



SIFAT INVARIAN TRANSLASI TOPOLOGI KONVERGENSI SERAGAM HAMPIR DIMANA-MANA PADA RUANG FUNGSI TERUKUR

Haryadi^{1*}, Solikhin²

¹Program Studi Ilmu Komputer, Universitas Muhammadiyah Palangkaraya, Indonesia
Jl. RTA Milono Km. 1,5 Palangka Raya, Kalimantan Tengah

²Departemen Matematika FSM Universitas Diponegoro, Indonesia
Jl. Prof. Soedarto, SH Tembalang, Semarang, Jawa Tengah.

*email: haryadi@umpr.ac.id

ABSTRACT

The space of functions that is often studied is the space of functions whose members are all measurable functions. One of the methods to study the space is by forming a topology. The problem is how to construct a topology on that function space. In this paper, a topology on the space of equivalent class of measurable functions will be constructed by building a local basis. The local basis of zero functions is used to define open sets in the space. This construction yields results that a topology can be constructed on the space. The resulting topology has the properties of being invariant under translation and being Hausdorff. Furthermore, convergence in that topological space is equivalent to almost everywhere uniform convergence.

Keywords: measurable functions, topology, invariant, convergence

ABSTRAK

Ruang fungsi yang banyak dipelajari adalah ruang fungsi yang anggotanya semua fungsi terukur. Salah satu cara untuk mempelajari sifat-sifat pada ruang ini adalah dengan membentuk topologi. Permasalahannya adalah bagaimana mengkonstruksi topologi pada ruang fungsi tersebut. Di dalam makalah ini akan dikonstruksi topologi pada ruang kelas ekuivalensi fungsi terukur dengan membangun basis lokal. Basis lokal fungsi nol digunakan untuk mendefinisikan himpunan terbuka di ruang tersebut. Konstruksi tersebut memberikan hasil bahwa pada ruang kelas ekuivalensi fungsi terukur dapat dikonstruksi topologi. Topologi yang dihasilkan memiliki sifat invarian terhadap translasi dan sifat Hausdorff. Lebih lanjut, kekonvergenan di ruang topologi tersebut ekuivalen dengan kekonvergenan seragam hampir dimana-mana.

Kata kunci: fungsi terukur, topologi, invarian, kekonvergenan

Received: 8 September 2025, Accepted: 12 January 2026, Published: 7 May 2026

PENDAHULUAN

Kekontinuan dan kekonvergenan dalam matematika analisis, merupakan topik yang penting. Objek-objek dalam matematika sangat beragam mulai dari objek yang nyata hingga yang abstrak. Oleh karena itu dalam pembahasan masalah kekontinuan dan kekonvergenan, pada objek yang dibahas perlu dilengkapi suatu

metrik atau norma. Namun tidak setiap objek dalam matematika dapat didefinisikan metrik atau norma. Oleh karena itu perlu digunakan cara pendekatan yang lebih umum yaitu dengan membentuk topologi pada objek yang akan dibahas.

Topologi yang dikonstruksi pada ruang fungsi tentu akan memiliki lebih banyak sifat yang bisa dipelajari dibandingkan hanya pada himpunan saja, mengingat ruang fungsi merupakan ruang linear. Hal ini dikarenakan pada ruang topologi demikian dimungkinkan untuk mengenakan operasi aljabar.

Seiring dengan perkembangan ilmu dan teknologi, topologi bukan saja digunakan dalam pembahasan berbagai teori dalam matematika murni, namun juga banyak digunakan dalam berbagai bidang terapan. Diantara penerapan disiplin ini adalah untuk mempelajari tentang struktur, dinamika, dan evolusi polimer linear terlipat seperti protein dan genom DNA (Golovnev & Mashaghi, 2020). Contoh lain penerapan tersebut misalnya pada topologi digital yang berkaitan dengan sifat dan gambar digital yang sesuai dengan sifat topologi (Alpers, 2002).

