Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.19 No.2 (Desember 2025) Hal. 208-224

PEMODELAN MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH DENGUE DENGAN LARVASIDA SEBAGAI PARAMETER INTERVENSI

Mita Ekaristi, Bayu Prihandono, Evi Noviani

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Tanjungpura, Indonesia
Jalan Prof. Dr. H. Hadari Nawawi Pontianak 78124
email: *h1011211036@student.untan.ac.id*

ABSTRACT

Dengue Hemorrhagic Fever (DHF) remains a public health threat in Indonesia. This study aims to analyze the effectiveness of larvicides in controlling DHF through a mathematical modeling approach. This study developed an SIR-ASI model that considers the aquatic phase of mosquitoes. The model was formulated as a system of nonlinear differential equations by integrating the parameter of larval mortality due to larvicides (u). The basic reproduction number (R_0) is derived using the Next Generation Matrix method. The stability of the system around the equilibrium point is analyzed using the Routh-Hurwitz criterion, which proves that the disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable when $R_0 < 1$. Numerical simulations indicate that increasing larvicide intensity (u) significantly reduces R_0 from 3.19051 (without intervention) to 0.68281 (with intervention), equivalent to a 78.60% reduction. Sensitivity analysis identified u as one of the key parameters controlling R_0 along with mosquito bite frequency (b) and mosquito mortality (μ_v). The results of this study prove that larvicide intervention is effective in breaking the DHF transmission cycle by suppressing the vector population, thus making it a consideration in vector control strategies.

Keywords: SIR-ASI Model, Larvicide, Next Generation Matrix, Asymptotic Stability, Sensitivity analysis

ABSTRAK

Demam Berdarah Dengue (DBD) tetap menjadi ancaman kesehatan masyarakat di Indonesia. Penelitian ini bertujuan menganalisis efektivitas larvasida dalam pengendalian DBD melalui pendekatan pemodelan matematika. Penelitian ini mengembangkan model SIR-ASI yang mempertimbangkan fase akuatik nyamuk. Model diformulasikan sebagai sistem persamaan diferensial nonlinear dengan mengintegrasikan parameter mortalitas larva akibat larvasida (u). Bilangan reproduksi dasar (R_0) diturunkan menggunakan metode *Next Generation Matrix*. Kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibrium dianalisis melalui kriteria Routh-Hurwitz, membuktikan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$. Simulasi numerik menunjukkan bahwa peningkatan intensitas larvasida (u) menurunkan R_0 secara signifikan dari 3,19051 (tanpa intervensi) menjadi 0,68281 (dengan intervensi), setara reduksi 78,60%. Analisis sensitivitas mengidentifikasi u dapat menjadi salah satu parameter kunci pengendali R_0 bersama dengan frekuensi gigitan nyamuk (b) dan mortalitas nyamuk (μ_v). Hasil penelitian membuktikan bahwa intervensi larvasida efektif memutus siklus penularan DBD melalui penekanan populasi vektor, sehingga dapat menjadi pertimbangan dalam strategi pengendalian vektor.

Kata kunci: Model SIR-ASI, Larvasida, Matriks Generasi Berikutnya, Kestabilan Asimtotik, Analisis Sensitivitas

Received: 03 September 2025, Accepted: 06 November 2025, Published: 09 November 2025

PENDAHULUAN

Demam Berdarah Dengue (DBD) hingga saat ini masih menjadi masalah kesehatan masyarakat yang serius di Indonesia dan banyak negara tropis lainnya. Penyakit yang ditularkan melalui gigitan nyamuk *Aedes aegypti* ini menunjukkan tren peningkatan kasus yang signifikan dalam dekade terakhir. Data Kementerian Kesehatan RI tahun 2023 mencatat lebih dari 100.000 kasus DBD terjadi di Indonesia, yang menunjukkan urgensi penanganan yang efektif (Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2024). Tingginya insidensi DBD dipengaruhi oleh berbagai faktor, termasuk kondisi lingkungan, perubahan iklim, dan efektivitas strategi pengendalian vektor (Guzman *et.al*., 2016; Jing *et.al*., 2018).

Para ahli telah mengembangkan berbagai pendekatan untuk mempelajari penyebaran DBD, salah satunya melalui pemodelan matematika. Model SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) yang diperkenalkan oleh Kermack & McKendrick pada tahun 1927 merupakan fondasi dalam pemodelan penyakit menular (Brauer *et.al*., 2019). Namun, model ini dianggap memiliki keterbatasan karena tidak memasukkan siklus hidup nyamuk secara komprehensif (Ndii, 2022; Ogunlade *et.al*., 2023).

Untuk mengatasi keterbatasan tersebut, Bustamam *et.al*. (2018) mengembangkan model SIR-ASI yang memasukkan fase akuatik nyamuk. Meskipun cukup komprehensif, model ini masih kurang fokus pada optimalisasi penggunaan larvasida. Penelitian Bano dkk. (2022) memang telah mempertimbangkan parameter larvasida, namun analisis sensitivitas terhadap bilangan reproduksi dasar (R_0) belum dikaji secara mendalam. Sementara itu, studi Agustina & Affandi (2023) telah memasukkan parameter larvasida, namun tidak menyertakan analisis sensitivitas dan validasi numerik terkait dampak larvasida terhadap dinamika populasi vektor. Akibatnya, efektivitas larvasida sebagai strategi pengendalian belum terkuantifikasi secara komprehensif.

Berdasarkan evaluasi terhadap penelitian-penelitian terdahulu, tampak jelas bahwa masih diperlukan kajian lebih mendalam tentang efektivitas larvasida. Larvasida dipilih sebagai fokus penelitian karena targetnya pada fase larva yang merupakan tahap paling rentan dalam siklus hidup nyamuk (Rather *et al*., 2017; Wells *et al*.., 2023). Penelitian ini mengembangkan model matematika penyebaran penyakit DBD berbasis kerangka SIR-ASI yang diperkenalkan oleh Bustamam *et.al*. (2018) Modifikasi signifikan dilakukan melalui eliminasi kompartemen vaksinasi (V_h) dan parameter terkait (laju hilangnya kekebalan, efektivitas vaksin).

Menurut Vasconcelos *et al*. (2021), penyederhanaan model dapat membantu fokus analisis pada parameter tertentu tanpa mengurangi akurasi hasil. Pendekatan ini memungkinkan penelitian lebih terkonsentrasi pada mekanisme intervensi larvasida melalui parameter mortalitas larva (u). Dengan pendekatan ini, penelitian bertujuan untuk menganalisis sensitivitas R_0 terhadap variasi parameter u, mengevaluasi dampak intervensi larvasida, serta memberikan rekomendasi berbasis matematis untuk strategi pengendalian DBD.

