Greedy* berbasis pengurutan tertentu. Sebagai arah pengembangan, penelitian berikutnya dapat difokuskan pada perluasan cakupan data dengan menguji lebih banyak graf mozaik yang bervariasi dalam ukuran, kerapatan, dan struktur topologi. Pendekatan replikasi komputasional skala besar, misalnya dengan melakukan hingga 1000 permutasi urutan verteks, dapat digunakan untuk mengevaluasi stabilitas dan sensitivitas performa algoritma pewarnaan. Ringkasan temuan utamanya adalah hasil penelitian menunjukkan bahwa algoritma Welch–Powell (WP) dan Marble–Matula–Isaacson (MMI) secara signifikan lebih efisien dibandingkan algoritma *Greedy* dalam pewarnaan graf mozaik geometris, karena keduanya mampu menggunakan jumlah warna yang lebih sedikit untuk mencapai pewarnaan yang valid. Berdasarkan uji Wilcoxon Rank-Sign, diperoleh p-value sebesar 0.0006269 untuk WP dan 0.01073 untuk MMI, keduanya lebih kecil dari tingkat signifikansi 5%, yang menegaskan adanya perbedaan nyata dalam kinerja. Efisiensi WP dan MMI juga terbukti konsisten pada graf dengan jumlah verteks 55–56 dan densitas rendah, menunjukkan kemampuan adaptif terhadap struktur graf planar. Secara teoretis, hasil ini sejalan dengan Teorema Empat Warna yang menyatakan bahwa setiap graf planar dapat diwarnai dengan tidak lebih dari empat warna, sehingga WP dan MMI terbukti lebih mendekati batas optimum pewarnaan graf dibandingkan algoritma *Greedy*.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis berterima kasih kepada Fakultas Teknologi Informasi UKDW yang telah memberi dukungan dan memfasilitasi penelitian ini dari mulai sampai dengan akhir.

REFERENSI

- Bahri, S., Novrial, G. M., & Narwen, N. (2023). Pemrograman Pewarnaan Graf Pada Penjadwalan Mata Kuliah Jurusan Matematika. *Jurnal Lebesgue : Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Matematika dan Statistika*. Vol. 4(1), 417–431. <https://doi.org/10.46306/lb.v4i1.260>
- Diestel, R. (2017). *Graph Theory, 5th edition 2017*. Springer-Verlage.
- Enot, F. M., Seto, S. B., & Bantas, M. G. D. (2024). Eksplorasi Bentuk Anyaman Rotan pada Usaha Kerajinan Masyarakat Desa Sita. *Jupika: Jurnal Pendidikan Matematika*. Vol. 7(2), 79–85. <https://doi.org/10.37478/jupika.v7i2.3172>
- Ewens, W. J., & Brumberg, K. (2023). *Introductory Statistics for Data Analysis*. Springer International Publishing.
- Fadilah, A. N., Subarkah, P., Pramudya, R. S., & Syabani, A. (2024). A Comparison of Welch Powell Algorithm and Greedy Algorithm in Odd Semester Lecture Room Scheduling Optimization Faculty of Computer Science. *JTAM (Jurnal*

- Teori Dan Aplikasi Matematika*). Vol. 8(4), 1169–1182.
<http://journal.ummat.ac.id/index.php/jtam>
- John, Clark, & Allan, H.D (1995). *Firstlook_Graphtheory*. Allied Publishers LTD and World Scientific.
- Kraleva, R., KraleV, V., & Katsarski, T. (2025). An Analysis Between The Welsh-Powell and DSatur Algorithms for Coloring of Sparse Graphs. *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*. Vol. 15(4), 3867–3875. <https://doi.org/10.11591/ijece.v15i4.pp3867-3875>
- Latif, S. A., Hasan, I. K., Achmad, N., Wungguli, D., & Nashar, L. O. (2024). *Utilizing the Welch-Powell Algorithm and the IDO (Incident Degree Ordering) Algorithm in Traffic Light Settings*. Vol. 21(1), 62–70. <https://doi.org/10.31851/sainmatika.v21i1.9630>
- Lubis, H., & Nuraini, S. (2024). Eksplorasi Pewarnaan Graf dalam Identifikasi Destinasi Kuliner Menggunakan Algoritma Welch Powell di Kota Serang. *Jurnal Ilmiah Matematika Realistik*. Vol. 5(2), 390–396. <https://doi.org/10.33365/ji-mr.v5i2.5996>
- Manullang, L. H., & Marpaung, F. (2024). Penerapan Pewarnaan Graf Menggunakan Algoritma Welch-Powell Untuk Keefektifan Lampu Lalu Lintas di Kota Medan. *ULIL ALBAB : Jurnal Ilmiah Multidisiplin*. Vol. 3(8), 694–703.
- Maro, L. (2022). Application of the Welch-Powell Algorithm on Graph Coloring in Mapping Village Area in Alor Island, East Nusa Tenggara Landerius Maro Dosen Universitas Tribuana Kalabahi. *Jurnal Ilmiah Wahana Pendidikan*. Vol. 8(23), 569–575. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7421798>
- Matula, D. W., & Beck, L. L. (1983). *Smallest-Last Ordering and Clustering and Graph Coloring Algorithms*. Vol. 30(3), 417–427. <https://doi.org/10.1145/2402.322385>
- Maulani, A., & Wulandari, D. (2023). Implementasi Pewarnaan Graf pada Pengelompokan Siswa/i Rumah Belajar Azalea dengan Algoritma Welch-Powell. *Jurnal Siger Matematika*. Vol. 04(02), 37–42.
- Mirdayanti, M., Nur, F., & Abrar, A. I. P. (2024). Eksplorasi Geometri dalam Motif Batik Lontara Bugis: Pendekatan Etnomatematika pada Pembelajaran. *Jupika: Jurnal Pendidikan Matematika*. Vol. 7(2), 195–202. <https://doi.org/10.37478/jupika.v7i2.5134>
- Nasir, M., Faisal, & Setyawan, D. (2022). 1398-Article Text-3993-1-10-20220210. *Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika*. Vol. 5, 57–69.
- Nuryatma, N., Wasono, W., Deny, F., & Amijaya, T. (2024). Aplikasi Pewarnaan Graf untuk Optimalisasi Distribusi Beras di Badan Usaha Logistik (BULOG) Kota Samarinda. *BASIS Jurnal Ilmiah Matematika*. Vol. 3(1), 38–53. <http://jurnal.fmipa.unmul.ac.id/index.php/Basis>
- Syukron, A. I. S., Siregar, R. A. B., Sitohang, Y. A. A., & Harliana, P. (2024). Pemanfaatan Algoritma Pewarnaan Graf untuk Efisiensi Penjadwalan Dosen. *AR-RUMMAN: Journal of Education and Learning Evaluation*. Vol. 1(2), 650–654. <https://doi.org/10.57235/arrumman.v1i2.4287>
- Yusak, M. Y., Putri, D. F., & Syaripuddin, S. (2024). Penerapan Pewarnaan Graf Menggunakan Algoritma Welch-Powell pada Penjadwalan Mata Pelajaran. *Journal of Mathematics Education and Science*. Vol. 7(2), 177–183. <https://doi.org/10.32665/james.v7i2.2272>