Dalam pembahasan ruang topologi pada umumnya, topologi dikenakan pada himpunan yang belum tentu dilengkapi dengan operasi aljabar. Di dalam makalah ini topologi dikenakan pada ruang fungsi yang tentu saja dilengkapi dengan operasi aljabar. Oleh karena itu terbuka kemungkinan untuk menelaah sifat-sifat topologi pada ruang ini dengan menggunakan operasi aljabar, khusus operasi jumlahan.

Diberikan ruang fungsi $F(X)$ yang anggotanya semua kelas ekuivalensi fungsi terukur dari ruang ukuran X ke $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dalam makalah ini topologi pada ruang linear $F(X)$ dikonstruksi menggunakan bola terbuka di titik nol. Beberapa sifat pada ruang topologi ini ditelaah dengan memanfaatkan sifat invarian terhadap operasi jumlahan di $F(X)$.

TINJAUAN PUSTAKA

Pembahasan yang terkait dengan ruang topologi pada ruang fungsi terus berkembang. Konstruksi topologi pada ruang fungsi telah dilakukan oleh beberapa peneliti. Topologi himpunan terbuka (*open-set*) pada ruang fungsi kontinu dikerjakan oleh Alqurashi *et al.* (2018) dan DiMaio *et al.* (1988). Studi mengenai topologi konvergen quasi-seragam pada ruang fungsi dilakukan oleh Alqurashi & Khan (2017). Sementara itu Georgiou (2009) dan Bouchair & Kelaiaia (2014) menelaah beberapa topologi pada ruang fungsi kontinu. Topologi kekonvergenan titik demi titik pada ruang fungsi bernilai fuzzy ditelaah dalam Jardon & Sanchis (2018).

Pembahasan tentang topologi konvergensi dalam ukuran pada ruang kelas ekuivalen fungsi terukur ditelaah dalam (Niemic, 2013). Kawabe (2022) memperkenalkan topologi pada fungsi terukur yang kompatibel dengan konvergensi dalam ukuran. Beberapa sifat ruang bernorma pada ruang fungsi terukur ditelaah di dalam Asawer *et al.*, 2020. Di Concilio (2020) memperkenalkan topologi ruang fungsi dari ruang topologi seragam dan ruang topologi Whitney.

Bentuk baru konsep fungsi terukur untuk fungsi bernilai ruang seragam dilakukan oleh (Keith, 2024).

Fungsi terintegral Henstock-Kurzweil merupakan fungsi terukur. Di dalam Kurzweil (2000) diuraikan mengenai ruang fungsi terintegral Henstock-Kurzweil dan kaitannya dengan ruang topologi linear. Lebih lanjut, Kalita & Hazarika (2022) juga menelaah sifat-sifat topologi pada ruang tersebut.

Untuk mendiskusikan bagian hasil dalam makalah ini, perlu disampaikan kembali topik-topik yang terkait dengan ruang fungsi terukur dan ruang topologi linear. Uraian mengenai topologi berikut merujuk pada (Nagata, 1985). Topologi pada himpunan tak kosong X adalah koleksi $\mathcal{T}$ yang anggotanya merupakan himpunan bagian X dengan persyaratan sebagai berikut: (i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ (ii) jika $G, H \in \mathcal{T}$ maka $G \cap H \in \mathcal{T}$ dan (iii) jika $\{G_\alpha\}$ dengan $G \in \mathcal{T}$ untuk setiap $\alpha \in A$ dengan A himpunan indeks, maka $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \mathcal{T}$. Dalam hal ini juga dinyatakan X ruang topologi dan anggota $\mathcal{T}$ dinamakan himpunan terbuka. Himpunan N_x di dalam ruang topologi X dinamakan sekitar x jika terdapat $G \in \mathcal{T}$ sehingga $x \in G \subset N_x$. Dengan demikian setiap himpunan terbuka merupakan sekitar setiap titiknya. Koleksi $\mathcal{N}_x$ yang anggotanya semua sekitar x dinamakan sistem sekitar x .