TINJAUAN PUSTAKA

Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{1}$$

dengan $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ dan $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$ (Perko, 2001)

Titik Ekuilibrium dan Kestabilan

Titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial pada Persamaan (1) merupakan keadaan di mana sistem tidak mengalami perubahan, yaitu ketika $f(\bar{x}) = 0$ untuk setiap titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Analisis kestabilan lokal di sekitar titik ekuilibrium dilakukan melalui linearisasi menggunakan matriks Jacobian (Strogatz, 2018):

$$J = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Sifat kestabilan sistem ditentukan oleh nilai eigen (λ) dari matriks Jacobian. Berdasarkan kriteria kestabilan, jika semua nilai eigen memiliki bagian real negatif $(\mathrm{Re}(\lambda) < 0)$, maka titik ekuilibrium bersifat stabil asimtotik lokal. Sebaliknya, jika terdapat minimal satu nilai eigen dengan bagian real positif, maka titik ekuilibrium tidak stabil (Bulai *et.al*., 2023; Martcheva, 2015).

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan konsep fundamental dalam epidemiologi yang didefinisikan sebagai rata-rata jumlah individu sekunder yang terinfeksi oleh satu individu infektif yang masuk ke dalam populasi yang sepenuhnya rentan (Diekmann *et.al*., 2013; Van Den Driessche, 2017). Nilai R_0 berfungsi sebagai indikator kuantitatif potensi epidemi di mana $R_0 > 1$ menunjukkan penyakit akan menyebar dalam populasi, sedangkan $R_0 < 1$ mengindikasikan penyakit dapat dikendalikan (Heffernan *et.al*., 2005).

Dalam penelitian ini, perhitungan R_0 dilakukan menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM). Metode ini melibatkan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi kompartemen terinfeksi.
2. Membentuk matriks generasi berikutnya (NGM).
3. Menghitung nilai eigen dominan dari matriks tersebut.

Secara matematis, jika F adalah matriks yang merepresentasikan laju munculnya infeksi baru dan V adalah matriks yang merepresentasikan laju transisi antar kompartemen, maka:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) \tag{3}$$

dengan ρ menyatakan *spectral radius* (Fosu *et.al*., 2020; Van den Driessche & Watmough, 2002).

Analisis Sensitivitas

Untuk mengukur pengaruh parameter terhadap dinamika penyakit, dilakukan analisis sensitivitas indeks R_0 menggunakan metode *normalized forward sensitivity index*. Indeks sensitivitas S_p dari R_0 terhadap parameter p didefinisikan sebagai (Chitnis *et.al*., 2008):

$$S_p = \frac{\partial R_0}{\partial p} \cdot \frac{p}{R_0} \tag{4}$$

di mana p adalah parameter yang ada dalam bilangan reproduksi dasar pada model. Indeks ini mengukur persentase perubahan R_0 akibat perubahan persentase parameter p.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan melalui beberapa tahapan metodologis yang sistematis sebagai berikut:

1) Formulasi model matematika
   Model SIR-ASI dikembangkan dengan memodifikasi model dasar yang telah ada melalui eliminasi kompartemen vaksinasi untuk fokus pada analisis efektivitas larvasida. Berdasarkan asumsi biologis realistis, disusun diagram kompartemen dan sistem persamaan diferensial nonlinear yang merepresentasikan dinamika penyebaran DBD antara populasi manusia dan nyamuk.
2) Analisis model
   Analisis model meliputi penentuan titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik dengan menyelesaikan sistem persamaan diferensial ketika semua turunan sama dengan nol, perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM), serta analisis

kestabilan lokal masing-masing titik ekuilibrium menggunakan matriks Jacobian dan kriteria Routh-Hurwitz.

3) Simulasi numerik
Simulasi dilakukan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan variasi parameter mortalitas larva (u). Nilai parameter diperoleh dari studi literatur dan asumsi realistis. Analisis sensitivitas dilakukan untuk mengidentifikasi parameter dominan yang memengaruhi R_0. Hasil simulasi divisualisasikan dalam bentuk grafik dinamika populasi.

4) Interpretasi hasil
Hasil analisis matematis dan simulasi numerik diinterpretasikan untuk mengevaluasi efektivitas intervensi larvasida dalam pengendalian DBD.

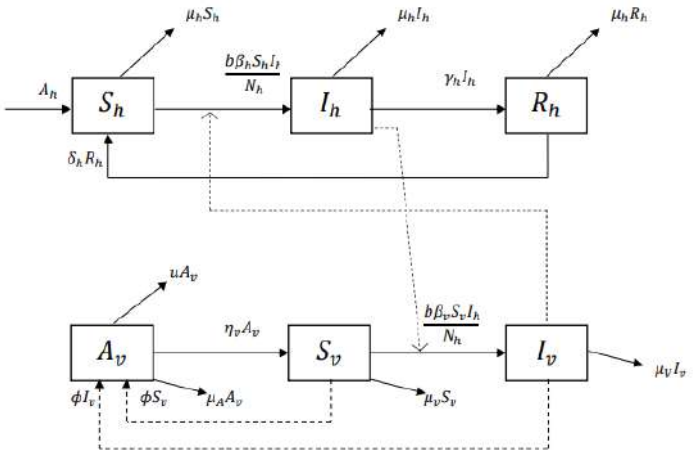
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembentukan Model Matematika

Model SIR-ASI termodifikasi terdiri dari enam kompartemen, yaitu tiga kompartemen manusia (rentan (S_h), terinfeksi (I_h), sembuh (R_h)) dan tiga kompartemen nyamuk (akuatik (A_v), rentan (S_v), terinfeksi (I_v)). Parameter mortalitas larva (u) diintegrasikan secara khusus ke dalam kompartemen akuatik (A_v) untuk merepresentasikan mekanisme kerja larvasida kimiawi yang secara langsung meningkatkan kematian larva sebelum berkembang menjadi nyamuk dewasa. Pembentukan model ini didasarkan pada tujuh asumsi biologis berikut.

1. Populasi manusia bersifat tertutup (tanpa migrasi) dan konstan, dengan laju kelahiran dan laju kematian memenuhi $A_h = \mu_h N_h$. Sementara itu, populasi nyamuk bersifat dinamis.
2. Penularan hanya terjadi melalui nyamuk dewasa terinfeksi, bukan antar manusia langsung.
3. Faktor lingkungan (suhu, kelembapan, curah hujan) dianggap konstan selama periode analisis, sesuai dengan praktik umum dalam model epidemiologi jangka pendek.
4. Tidak ada predator alami (misal, ikan pemakan jentik) yang memengaruhi populasi nyamuk dalam model ini, untuk fokus pada efek larvasida dan dinamika vektor.
5. Hanya nyamuk dewasa saja yang menularkan penyakit, fase akuatik tidak berperan dalam penularan.
6. Manusia yang sembuh memiliki kekebalan sementara dan dapat kembali rentan.
7. Nyamuk yang terinfeksi tidak dapat sembuh dan tetap terinfeksi sampai mati.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut, dapat dibuat diagram transfer proses penyebaran DBD seperti pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Diagram Transfer Proses Penyebaran DBD

Dari Gambar 1, diperoleh model matematika berbentuk sistem persamaan diferensial berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{dS_h}{dt} &= A_h - \frac{b\beta_h S_h I_v}{N_h} - \mu_h S_h + \delta_h R_h \\
\frac{dI_h}{dt} &= \frac{b\beta_h S_h I_v}{N_h} - I_h(\gamma_h + \mu_h) \\
\frac{dR_h}{dt} &= \gamma_h I_h - R_h(\mu_h + \delta_h) \\
\frac{dA_v}{dt} &= \phi(I_v + S_v) - uA_v - \eta_v A_v - \mu_A A_v \\
\frac{dS_v}{dt} &= \eta_v A_v - \frac{b\beta_v S_v I_h}{N_h} - \mu_v S_v \\
\frac{dI_v}{dt} &= \frac{b\beta_v S_v I_h}{N_h} - \mu_v I_v
\end{aligned} \tag{5}$$

Nilai parameter model pada Persamaan (5) dijelaskan pada Tabel 1.