Koleksi $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ disebut basis topologi $\mathcal{T}$ jika untuk setiap $G \in \mathcal{T}$ dan $x \in G$ ada $B \in \mathcal{B}$ sehingga $x \in B \subset G$. Koleksi $\mathcal{B}_x$ dinamakan basis lokal di x jika $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ dan untuk setiap $N \in \mathcal{N}_x$ terdapat $B \in \mathcal{B}_x$ dengan $B \subset N$. Ruang topologi $\mathcal{T}$ dinamakan ruang Hausdorff jika untuk sebarang dua titik x dan y di dalam X , terdapat sekitar yang saling asing N_x dan N_y .

Topologi juga bisa dibangun pada ruang linear. Diberikan ruang linear X atas lapangan K . Topologi $\mathcal{T}$ pada ruang linear X dinamakan ruang vektor topologi jika (i) pemetaan $(x, y): X \times X \rightarrow X$ dengan $(x, y) = y$ kontinyu dan (ii) pemetaan $(\lambda, x): K \times X \rightarrow X$ dengan $(\lambda, x) = \lambda x$ kontinyu (Schaefer, 1971). Pada ruang vektor topologi banyak sifat-sifat topologi yang dapat dipelajari dengan memanfaatkan kedua operasi aljabar tersebut.

Diberikan himpunan tak kosong X . Koleksi himpunan $\mathcal{M}$ dinamakan aljabar- σ pada X jika (i) $X \in \mathcal{M}$, (ii) $E^c \in \mathcal{M}$ untuk setiap $E \in \mathcal{M}$ dan (iii) $\bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \mathcal{M}$ dengan $E_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Dalam hal ini $\mathcal{M}$ dinamakan ruang terukur. Ukuran pada $\mathcal{M}$ adalah fungsi $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ dengan persyaratan: (i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) jika $\{E_i\}$ adalah koleksi himpunan dengan $E_i \in \mathcal{M}$ dan $E_i \cap E_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$, maka $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(E_i)$. Jika $\mathcal{M}$ aljabar- σ pada X dan μ ukuran pada $\mathcal{M}$ maka $(X, \mathcal{M}, \mu)$ dinamakan ruang ukuran.

Diberikan ruang ukuran $(X, \mathcal{M}, \mu)$ dan ruang topologi Y . Fungsi $f: X \rightarrow Y$ dikatakan terukur jika $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$ untuk setiap himpunan terbuka U di Y . Suatu sifat dikatakan hampir dimana-mana pada himpunan E jika sifat tersebut berlaku pada setiap titik di dalam $E \setminus N$ dimana $N \subset E$ dengan $\mu(N) = 0$. Suatu fungsi f memiliki sifat hampir dimana-mana pada himpunan E juga dikatakan fungsi $f(x)$ memiliki sifat tersebut hampir untuk setiap $x \in E$ (Folland, 1999). Jika $\{f_n\}$ adalah

barisan fungsi terukur dan konvergen f_0 hampir dimana-mana pada X , maka f_0 merupakan fungsi terukur (Petrovai, 2019).

Di dalam makalah ini notasi $F(X)$ menyatakan himpunan semua kelas ekuivalen fungsi terukur $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dengan relasi $f \sim g$ jika dan hanya jika $\mu(\{x: f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Koleksi $F(X)$ merupakan ruang linear dengan operasi sebagai berikut: untuk sebarang $f, g \in F(X)$ dan sebarang bilangan real c , (i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ hampir dimana-mana pada X dan (ii) $(cf)(x) = cf(x)$ hampir dimana-mana pada X . Notasi θ menyatakan fungsi dengan $\theta(x) = 0$ hampir dimana-mana pada X . Jika $f, g \in F(X)$, notasi $f \leq g$ dan $f < g$ berturut-turut menyatakan $f(x) \leq g(x)$ dan $f(x) < g(x)$ hampir dimana-mana pada X .

METODE PENELITIAN

Berdasarkan hasil studi literatur mengenai ruang fungsi terukur dan ruang topologi, dirumuskan permasalahan penelitian. Permasalahan ini kemudian dirumuskan secara sistematis dan pemecahannya dilakukan secara bertahap dengan menggunakan kaidah matematika secara benar.

Konstruksi topologi pada ruang $F(X)$ dilakukan dengan membentuk bola terbuka dengan pusat fungsi nol θ dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 1. Bola terbuka dengan pusat θ dan radius $r > 0$ di dalam $F(X)$, dituliskan B_r , adalah himpunan semua $f \in F(X)$ sehingga $|f(x)| < r$ hampir untuk setiap $x \in X$.

Berdasarkan definisi bola terbuka tersebut, $f \in B_r$ jika dan hanya jika $|f(x)| < r$ untuk setiap $x \in X \setminus N$ dimana $N \subset X$ dengan $\mu(N) = 0$. Selanjutnya, himpunan semua bola terbuka dengan pusat θ seperti yang dinyatakan dalam Definisi 1, dituliskan $\mathcal{B}_\theta$.

Dengan menggunakan bola-bola terbuka yang terbentuk, selanjutnya dikonstruksi himpunan terbuka sehingga dapat didefinisikan ruang topologinya dengan cara membentuk koleksi berikut.

Definisi 2. Koleksi $\mathcal{T}$ menyatakan semua himpunan $G \subset F(X)$ sehingga untuk setiap $f \in G$ terdapat bola terbuka B_r dengan

$$f + B_r \subset G.$$

Ruang topologi yang telah dibentuk, selanjutnya ditelaah beberapa sifatnya, khususnya sifat invariant terhadap translasi, yakni menelaah apakah $G \subset F(X)$ terbuka ekuivalen dengan $f + G$ terbuka, $f \in F(X)$, dimana

$$f + G = \{f + g: g \in G\}.$$

Sifat invarian tersebut digunakan untuk menelaah beberapa sifat topologi di $F(X)$, terutama terkait dengan kekonvergenan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian berikut ditelaah sifat-sifat bola terbuka, sifat invarian terhadap translasi himpunan terbuka dan sekitar, sifat Hausdorff dan kekonvergenan.

Teorema 3. Jika $f < g$, maka terdapat bola terbuka B_r sehingga $(f + B_r) \cap (g + B_r) = \emptyset$.

Bukti. Karena $f < g$, maka terdapat $c > 0$ sehingga $|g(x) - f(x)| > c$ hampir untuk setiap $x \in X$. Diambil $r = c/3$. Dimisalkan ada $h \in (f + B_r) \cap (g + B_r)$; jadi terdapat $k_1, k_2 \in B_r$ sehingga $h = f + k_1 = g + k_2$. Oleh karena itu $f - g = k_1 - k_2$. Akibatnya $|g(x) - f(x)| = |k_2(x) - k_1(x)| \leq |k_2(x)| + |k_1(x)| < 2r = \frac{2c}{3}$ hampir untuk setiap $x \in X$. Dengan demikian $|g(x) - f(x)| < c$ kontradiksi dengan yang diketahui. Dengan demikian teorema berlaku. ■

Selanjutnya disampaikan hasil-hasil yang berkaitan dengan sifat-sifat bola terbuka seperti yang dinyatakan dalam definisi 1.

Teorema 4. Untuk sebarang $B_r \in \mathcal{B}_\theta$ dan $B_s \in \mathcal{B}_\theta$ terdapat $B_t \in \mathcal{B}_\theta$ sehingga $B_t \subset B_r \cap B_s$.

Bukti. Diambil $t = \frac{1}{2} \min \{r, s\}$. Jika $|f(x)| < t$ hampir untuk setiap $x \in X$, maka jelas bahwa $|f(x)| < r$ dan $|f(x)| < s$ hampir untuk setiap $x \in X$ dengan kata lain $f \in B_r \cap B_s$. ■

Teorema 5. Untuk setiap $B_r \in \mathcal{B}_\theta$ bersifat

- (i) seimbang, yakni $\lambda B_r \subset B_r$ untuk setiap λ dengan $|\lambda| \leq 1$.
- (ii) konveks, yakni $\lambda f + (1 - \lambda)g \in B_r$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $f, g \in B_r$.
- (iii) simetris, yakni $-f \in B_r$ untuk setiap $f \in B_r$. Dalam hal demikian, dituliskan $-B_r = B_r$.