Tabel 1. Deskripsi Parameter-parameter dalam Model

Parameter	Keterangan	Syarat	Satuan
N_h	Jumlah populasi manusia	$N_h > 0$	orang
A_h	Laju kelahiran manusia per kapita	$A_h > 0$	orang/hari
b	Rata-rata jumlah gigitan nyamuk terhadap manusia	$b > 0$	gigitan/(nyamuk×hari)
β_h	Tingkat keberhasilan penularan pada manusia	$\beta_h > 0$	individu/(nyamuk×hari)
β_v	Tingkat keberhasilan penularan pada nyamuk	$\beta_v > 0$	1/(nyamuk×manusia×hari)
μ_h	Tingkat kematian manusia	$\mu_h > 0$	1/hari
μ_v	Tingkat kematian nyamuk	$\mu_v > 0$	1/hari
μ_A	Tingkat kematian larva	$\mu_A > 0$	larva/hari
δ_h	Laju perubahan individu sembuh (R_h) kembali menjadi rentan (S_h)	$\delta_h > 0$	1/hari
γ_h	Tingkat pemulihan manusia	$\gamma_h > 0$	1/hari

Parameter	Keterangan	Syarat	Satuan
ϕ	Rata-rata jumlah telur yang dihasilkan oleh nyamuk betina	$\phi > 0$	jumlah telur/peneluran
η_v	Laju perubahan individu fase akuatik (A_v) ke nyamuk dewasa (S_v)	$\eta_v > 0$	1/hari
u	Tingkat kematian larva akibat larvasida (abate)	$0 \leq u \leq 1$	1/hari

Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium pada penyakit DBD dapat diklasifikasikan menjadi dua, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit. Berdasarkan sistem (5), titik ekuilibrium diperoleh ketika $\frac{dS_h}{dt} = \frac{dI_h}{dt} = \frac{dR_h}{dt} = \frac{dA_v}{dt} = \frac{dS_v}{dt} = \frac{dI_v}{dt} = 0$, sehingga diperoleh titik ekuilibrium sebagai berikut.

1. Titik ekuilibrium bebas penyakit

   Titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh dengan mengasumsikan tidak ada infeksi dalam populasi, yaitu $I_h = I_v = R_h = 0$. Dengan mensubstitusikan nilai-nilai ini ke dalam sistem Persamaan (5) dan menyelesaikan persamaan ketika semua turunan sama dengan nol, diperoleh

$$E_0 = \left(\frac{A_h}{\mu_h}, 0, 0, \frac{\eta_v \phi^2}{\mu_v(u+\eta_v+\mu_A)^2}, \frac{\eta_v \phi}{\mu_v(u+\eta_v+\mu_A)}, 0\right)$$

2. Titik ekuilibrium endemik penyakit

   Titik ekuilibrium endemik diperoleh dengan mengasumsikan penyakit tetap ada dalam populasi ($I_h \neq 0, I_v \neq 0$). Dengan menyelesaikan sistem Persamaan (5) secara simultan dan semua turunan sama dengan nol, diperoleh

$$E^* = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, A_v^*, S_v^*, I_v^*)$$

   dengan

$$S_h^* = \frac{N_h\gamma_h\mu_h\mu_v + N_h\mu_h^2\mu_v + N_h\delta_h\mu_h\mu_v + A_h\mu_h b\beta_v + A_h\delta_h b\beta_v}{\beta_v(\mu_h+\delta_h)\mu_h b},\ I_h^* = -\frac{N_h\mu_v}{b\beta_v},\ R_h^* = -\frac{\gamma_h N_h\mu_v}{(\mu_h+\delta_h)b\beta_v},\ A_v^* = 0,\ S_v^* = \frac{N_h^2\mu_h\mu_v(\gamma_h\mu_h+\gamma_h\delta_h+\mu_h^2+\mu_h\delta_h)}{b\beta_h(N_h\gamma_h\mu_h\mu_v+N_h\mu_h^2\mu_v+N_h\delta_h\mu_h\mu_v+A_h\mu_h b\beta_v+A_h\delta_h b\beta_v)},$$

$$I_v^* = -\frac{N_h^2\mu_h\mu_v(\gamma_h\mu_h+\gamma_h\delta_h+\mu_h^2+\mu_h\delta_h)}{b\beta_h(N_h\gamma_h\mu_h\mu_v+N_h\mu_h^2\mu_v+N_h\delta_h\mu_h\mu_v+A_h\mu_h b\beta_v+A_h\delta_h b\beta_v)}.$$

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar dihitung menggunakan metode NGM. Kompartemen yang terinfeksi dalam model ini adalah I_h (manusia terinfeksi) dan I_v (nyamuk terinfeksi), di mana sistem dimodelkan sebagai

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathcal{F}_i - \mathcal{V}_i$$

dengan $\mathcal{F}_i$ menyatakan laju infeksi baru dan $\mathcal{V}_i$ menyatakan laju transisi keluar dari kompartemen terinfeksi. Matriks NGM didefinisikan sebagai $K = FV^{-1}$, dengan $F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}\right]$ dan $V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}\right]$. Matriks F dan V dibentuk sebagai berikut.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b\beta_h A_h}{N_h \mu_h} \\ \frac{b\beta_v \eta_v \phi}{N_h \mu_v (u+\eta_v+\mu_A)} & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \gamma_h + \mu_h & 0 \\ 0 & \mu_v \end{bmatrix}$$

Dengan menginverskan matriks V, diperoleh matriks NGM menjadi

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b\beta_h A_h}{N_h \mu_h \mu_v} \\ \frac{b\beta_v \eta_v \phi}{N_h \mu_v (u+\eta_v+\mu_A)(\gamma_h+\mu_h)} & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen matriks K diperoleh dari persamaan karakteristik $|K - \lambda I| = 0$ diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 \beta_h \beta_v A_h \eta_v \phi}{N_h^2 \mu_h \mu_v^2 (u+\eta_v+\mu_A)(\gamma_h+\mu_h)}}.$$

Bilangan reproduksi dasar merupakan nilai eigen dominan (spektral radius) dari matriks K:

$$R_0 = \sqrt{\frac{b^2 \beta_h \beta_v A_h \eta_v \phi}{N_h^2 \mu_h \mu_v^2 (u+\eta_v+\mu_A)(\gamma_h+\mu_h)}}.$$

Dengan menggunakan nilai parameter dari Tabel 2, perhitungan numerik R_0 untuk berbagai nilai u ditampilkan dalam Tabel 3.