Bukti. (i) Diambil sebarang $\lambda \in \mathbb{R}$ dengan $|\lambda| \leq 1$, dan $f \in B_r$. Dapat diasumsikan $\lambda > 0$. Karena $|f(x)| < r$ hampir untuk setiap $x \in X$ maka $|\lambda f(x)| < |\lambda|r \leq r$ hampir untuk setiap $x \in X$, yang berarti $\lambda f \in B_r$, sehingga $\lambda B_r \subset B_r$.

(ii) Diambil $\lambda \in \mathbb{R}$ dengan $0 \leq \lambda \leq 1$ dan $f, g \in B_r$. Diperoleh $|\lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)| \leq |\lambda||f(x)| + |1 - \lambda||g(x)| < \lambda r + (1 - \lambda)r \leq r$ hampir untuk setiap $x \in X$, yang berarti $\lambda f + (1 - \lambda)g \in B_r$.

(iii) Jika $f \in B_r$ maka $|-f(x)| = |f(x)| < r$ hampir untuk setiap $x \in X$, yang berarti $-f \in B_r$. ■

Contoh 6. Himpunan G yang anggotanya semua fungsi sederhana s pada $[a, b]$ sehingga $s(x) \in (0, 1)$ merupakan anggota $\mathcal{T}$. Hal tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut. Diambil sebarang $s \in G$. Jadi ada berhingga bilangan real $c_1, c_2, \dots, c_n$ dengan $0 < c_i < 1$ sehingga $s = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ dengan $E_i = \{x \in [a, b] : s(x) = c_i\}$. Diambil B_r dengan $r = \frac{1}{2} \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \{c_i, 1 - c_i\}$. Akibatnya untuk

setiap $h \in B_r$, berlaku $0 < s(x) - \frac{r}{2} < s(x) + h(x) < s(x) + \frac{r}{2} < 1$ yakni $s(x) + h(x) \in (0,1)$. Dengan demikian $s + B_r \subset G$, yakni G anggota $\mathcal{T}$. $\square$

Teorema 7. Himpunan $\mathcal{T}$ merupakan topologi pada $F(X)$. Lebih lanjut, koleksi $\{f + B_r : B_r \in \mathcal{B}_\theta\}$ merupakan basis lokal di f .

Bukti. (i) Jelas bahwa $\mathcal{T}$ memuat $\emptyset$ dan $F(X)$. (ii) Diketahui $G, H \in \mathcal{T}$. Jika $G \cap H = \emptyset$ maka berdasarkan (i), $G \cap H \in \mathcal{T}$. Misalkan $G \cap H \neq \emptyset$, dan $f \in G \cap H$, yakni terdapat B_r dan B_s sehingga $f + B_r \subset G$ dan $f + B_s \subset H$. Berdasarkan Teorema 4 terdapat B_t sehingga $B_t \subset B_r \cap B_s$. Oleh karena itu $f + B_t \subset G$ dan $f + B_t \subset H$, yang berarti $f + B_t \subset G \cap H$. (iii) Diketahui $f \in \bigcup_\alpha G_\alpha$ dimana $\alpha \in A$ himpunan indeks dan $G_\alpha \in \mathcal{T}$. Terdapat $\alpha \in A$ sehingga $f \in G_\alpha$, yang berarti terdapat B_r sehingga $f + B_r \subset G_\alpha$. Akibatnya $f + B_r \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\{f + B_r : r > 0\}$ basis lokal di f . Diketahui N_f sekitar f ; jadi ada $G \in \mathcal{T}$ sehingga $f \in G \subset N_f$. Karena $f \in G$ dan $G \in \mathcal{T}$, maka terdapat B_r sehingga $f + B_r \subset G$. Oleh karena itu $f + B_r \subset N_f$. $\blacksquare$

Untuk selanjutnya yang dimaksud ruang topologi $F(X)$ adalah ruang $F(X)$ dilengkapi dengan topologi $\mathcal{T}$ seperti dinyatakan dalam Teorema 7.

Teorema 8. Diketahui $f \in F(X)$. Himpunan $G \subset F(X)$ merupakan himpunan terbuka jika dan hanya jika $f + G$ terbuka.

Bukti. Diambil sebarang $h \in f + G$; jadi $h = f + g$ untuk suatu $g \in G$. Karena G terbuka maka terdapat B_r sehingga $g + B_r \subset G$. Akibatnya

$$h + B_r = f + g + B_r \subset f + G,$$

yang berarti $f + G$ terbuka.

Sebaliknya, diambil sebarang $g \in G$. Berlaku $f + g \in f + G$. Karena $f + G$ terbuka maka terdapat B_r sehingga $f + g + B_r \subset f + G$. Oleh karena itu

$$g + B_r \subset G,$$

yang berarti G himpunan terbuka. $\blacksquare$

Teorema 8 menyatakan bahwa ruang topologi $F(X)$ bersifat invarian terhadap translasi.

Teorema 9. Ruang topologi $\mathcal{T}$ merupakan ruang Hausdorff.

Bukti. Misalkan $f \in \bigcap_{B_r \in \mathcal{B}_\theta} B_r$. Dengan demikian untuk setiap $r > 0$ berlaku $|f(x)| < r$ hampir untuk setiap $x \in X$. Dengan demikian $|f(x)| = 0$ hampir untuk setiap $x \in X$, yang berarti $f = \theta$. Selanjutnya diambil sebarang $f, g \in F(X)$, $f \neq g$. Diasumsikan tidak ada sekitar f dan g sehingga $N_f \cap N_g = \emptyset$, yang berarti $N_f \cap N_g \neq \emptyset$, khususnya untuk setiap $r > 0$ berlaku $(f + B_r) \cap (g + B_r) \neq \emptyset$. Jadi ada $h \in f + B_r$ dan $h \in g + B_r$, atau $h - f \in B_r$ dan $h - g \in B_r$. Oleh karena itu

$$h - f \in \bigcap_{B_r \in \mathcal{B}} B_r = \{\theta\} \text{ dan } h - g \in \bigcap_{B_r \in \mathcal{B}} B_r = \{\theta\}$$

Dengan demikian $f = h = g$, bertentangan dengan asumsi $f \neq g$. Dengan demikian teorema terbukti. ■

Lemma 10. Diketahui $f \in F(X)$. Himpunan N_f sekitar f jika dan hanya jika $N_f = f + N$ untuk suatu $N \in \mathcal{N}_\theta$

Bukti. Diketahui N_f sekitar f ; jadi terdapat himpunan terbuka G sehingga $f \in G \subset N_f$. Karena G terbuka, maka terdapat $B_r \in \mathcal{B}_\theta$ sehingga $f + B_r \subset G$. Diambil $N = B_r \in \mathcal{N}_\theta$. Diperoleh $f \in f + B_{r/2} \subset f + N$.

Sebaliknya, karena $N \in \mathcal{N}_\theta$, maka terdapat $B_r \in \mathcal{B}_\theta$ sehingga $B_r \subset N$. Oleh karena itu $f \in f + B_r \subset f + N$. Karena $f + B_r$ terbuka, berarti $f + N$ merupakan sekitar f .

Di dalam ruang topologi $F(X)$ pengertian barisan konvergen dapat dinyatakan sebagai berikut. Barisan $\{f_n\}$ di dalam ruang topologi $F(X)$ konvergen ke f jika untuk sebarang N_f sekitar f terdapat bilangan asli n_0 sehingga $f_n \in N_f$ untuk setiap $n \geq n_0$.

Teorema 11. Barisan $\{f_n\}$ di dalam ruang topologi $F(X)$ konvergen ke f jika dan hanya jika $\{f_n\}$ konvergen seragam hampir dimana-mana pada X .