Analisis Kestabilan di Sekitar Titik Ekuilibrium

Untuk menyelidiki kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibrium, Persamaan (5) dilinearisasi terlebih dahulu dengan menggunakan matriks Jacobian. Masing-masing persamaan diturunkan secara parsial terhadap $S_h, I_h, R_h, A_v, S_v,$ dan I_v sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{b\beta_h I_v}{N_h} - \mu_h & 0 & \delta_h & 0 & 0 & -\frac{b\beta_h S_h}{N_h} \\ \frac{b\beta_h I_v}{N_h} & -(\gamma_h+\mu_h) & 0 & 0 & 0 & \frac{b\beta_h S_h}{N_h} \\ 0 & \gamma_h & -(\mu_h+\delta_h) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u-\eta_v-\mu_A & \phi & \phi \\ 0 & -\frac{b\beta_v S_v}{N_h} & 0 & \eta_v & -\frac{b\beta_v I_h}{N_h} - \mu_v & 0 \\ 0 & \frac{b\beta_v S_v}{N_h} & 0 & 0 & \frac{b\beta_v I_h}{N_h} & -\mu_v \end{bmatrix} \quad (6)$$

Selanjutnya, akan ditentukan kriteria kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibrium.

Teorema 1. *Jika* $R_0 < 1$ *maka sistem* (5) *di sekitar titik ekuilibrium* E_0 *stabil asimtotik lokal dan jika* $R_0 > 1$ *maka sistem* (5) *di sekitar titik ekuilibrium* E_0 *tidak stabil.*

Bukti:

Akan dibuktikan jika $R_0 < 1$ maka sistem (5) di sekitar titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik lokal dan jika $R_0 > 1$ maka sistem (5) di sekitar titik ekuilibrium E_0 tidak stabil.

Diketahui $R_0 = \sqrt{\frac{b^2\beta_h\beta_v A_h\eta_v\phi}{N_h^2\mu_h\mu_v^2(u+\eta_v+\mu_A)(\gamma_h+\mu_h)}}$.

Substitusikan E_0 ke Persamaan (6), diperoleh matriks Jacobian yaitu,

$$\boldsymbol{J}(E_0) = \begin{bmatrix} -a & 0 & b & 0 & 0 & -c \\ 0 & -d & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & f & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h & i & j \\ 0 & -k & 0 & l & -m & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 & -o \end{bmatrix}$$

dengan

$a = \mu_h$, $b = \delta_h$, $c = \frac{b\beta_h A_h}{\mu_h N_h}$, $d = \gamma_h + \mu_h$, $e = \frac{b\beta_h A_h}{\mu_h N_h}$, $f = \gamma_h$, $g = \mu_h + \delta_h$,

$h = u + \eta_v + \mu_A$, $i = j = \phi$, $k = \frac{b\beta_v\eta_v\phi}{\mu_v(u+\eta_v+\mu_A)N_h}$, $l = \eta_v$, $m = \mu_v$,

$n = \frac{b\beta_v\eta_v\phi}{\mu_v(u+\eta_v+\mu_A)N_h}$, dan $o = \mu_v$.

Kestabilan E_0 dianalisis melalui matriks Jacobian $J(E_0)$. Persamaan karakteristik $\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$ menghasilkan enam nilai eigen, yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$. Dengan parameter positif, diperoleh

$$\lambda_1 = -\mu_h, \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{2}\left(u + \eta_v + \mu_A + \mu_v + \sqrt{\Delta_1}\right),$$
$$\lambda_4 = -(\mu_h + \delta_h), \qquad \lambda_6 = -\frac{1}{2}\left(\gamma_h + \mu_h + \mu_v + \sqrt{\Delta_2}\right)$$

yang semuanya negatif, dengan $\Delta_1 = (u + \eta_v + \mu_A)^2 - 2(u + \eta_v + \mu_A)\mu_v + \mu_v^2 + 4\eta_v\phi$ dan $\Delta_2 = (\gamma_h + \mu_h - \mu_v)^2 + 4\left(\frac{b^2\beta_h\beta_v A_h\eta_v\phi}{N_h^2\mu_h\mu_v(u+\eta_v+\mu_A)}\right)$.

Untuk λ_2 dan λ_5,

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-(u + \eta_v + \mu_A + \mu_v) + \sqrt{\Delta_1}\right), \qquad \lambda_5 = \frac{1}{2}\left(-(\gamma_h + \mu_h + \mu_v) + \sqrt{\Delta_2}\right).$$

Agar $\lambda_2 < 0$, syaratnya adalah $\sqrt{\Delta_1} < u + \eta_v + \mu_A + \mu_v$. Kuadratkan kedua sisi, diperoleh

$$\eta_v\phi < \mu_v(u + \eta_v + \mu_A).$$

Jika $R_0 < 1$, maka $b^2\beta_h\beta_v A_h\eta_v\phi < N_h^2\mu_h\mu_v^2(u + \eta_v + \mu_A)(\gamma_h + \mu_h)$. Dengan asumsi $\frac{N_h^2\mu_h\mu_v(\gamma_h+\mu_h)}{b\beta_h\beta_v A_h} \leq 1$, syarat $\eta_v\phi < \mu_v(u + \eta_v + \mu_A)$ terpenuhi, sehinggga $\lambda_2 < 0$.

Untuk $\lambda_5 < 0$, syaratnya adalah $\sqrt{\Delta_2} < \gamma_h + \mu_h + \mu_v$. Kudratkan kedua sisi, diperoleh

$$\frac{b^2\beta_h\beta_v A_h\eta_v\phi}{N_h^2\mu_h\mu_v(u+\eta_v+\mu_A)} < (\gamma_h + \mu_h)\mu_v.$$

Jika $R_0 < 1$, syarat ini terpenuhi, sehingga $\lambda_5 < 0$. Karena semua $\lambda_i < 0$, maka E_0 stabil asimtotik lokal.

Jika $R_0 > 1$, maka

$$\eta_v\phi > \mu_v(u+\eta_v+\mu_A),\ \frac{b^2\beta_h\beta_v A_h\eta_v\phi}{N_h^2\mu_h\mu_v(u+\eta_v+\mu_A)} < (\gamma_h+\mu_h)\mu_v.$$

Sehingga $\lambda_2 > 0$ dan $\lambda_5 > 0$, menjadikan E_0 tidak stabil. ■

Teorema 2. *Jika* $R_0 > 1$ *maka sistem* (5) *stabil asimtotik lokal di sekitar titik ekuilibrium* E^*.

Bukti:
Diketahui $R_0 > 1$, sehingga titik ekuilibrium endemik $E^* = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, A_v^*, S_v^*, I_v^*)$ eksis dan bernilai positif.
Akan dibuktikan jika $R_0 > 1$ maka sistem (5) stabil asimtotik lokal di sekitar titik ekuilibrium E^*.
Substitusikan E^* ke Persamaan (6) sehingga diperoleh matriks Jacobian yaitu,

$$\boldsymbol{J}(E^*) = \begin{bmatrix} -a & 0 & b & 0 & 0 & -c \\ d & -e & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & g & -h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & j & k \\ 0 & -l & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & o & 0 & 0 & p & -q \end{bmatrix}$$

dengan
$a = \frac{b\beta_h I_v^*}{N_h} + \mu_h$, $b = \delta_h$, $c = \frac{b\beta_h S_h^*}{N_h}$, $d = \frac{b\beta_h I_v^*}{N_h}$, $e = \gamma_h + \mu_h$, $f = \frac{b\beta_h S_h^*}{N_h}$, $g = \gamma_h$,
$h = \mu_h + \delta_h$, $i = u + \eta_v + \mu_A$, $j = k = \phi$, $l = \frac{b\beta_v S_v^*}{N_h}$, $m = \eta_v$,
$n = \frac{b\beta_v I_h^*}{N_h} + \mu_v$, $o = \frac{b\beta_v S_v^*}{N_h}$, $p = \frac{b\beta_v I_h^*}{N_h}$, dan $q = \mu_v$.

Kestabilan E^* dianalisis melalui matriks Jacobian $J(E^*)$. Entri diagonal J_{ii} adalah

$$J_{11} = -\left(\frac{b\beta_h I_v^*}{N_h} + \mu_h\right), \quad J_{22} = -(\gamma_h + \mu_h), \quad J_{33} = -(\mu_h + \delta_h),$$
$$J_{44} = -(u + \eta_v + \mu_A), \quad J_{55} = -\left(\frac{b\beta_v I_h^*}{N_h} + \mu_v\right), \quad J_{66} = -\mu_v.$$

Karena semua parameter positif dan $I_h^*, I_v^* > 0$ saat $R_0 > 1$, maka $J_{ii} < 0$. Persamaan karakteristik $\det(J(E^*) - \lambda I) = 0$ menghasilkan polinomial berderajat 6, yaitu

$$\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, semua nilai eigen memiliki bagian real positif jika $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, 6$ dan semua minor utama matriks Hurwitz $D_i > 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, 6$.
Koefisien a_1 adalah negatif dari jejak (*trace*) $J(E^*)$

$$a_1 = -\sum_{i=1}^{6} J_{ii} = \frac{b\beta_h I_v^*}{N_h} + \mu_h + \gamma_h + \mu_h + \mu_h + \delta_h + u + \eta_v + \mu_A + \frac{b\beta_v I_h^*}{N_h} + \mu_v + \mu_v > 0$$

Untuk a_2, a_3, a_4, a_5, dan a_6, secara umum sebagai berikut:

$$a_k = (-1)^k \sum_{\substack{kombinasi\ k\ suku \\ 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le 6}} \prod_{m=1}^{k} J_{i_m} + koreksi$$

Karena $J_{ii} < 0$, hasil kali $\prod J_{i_m}$ bergantian positif untuk k genap dan negatif untuk k ganjil, sehingga $(-1)^k \prod J_{i_m} > 0$. Koreksi dari submatriks tidak membalikkan positivitas karena entri diagonal dominan. Maka $a_3, a_4, a_5, a_6 > 0$. Matriks Hurwitz didefinisikan dengan minor utama $D_1 = a_1 > 0$, $D_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$ (karena $a_1 a_2$ besar), dan $D_3 = a_3 D_2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5 > 0$ (karena suku $a_1 a_2 a_3 + a_1 a_5$ dominan). Untuk D_4, D_5, D_6, positivitas dijamin oleh dominasi entri diagonal dan struktur model epidemiologi saat $R_0 > 1$ (Driessche & Watmough, 2002). Karena $D_6 = a_6 D_5$ dan $a_6 > 0$, positivitas D_5 menjamin $D_6 > 0$. Karena semua $a_i > 0$ dan $D_i > 0$, kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, sehingga semua nilai eigen memiliki bagian real negatif. Oleh karena itu, sistem stabil asimtotik lokal di E^* saat $R_0 > 1$. ■

Simulasi Numerik dan Analisis Sensitivitas

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi numerik. Simulasi numerik dilakukan menggunakan bahasa pemograman Python dengan metode Runge-Kutta Orde 4 ($\Delta t = 1$ hari) pada rentang waktu 365 hari. Nilai parameter mengacu pada Tabel 2 dengan kondisi awal $\big(S_h(0), I_h(0), R_h(0), A_v(0), S_v(0), I_v(0)\big) = (980, 20, 0, 2000, 980, 20)$ (Bustamam *et.al*., 2018).

Tabel 2. Nilai Parameter Model Matematika Penyebaran Penyakit DBD

Parameter	Nilai	Keterangan
N_h	1000	Diasumsikan total populasi manusia sebanyak 1000 orang
A_h	$1000/(65 \times 365)$	Diasumsikan populasi manusia konstan sehingga memenuhi $A_h = \mu_h N_h$
b	1	Nyamuk menggigit manusia hanya sekali dalam sehari (Aldila dkk., 2013)
β_h, β_v	0,1	Diperlukan 10 kali kontak antara nyamuk dan manusia sehingga nyamuk/manusia terinfeksi (Aldila dkk., 2013)
μ_h	$1/(65 \times 365)$	Angka harapan hidup populasi manusia adalah 65 tahun (Aldila dkk., 2013)
μ_v	1/30	Harapan hidup populasi nyamuk betina *Aedes aegypti* adalah 30 hari (Aldila dkk., 2015)
μ_A	0,75/21	Tingkat keberhasilan transisi dari larva menjadi nyamuk dewasa adalah 25% (asumsi)
δ_h	1/30	Kekebalan sementara manusia terhadap DBD setelah sembuh adalah 30 hari (Aldila dkk., 2013)
γ_h	1/14	Tingkat pemulihan populasi manusia dari DBD adalah 14 hari (Aldila dkk., 2015)
ϕ	300	Nyamuk betina menghasilkan 300 butir telur setiap kali penetasan (asumsi)
η_v	0,25/21	Transisi dari fase akuatik ke nyamuk dewasa (Aldila dkk., 2015)

Simulasi ini diperlukan untuk melihat pengaruh intervensi larvasida pada kasus DBD. Simulasi dilakukan dengan memvariasikan nilai parameter u. Nilai R_0 untuk berbagai nilai u ditampilkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Nilai R_0 dengan Variasi Nilai Parameter u

u	R_0	Reduksi (%)
0,00	3,19051	0,00
0,25	1,28048	59,87
0,50	0,94426	70,40
0,75	0,78249	75,47
1,00	0,68281	78,60

Pada Tabel 3, peningkatan intensitas larvasida (u) secara signifikan menekan transmisi DBD melalui penurunan eksponesial R_0 dari 3,19051 saat $u = 0$ menjadi 0,68281 saat $u = 1$. Reduksi sebesar 78,60% dihitung berdasarkan formula:

$$\text{Reduksi } \% = \left(1 - \frac{R_0(u=1)}{R_0(u=0)}\right) \times 100\%.$$

Mekanisme biologis yang mendasari fenomena ini adalah intervensi larvasida secara langsung meningkatkan mortalitas larva $(u + \mu_A)$, sehingga mengurangi populasi larva yang berhasil berkembang menjadi nyamuk dewasa $(S_v.I_v)$. Penurunan populasi vektor dewasa ini berimplikasi pada penurunan laju penularan dari nyamuk ke manusia, yang tercermin dari reduksi R_0.

Titik kritis terjadi pada saat $u \geq 0{,}50$, di mana $R_0 < 1$ dengan $R_0 = 0{,}94426$, mengindikasikan penyakit menuju kepunahan jangka panjang sesuai prinsip epidemiologi. Temuan ini menunjukkan keunggulan strategi intervensi larvasida ketika dibandingkan dengan model Bustamam *et.al*. (2018). Dengan menggunakan nilai parameter yang sama, model penelitian ini mencapai reduksi sebesar 78,60% dengan hanya intervensi larvasida maksimal, yaitu saat $u = 1$. Sementara itu, model Bustamam *et.al*. (2018) yang terdiri dari berbagai strategi intervensi seperti kontrol mekanik (3M), fumigasi, serta vaksinasi hanya mencapai reduksi 67% dengan R_0 sebesar 0,99. Meskipun mekanisme kontrol mekanik juga menargetkan fase larva, intervensi ini lebih kepada mengurangi habitat perkembangbiakan (daya dukung lingkungan), sedangkan larvasida secara kimiawi meningkatkan mortalitas larva langsung.

Selain itu, temuan ini mengatasi kelemahan model Agustina & Affandi (2023), di mana meskipun memasukkan parameter larvasida $(\varphi \equiv \phi)$ dalam formulasi R_0, tetapi tidak menyertakan simulasi numerik untuk memvalidasi dampaknya terhadap dinamika populasi atau reduksi R_0. Dengan demikian, efektivitas larvasida dalam model tidak terverifikasi secara empiris. Hasil penelitian ini turut memperkuat validitas temuan Bano dkk. (2022) yang menunjukkan reduksi signifikan sebesar 98% pada intensitas larvasida yang sama $(k \equiv u = 1{,}00)$ dengan pola penurunan eksponensial serupa meskipun nilai awal R_0 berbeda secara substansial (0,002 dibanding 3,19051). hal ini mengindikasikan bahwa efektivitas larvasida terhadap pengendalian populasi vektor bersifat konsisten terlepas dari besarnya nilai awal potensi penularan.

Tabel 4 menunjukkan urutan nilai indeks sensitivitas dari yang tertinggi ke

yang terendah. Dengan demikian, dapat terlihat bahwa setiap parameter memiliki dampak yang berbeda pada R_0. Indeks sensitivitas positif mengindikasikan bahwa berubahnya nilai parameter berbanding lurus dengan berubahnya R_0. Dengan kata lain, jika nilai parameter tersebut meningkat dan parameter lainnya tidak berubah maka dapat membantu dalam meningkatkan R_0. Sementara itu, indeks sensitivitas yang bernilai negatif mengindikasikan bahwa berubahnya nilai parameter berbanding terbalik dengan berubahnya R_0. Dengan kata lain, jika nilai parameter tersebut meningkat maka dapat membantu menurunkan R_0 (Resmawan dkk., 2023).

Tabel 4. Indeks Sensitivitas R_0 pada saat $u = 0$

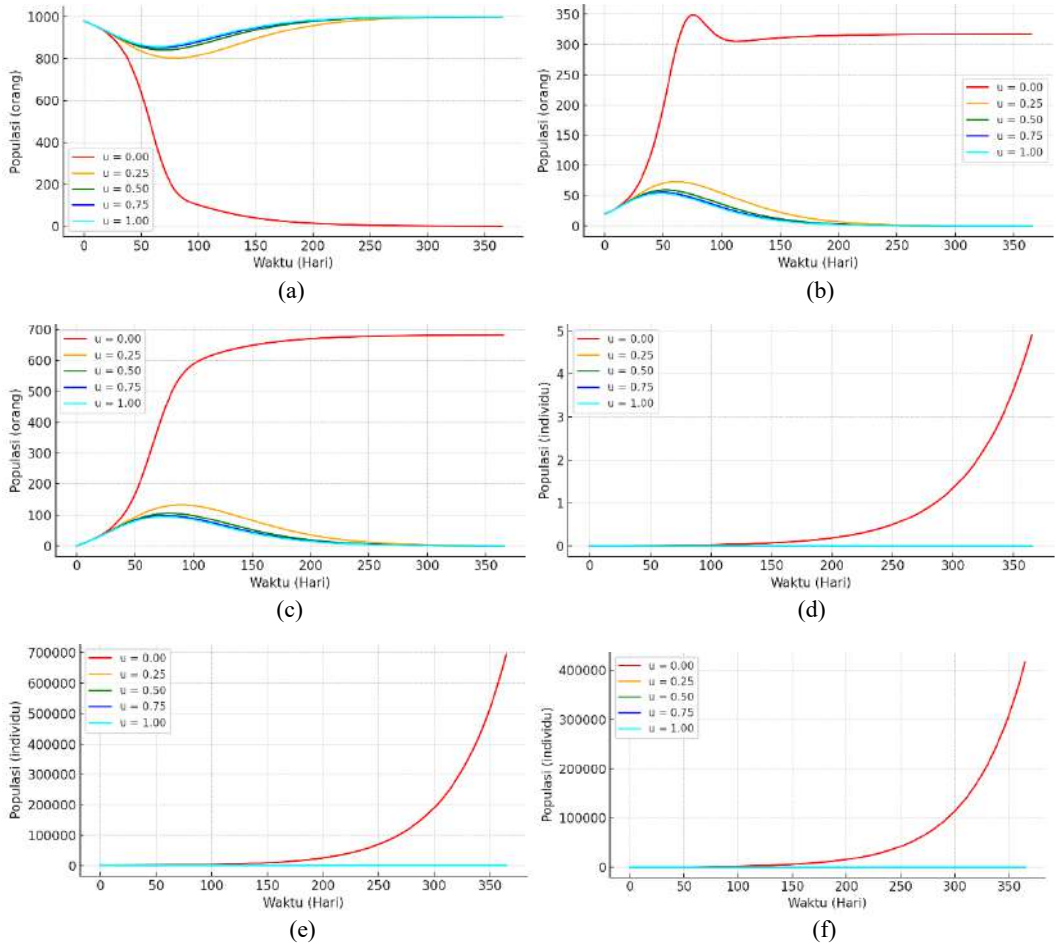
Parameter	Ekspresi (S_p)	Nilai S_p	Interpretasi
b	$+1$	$+1{,}0$	Dominan positif
μ_v	-1	$-1{,}0$	Dominan negatif
A_h	$+\frac{1}{2}$	$+0{,}5$	Signifikan positif
β_h	$+\frac{1}{2}$	$+0{,}5$	Signifikan positif
β_v	$+\frac{1}{2}$	$+0{,}5$	Signifikan positif
ϕ	$+\frac{1}{2}$	$+0{,}5$	Signifikan positif
N_h	$-\frac{1}{2}$	$-0{,}5$	Signifikan negatif
γ_h	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_h}{\gamma_h+\mu_h}\right)$	$-0{,}5$	Signifikan negatif
η_v	$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\eta_v}{u+\eta_v+\mu_A}\right)$	$+0{,}4$	Signifikan positif
μ_A	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_A}{u+\eta_v+\mu_A}\right)$	$-0{,}4$	Signifikan negatif
u	$-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{u+\eta_v+\mu_A}\right)$	0	Tidak berpengaruh untuk $u = 0$
μ_h	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_h}{\gamma_h+\mu_h}\right)$	$-0{,}0003$	Pengaruh minimal (diabaikan)

Berdasarkan Tabel 4, parameter yang memiliki pengaruh paling dominan positif terhadap nilai R_0 adalah b dengan $S_p = +1{,}0$, artinya peningkatan 10% pada b akan meningkatkan R_0 sebesar 10%. Sebaliknya, pengaruh paling dominan negatif dimiliki oleh μ_v dengan $S_p = -1{,}0$, di mana peningkatan 10% pada μ_v akan menurunkan R_0 sebesar 10%. Kelompok parameter dengan pengaruh signifikan positif dan nilai indeks sensitivitas yang sama adalah A_h, β_h, β_v, dan ϕ dengan $S_p = +0{,}5$, artinya peningkatan 10% pada parameter tersebut, misal A_h akan meningkatkan R_0 sebesar 5% diikuti oleh η_v dengan $S_p = +0{,}4$. Sementara itu, parameter dengan pengaruh signifikan negatif berikutnya adalah N_h dan γ_h dengan $S_p = -0{,}5$, serta μ_A dengan $S_p = -0{,}4$.

Meskipun analisis sensitivitas menunjukkan bahwa parameter larvasida u tidak langsung mempengaruhi R_0 ketika belum diaplikasikan (saat u=0), simulasi numerik membuktikan bahwa penggunaan nyata larvasida dapat memberikan dampak yang signifikan. Saat intensitas larvasida ditingkatkan dari nol menjadi

maksimal, nilai R_0 turun drastis dari 3,19051 menjadi 0,68281, yang setara dengan penurunan 78,6%. Hal ini terjadi karena begitu larvasida mulai digunakan, pengaruhnya menjadi semakin kuat seiring peningkatan dosis. Sebagai contoh, ketika larvasida diaplikasikan pada tingkat maksimal, setiap kenaikan 10% dosis akan menurunkan R_0 sekitar 4,77%. Mekanisme biologis di balik ini jelas, yaitu larvasida membunuh larva nyamuk sebelum berkembang menjadi nyamuk dewasa, sehingga memutus rantai penularan. Pada Tabel 3 mempertegas temuan ini, yang mana tanpa larvasida, satu penderita DBD bisa menulari tiga orang baru. Tetapi dengan penggunaan larvasida intensif, penularan ditekan sedemikian rupa sehingga wabah bisa dikendalikan. Adapun μ_h menunjukkan pengaruh yang sangat minimal dengan $S_p = -0{,}0003$, sehingga dapat diabaikan dalam analisis sensitivitas.

Simulasi dinamika populasi untuk variasi intensitas larvasida $u \in \{0{,}00; 0{,}25; 0{,}50; 0{,}75; 1{,}00\}$ dilakukan dengan menyelesaikan sistem persamaan diferensial (5) menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4 dengan langkah waktu $\Delta t = 1$ hari selama 365 hari.



Gambar 2. Dinamika Populasi dengan Variasi Nilai Parameter u: (a) Populasi Manusia Rentan (S_h), (b) Populasi Manusia Terinfeksi (I_h), (c) Populasi Manusia Sembuh (R_h), (d) Populasi Larva (A_v), (e) Populasi Nyamuk rentan (S_v), (f) Populasi Nyamuk Terinfeksi (I_v)

Berdasarkan Gambar 2, simulasi menunjukkan bahwa peningkatan nilai u berdampak signifikan pada dinamika dalam sistem. Pada sub-populasi manusia, terlihat bahwa jumlah populasi yang rentan (S_h) tetap banyak seiring dengan meningkatnya dosis larvasida. Tanpa larvasida, jumlah populasi yang rentan menurun drastis karena banyak yang tertular, namun dengan larvasida maksimal, jumlah populasi yang rentan (sehat) jauh lebih besar. Jumlah populasi manusia yang terinfeksi (I_h) juga menurun sangat signifikan, baik dari segi banyaknya orang yang terinfeksi (sakit) maupun lamanya wabah berlangsung. Semakin tinggi dosis larvasida, semakin sedikit orang yang terjangkit penyakit. Jumlah populasi yang sembuh (R_h) pun turun seiring dengan berkurangnya orang yang terinfeksi, yang membuktikan bahwa larvasida berhasil mencegah penularan penyakit.

Pada populasi nyamuk, pengaruh larvasida terlihat lebih langsung dan menyeluruh. Jumlah populasi larva (A_v) turun sangat drastis, membuktikan bahwa larvasida bekerja efektif membasmi nyamuk di fase awal pertumbuhannya. Penurunan ini berakibat pada jumlah populasi nyamuk dewasa yang rentan (S_v) yang juga berkurang banyak, karena semakin sedikit larva yang berhasil menjadi nyamuk dewasa. Jumlah populasi nyamuk yang membawa penyakit (I_v) juga mengalami penurunan yang tajam, dengan jumlah yang sangat sedikit dan lebih cepat hilang, yang membuktikan bahwa larvasida berhasil memutus rantai penularan penyakit dengan mengurangi jumlah nyamuk pembawa virus.

KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil mengembangkan model SIR-ASI termodifikasi yang mengintegrasikan fase akuatik nyamuk dan parameter intervensi larvasida (u) untuk menganalisis dinamika penyebaran DBD. Hasil menunjukkan bahwa peningkatan intensitas larvasida menekan R_0 secara eksponensial. Analisis kestabilan membuktikan bahwa sistem di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$, sementara di titik ekuilibrium endemik (E^*) stabil saat $R_0 > 1$, yang sesuai dengan kriteria Routh-Hurwitz. Simulasi numerik mengonfirmasi efektivitas larvasida, dengan $u = 1$, R_0 turun 78,60% (dari 3,19051 menjadi 0,68281), disertai reduksi populasi nyamuk dewasa (S_v, I_v) dan larva (A_v). Analisis sensitivitas mengidentifikasi parameter u (mortalitas larva), b (frekuensi gigitan), dan μ_v (mortalitas nyamuk) sebagai parameter kunci pengendali R_0. Model ini menyediakan kerangka matematis yang kuat untuk mengoptimalkan intervensi berbasis larvasida, dengan memanfaatkan fase akuatik sebagai target kontrol. Hasilnya mendukung kebijakan pengendalian vektor yang berfokus pada reduksi populasi larva untuk memutus siklus transmisi DBD secara keseluruhan.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didukung dana DIPA Universitas Tanjungpura Tahun Anggaran 2024 melalui program Penelitian Dana Padanan antara FMIPA Universitas Tanjungpura dan Universitas Indonesia. Kami sangat berterima kasih atas dukungan finansial yang diberikan.

REFERENSI

Agustina, A., & Affandi, P. (2023). Analisis Model SIR-ASI pada Penyakit Demam Berdarah Dengue. *MAP (Mathematics and Applications) Journal*. Vol. *5*(1), 25–33.

Aldila, D., Götz, T., & Soewono, E. (2013). An optimal Control Problem Arising from A Dengue Disease Transmission Model. *Mathematical Biosciences*. Vol. *242*(1), 9–16. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2012.11.014

Aldila, D., Nuraini, N., & Soewono, E. (2015). *Mathematical Model in Controlling Dengue Transmission with Sterile Mosquito Strategies*. 030002. https://doi.org/10.1063/1.4930624

Bano, E. N., Leitakaeb, A., & Obe, L. F. (2022). Analisis Kestabilan Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) Tipe SIR Memakai Larvasida. *StatMat: Jurnal Statistika dan Matematika*. Vol. *4*(1), 9–27.

Brauer, F., Castillo-Chavez, C., & Feng, Z. (2019). *Mathematical Models in Epidemiology* (Vol. 69). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-9828-9

Bulai, I. M., Montefusco, F., & Pedersen, M. G. (2023). Stability Analysis of A Model of Epidemic Dynamics with Nonlinear Feedback Producing Recurrent Infection Waves. *Applied Mathematics Letters*. Vol. *136*, 108455. https://doi.org/10.1016/j.aml.2022.108455

Bustamam, A., Aldila, D., & Yuwanda, A. (2018). Understanding Dengue Control for Short-and Long-Term Intervention with a Mathematical Model Approach. *Journal of Applied Mathematics*. Vol. *2018*(1), 9674138.

Chitnis, N., Hyman, J. M., & Cushing, J. M. (2008). Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model. *Bulletin of Mathematical Biology*. Vol. *70*(5), 1272–1296. https://doi.org/10.1007/s11538-008-9299-0

Diekmann, O., Heesterbeek, H., & Britton, T. (2013). *Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics* (Vol. 7). Princeton University Press.

Fosu, G. O., Akweittey, E., & Adu-Sackey, A. (2020). Next-generation Matrices and Basic Reproductive Numbers for All Phases of The Coronavirus Disease. *Open Journal of Mathematical Sciences*. Vol. *4*(1), 261–272. https://doi.org/10.30538/oms2020.0117

Guzman, M. G., Gubler, D. J., Izquierdo, A., Martinez, E., & Halstead, S. B. (2016). Dengue Infection. *Nature Reviews Disease Primers*. Vol. *2*(1), 16055. https://doi.org/10.1038/nrdp.2016.55

Heffernan, J. M., Smith, R. J., & Wahl, L. M. (2005). Perspectives on The Basic Reproductive Ratio. *Journal of the Royal Society Interface*. Vol. *2*(4), 281–293.

Jing, Q. L., Cheng, Q., Marshall, J. M., Hu, W. B., Yang, Z. C., & Lu, J. H. (2018). Imported Cases and Minimum Temperature Drive Dengue Transmission in Guangzhou, China: Evidence from ARIMAX model. *Epidemiology and Infection*. Vol. *146*(10), 1226–1235. https://doi.org/10.1017/S0950268818001176

Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. (2024). *Profil Kesehatan Indonesia 2023*. 212–218. http://www.kemkes.go.id

Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology* (Vol. 61). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7612-3

Ndii, M. Z. (2022). *Pemodelan Matematika*. Penerbit NEM.

Ogunlade, S. T., Meehan, M. T., Adekunle, A. I., & McBryde, E. S. (2023). A Systematic Review of Mathematical Models of Dengue Transmission and Vector Control: 2010–2020. *Viruses*. Vol. *15*(1), 254. https://doi.org/10.3390/v15010254

Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems* (Vol. 7). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8

Rather, I. A., Parray, H. A., Lone, J. B., Paek, W. K., Lim, J., Bajpai, V. K., & Park, Y.-H. (2017). Prevention and Control Strategies to Counter Dengue Virus Infection. *Frontiers in Cellular and Infection Microbiology*. Vol. *7*, 336. https://doi.org/10.3389/fcimb.2017.00336

Resmawan, R., Yahya, L., Nuha, A. R., & S. Ali, S. M. (2023). Dinamika dan Stabilitas Populasi pada Model Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi dan Migrasi Penduduk. *Jambura Journal of Mathematics*. Vol. *5*(2), 305–326. https://doi.org/10.34312/jjom.v5i2.19992

Strogatz, S. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering* (Second Edition). CRC Press. https://doi.org/10.1201/9780429399640

Van Den Driessche, P. (2017). Reproduction Numbers of Infectious Disease Models. *Infectious Disease Modelling*. Vol. *2*(3), 288–303. https://doi.org/10.1016/j.idm.2017.06.002

Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Bulletin of Mathematical Biology*. Vol. *64*(1), 29–48. Springer. https://doi.org/10.1006/bulm.2001.0286

Vasconcelos, A. S. V., Silva, L. S. B., Cardoso, R. T. N., & Acebal, J. L. (2021). Optimization of a Rainfall Dependent Model for The Seasonal Aedes aegypti Integrated Control: A case of Lavras/Brazil. *Applied Mathematical Modelling*. Vol. *90*, 413–431. https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.08.072

Wells, J., Greenhalgh, D., Liang, Y., Megiddo, I., Nazni, W. A., Guat-Ney, T., & Lee, H. L. (2023). Combatting Malaysia's Dengue Outbreaks with Auto-Dissemination Mosquito Traps: A Hybrid Stochastic-Deterministic SIR Model. *Communication in Biomathematical Sciences*. Vol. *6*(2), 169–188. https://doi.org/10.5614/cbms.2023.6.2.7