Bukti. Diambil sebarang $N \in \mathcal{N}_\theta$. Berdasarkan Lemma 10, $N_f = f + N$ sekitar f . Karena $\{f_n\}$ konvergen ke f maka terdapat n_0 sehingga $f_n \in f + N$ untuk setiap $n \geq n_0$, yang berarti $f_n - f \in N$ untuk setiap $n \geq n_0$. Oleh karena itu terdapat B_r sehingga $(f_n - f) + B_r \subset N$ untuk setiap $n \geq n_0$. Karena $f_n - f \in B_r$ dan N sebarang, maka $|f_n(x) - f(x)| < r$ hampir untuk setiap $x \in X$. Dengan demikian $\{f_n\}$ konvergen seragam hampir dimana-mana pada X . Untuk bukti syarat cukup dapat dikerjakan dengan membalik langkah bukti tersebut. ■

Teorema 12. Jika $\{f_n\}$ barisan konvergen di dalam ruang topologi $F(X)$, maka limitnya tunggal.

Bukti. Misalkan f dan g masing-masing limit barisan $\{f_n\}$. Diambil sebarang $B_r \in \mathcal{B}_\theta$. Terdapat $B_s \in \mathcal{B}_\theta$ sehingga $B_s + B_s \subset B_r$. Dengan demikian terdapat bilangan asli n_0 dan m_0 sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$f_n - f \in B_s$$

dan untuk setiap $n \geq m_0$

$$f_n - f \in B_s.$$

Diambil $N = \text{maks}\{n_0, m_0\}$. Karena B_s simetris (Teorema 5(iii)), maka untuk $n \geq N$ berlaku

$$g - f = g - f_n + f_n - f \in -B_s + B_s = B_s + B_s \subset B_r.$$

Karena B_r sebarang maka $g - f = \theta$, yaitu $f(x) = g(x)$ hampir dimana-mana pada X . ■

Teorema 13. Setiap barisan konvergen di dalam $F(X)$ merupakan barisan Cauchy.

Bukti. Misalkan $\{f_n\}$ barisan konvergen di dalam ruang topologi $F(X)$, namakan ke f . Diambil sebarang $N \in \mathcal{N}_\theta$; jadi $N_f = f + N$ sekitar f . Oleh karena itu terdapat bilangan asli n_0 sehingga $f_m \in N_f$ dan $f_n \in N_f$ untuk setiap $m, n \geq n_0$. Dengan demikian terdapat B_r, B_s sehingga $f_m + B_r \subset N_f$ dan $f_n + B_s \subset N_f$. Berdasarkan Teorema 4 terdapat $B_t \in \mathcal{B}_\theta$ dengan $B_t \subset B_r \cap B_s$. Oleh karena itu

$$f_m - f_n \in f_m - f_n + B_t = f_m + B_t - f_n + B_t \in N_f,$$

yang berarti $\{f_n\}$ barisan Cauchy. ■

Barisan $\{f_n\}$ dikatakan barisan Cauchy seragam hampir dimana-mana jika terdapat $E \subset X$ dengan $\mu(E) = 0$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ untuk setiap } x \in X \setminus E.$$

Berdasarkan Teorema 11 dan 13, diperoleh hasil berikut.

Akibat 14. Barisan $\{f_n\}$ barisan Cauchy di dalam ruang topologi $F(X)$ jika dan hanya jika $\{f_n\}$ barisan Cauchy seragam hampir dimana-mana.

Lemma 15. Barisan $\{f_n\}$ barisan Cauchy seragam hampir dimana-mana pada X jika dan hanya jika terdapat f sehingga $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f hampir dimana-mana pada X .

Bukti. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $\{f_n\}$ barisan Cauchy seragam hampir dimana-mana maka terdapat $E \subset X$ sehingga $\mu(E) = 0$ dan $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ untuk setiap $x \in X \setminus E$. Ini berarti $\{f_n(x)\}$ barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ untuk setiap $x \in X \setminus E$. Oleh karena itu $\{f_n(x)\}$ konvergen, namakan ke $f(x)$ untuk setiap $x \in X \setminus E$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\{f_n\}$ konvergen seragam di $X \setminus E$. Karena $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in X \setminus E$ maka

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

untuk setiap $n \geq n_0$, yakni $\{f_n\}$ konvergen seragam hampir dimana-mana. ■

Teorema 16. Setiap barisan Cauchy di dalam ruang topologi $F(X)$ konvergen ke suatu anggota $F(X)$.

Bukti. Diketahui $\{f_n\}$ barisan Cauchy di dalam ruang topologi $F(X)$. Berdasarkan Akibat 14, $\{f_n\}$ barisan Cauchy seragam hampir dimana-mana pada X . Selanjutnya berdasarkan Lemma 15, $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f hampir dimana-mana pada X . ■

KESIMPULAN

Pada ruang kelas ekuivalensi hampir di mana-mana fungsi terukur dapat dikonstruksi topologi yang memiliki sifat invarian terhadap translasi dan sifat Hausdorff. Selain itu barisan yang konvergen di ruang topologi tersebut merupakan

barisan yang konvergen hampir dimana-mana. Hasil yang lebih spesifik kemungkinan bisa diperoleh jika topik bahasan dikerjakan pada ruang yang lebih spesifik, khususnya ruang bagian dimana perkalian skalar bersifat kontinyu, sehingga pembahasan bisa dikerjakan dalam kerangka ruang vektor topologi.

REFERENSI

- Alpers, A. (2002). Applications of Topology in Science and Technology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 17, 7–14.
- Alqurashi, W. K., & Khan, L. A. (2017). Quasi-Uniform Convergence Topologies on Function Space. *Applied General Topology*, 18(2), 301–316.
- Alqurashi, W. K., Khan, L. A., & Osipov, A. V. (2018). Set-Open Topologies of Function Spaces. *Applied General Topology*, 19(1), 55–64.
- Asawer, J., Al-Afloogee, Al-Mayahi, & Noori F. (2020). Normed Space of Measurable Functions with Some of Their Properties. *Journal of Physics: Conference Series*, 1591(1), 1–8.
- Bouchair, A., & Kelaiaia, S. (2014). Comparasion of Some Set Open Topologi $C(X,Y)$. *Topology Application*, 178, 352–359.
- Di Concilio, A. (2020). Function Space Topologies Between the Uniform Topology and The Whitney Topology. *Topology and Its Applications*, 277, 1–12.
- DiMaio, G., Holda, L., Holy, D., & McCoy, R. A. (1988). Topologies on The Space of Continuous Functions. *Topology and Its Application*, 86, 105–122.
- Folland, G. B. (1999). *Real Analysis, Modern Technique and Their Applications* (2nd ed.). John Wiley & Sons, Inc.
- Georgiou, D. N. (2009). Topologies on Function Spaces and Hyperspaces. *Applied General Topology*, 10(1), 159–171.
- Golovnev, A., & Mashaghi, A. (2020). Generalized Circuit Topology of Folded Linear Chains. *Math Eter*, 23, 1–18.
- Jardon, D. R., & Sanchis, M. (2018). Pointwise Convergence Topology and Function Spaces in Fuzzy Analysis. *Iranian Journal of Fuzzy System*, 15(2), 1–21.
- Kalita, H., & Hazarika, B. (2022). A Convergence Theorem for Ap–Henstock-Kurzweil Integral and its Relation to Topology. *Filomat*, 36(20), 6831–6839.
- Kawabe, J. (2022). The Topology on The Space of Measurable Functions That is Compatible with Convergence in Nonadditive Measure. *Fuzzy Sets and Systems*, 430, 1–8.
- Keith, J. M. (2024). Measurability of Functions Mapping a Charge Space into a Uniform. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 535(1), 1–11.
- Kurzweil, J. (2000). *Henstock-Kurzweil Integration: Its Relation to Topological Vector Spaces* (Vol. 7). Word Scientific.
- Nagata, J. (1985). *General Topology* (2nd ed.). Elsevier Science Publisher B.V.
- Niemiec, P. (2013). Space of Measurable Functions. *Central European Journal of Mathematics*, 11(7), 1304–1316.

- Petrovai, D. M. (2019). Some Examples of Non-Measurable Lebesgue Functions.
Procedia Manufacturing, 32, 640–642.
- Schaefer, H. H. (1971). *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag.