



PEMODELAN MATEMATIKA PENYEBARAN PERILAKU PERUNDUNGAN DI SEKOLAH MENGGUNAKAN MODEL SBVR

Titania Aulia*, Bayu Prihandono, Nilamsari Kusumastuti

Program Studi Matematika, Universitas Tanjungpura, Pontianak, Indonesia
Jl. Prof. Dr. H. Hadari Nawawi, 78124, Kalimantan Barat
*email: h1011211016@student.untan.ac.id

ABSTRACT

Bullying in the school environment is a social issue that adversely affects students' psychological, social, and academic well-being. Understanding the dynamics of bullying behavior can be approached through mathematical modeling. This study develops a mathematical model of bullying behavior using the SBVR framework, which divides the population into four subpopulations: susceptible individuals, bullies, victims, and recovered individuals, to represent the dynamics of bullying behavior and evaluate the role of interventions in controlling it. The contribution of this study lies in the inclusion of a recovery compartment, which enables a more realistic representation of victim dynamics. The model is formulated as a system of nonlinear differential equations and analyzed to determine equilibrium points, compute the basic reproduction number as a key indicator of transmission potential, and evaluate the local stability of these equilibria. The results show that the model has two equilibrium points, namely a bullying-free equilibrium and a bullying-endemic equilibrium. The bullying-free equilibrium is locally asymptotically stable when the basic reproduction number is less than one, whereas the endemic equilibrium is stable when it exceeds one, indicating that this value acts as a threshold for the spread of bullying behavior. Numerical simulations show that increasing the effectiveness of interventions reduces the basic reproduction number and accelerates the decline in the number of bullies and victims. In addition, higher transition rates contribute to a faster spread of bullying behavior. These findings indicate that effective interventions play a crucial role in controlling bullying dynamics and can serve as a basis for developing strategies to reduce bullying in schools.

Keywords: basic reproduction number, stability analysis, anti-bullying program intervention

ABSTRAK

Perundungan di lingkungan sekolah merupakan permasalahan sosial yang berdampak terhadap kondisi psikologis, sosial, dan akademik peserta didik. Pemahaman terhadap dinamika penyebaran perilaku perundungan dapat dilakukan melalui pendekatan pemodelan matematika. Penelitian ini mengembangkan model penyebaran perilaku perundungan menggunakan pendekatan model SBVR, yang membagi populasi ke dalam empat subpopulasi, yaitu siswa rentan, pelaku perundungan, korban perundungan, dan korban yang telah pulih, untuk merepresentasikan dinamika perilaku perundungan serta mengevaluasi peran intervensi dalam mengendalikannya. Kontribusi penelitian ini terletak pada penambahan kompartemen pemulihan yang memungkinkan analisis dinamika korban secara lebih realistis. Model disusun dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear yang dianalisis untuk menentukan titik-titik ekuilibrium, menghitung bilangan reproduksi dasar sebagai parameter utama dalam menilai potensi penyebaran, dan mengevaluasi kestabilan lokal dari titik-titik ekuilibrium tersebut. Hasil analisis menunjukkan bahwa model memiliki dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas perundungan dan titik ekuilibrium perundungan. Titik ekuilibrium bebas perundungan bersifat stabil asimtotik lokal ketika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, sedangkan titik ekuilibrium perundungan stabil asimtotik lokal ketika nilainya

lebih dari satu. Hasil simulasi memperlihatkan bahwa peningkatan efektivitas intervensi menurunkan nilai bilangan reproduksi dasar dan mempercepat penurunan jumlah pelaku dan korban. Sementara itu, variasi nilai parameter tingkat perpindahan siswa menunjukkan bahwa peningkatan nilai parameter tersebut dapat mempercepat penyebaran perilaku perundungan. Dengan demikian, model ini menunjukkan bahwa intervensi yang efektif berperan penting dalam mengendalikan penyebaran perilaku perundungan di lingkungan sekolah dan dapat digunakan sebagai dasar dalam pengendalian perundungan di sekolah.

Kata kunci: bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan, intervensi program anti perundungan

Received: 19 December 2025, Accepted: 11 May 2026, Published: 16 May 2026

PENDAHULUAN

Perilaku perundungan di sekolah merupakan salah satu fenomena sosial yang terus menjadi perhatian dalam dunia pendidikan karena menimbulkan dampak negatif terhadap korban, pelaku, maupun lingkungan belajar (Komariyah, 2022). Sekolah yang seharusnya menjadi ruang aman dan mendukung perkembangan peserta didik justru kerap menjadi tempat munculnya perilaku agresif antar siswa (Lusiana & Arifin, 2022). Oleh karena itu, diperlukan suatu pendekatan analitis yang mampu menggambarkan pola interaksi serta perubahan perilaku tersebut secara sistematis.

Meskipun perundungan bukan merupakan penyakit menular dalam arti biologis, dalam konteks sosial perilaku ini dapat menyebar melalui interaksi antarindividu (Stubbs-Richardson & May, 2021; Yokotani & Takano, 2021). Fenomena ini dikenal sebagai *social contagion*, yaitu proses di mana individu dapat meniru atau terpengaruh oleh perilaku yang diamati di lingkungan sekitarnya (Haeringen *et al.*, 2024). Oleh karena itu, pendekatan pemodelan matematika berbasis model epidemiologi digunakan sebagai analogi matematis untuk merepresentasikan dinamika penyebaran perilaku perundungan dalam suatu populasi.

Pemodelan matematika berbasis model kompartemen telah banyak digunakan untuk menganalisis dinamika berbagai fenomena sosial, termasuk perilaku agresif dan perundungan (Rigby, 2024). Model-model tersebut umumnya mengadaptasi pendekatan epidemiologi dengan membagi populasi ke dalam beberapa subpopulasi berdasarkan status individu. Dalam konteks perilaku perundungan, pendekatan ini telah diterapkan dalam beberapa penelitian untuk menggambarkan transisi individu antar subpopulasi. Salah satu di antaranya adalah model yang dikembangkan oleh Crokidakis (2025), yaitu model SBEV (*Susceptible–Bullies–Exposed–Violent*) yang mampu merepresentasikan transisi individu dalam perilaku perundungan melalui sistem persamaan diferensial nonlinear. Namun demikian, model tersebut belum secara eksplisit mempertimbangkan proses pemulihan korban

dalam bentuk kompartemen tersendiri, sehingga belum mampu menggambarkan dinamika pemulihan secara lebih realistis.

Oleh karena itu, penelitian ini mengembangkan model SBVR (*Susceptible–Bullies–Victims–Recovered*) dengan menambahkan kompartemen *recovered* untuk merepresentasikan individu yang telah pulih dari perundungan. Model ini diharapkan dapat memberikan gambaran yang lebih komprehensif terhadap dinamika perilaku perundungan di sekolah. Tujuan penelitian ini adalah menyusun model matematika penyebaran perilaku perundungan di sekolah serta menganalisis kestabilan sistem dan pengaruh intervensi terhadap dinamika perilaku perundungan.

TINJAUAN PUSTAKA

Beberapa penelitian sebelumnya telah mengkaji penyebaran perilaku perundungan melalui pendekatan pemodelan matematika yang umumnya menggunakan model kompartemental untuk merepresentasikan transisi individu antar subpopulasi yang terlibat dalam dinamika perundungan. Crokidakis (2025) mengembangkan model SBEV (*Susceptible–Bullies–Exposed–Violent*) yang menggambarkan perubahan status individu dari rentan menjadi pelaku, terpapar, hingga terlibat dalam kekerasan melalui sistem persamaan diferensial nonlinear. Analisis menunjukkan bahwa peningkatan tingkat perpindahan individu rentan menjadi pelaku, yang direpresentasikan oleh parameter α , secara signifikan mempercepat penyebaran perilaku perundungan. Sementara itu, penelitian lain dilakukan oleh Ashi (2021), yang mengusulkan model matematika sederhana dengan membagi populasi menjadi dua kompartemen, yaitu pelaku dan korban perundungan. Meskipun lebih ringkas, model tersebut efektif dalam menjelaskan kestabilan sistem dan menggunakan bilangan reproduksi dasar sebagai indikator utama potensi penyebaran perilaku perundungan. Nilai bilangan reproduksi dasar yang lebih besar dari satu menunjukkan kemungkinan penyebaran meluas, sedangkan nilai kurang dari satu mengindikasikan potensi penurunan kasus perundungan.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dengan memanfaatkan referensi dari buku, artikel jurnal ilmiah, dan sumber terpercaya lainnya yang berkaitan dengan pemodelan matematika, teori sistem dinamis, serta studi perilaku perundungan. Tahapan penelitian meliputi identifikasi masalah perundungan di sekolah, perumusan asumsi dasar yang merepresentasikan dinamika penyebaran, serta pendefinisian variabel dan parameter yang menggambarkan interaksi antar subpopulasi siswa rentan, pelaku, korban, dan individu pulih. Berdasarkan hubungan antar subpopulasi, dibentuk diagram alir yang menjadi dasar penyusunan model matematika dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear. Analisis

dilakukan dengan menentukan titik-titik ekuilibrium, menghitung bilangan reproduksi dasar menggunakan pendekatan *Next Generation Matrix* (NGM), dan menilai kestabilan lokal melalui linearisasi menggunakan matriks Jacobian (Sinaga *et al.*, 2021). Simulasi numerik dilakukan dengan metode Runge-Kutta orde 4 menggunakan perangkat lunak Python untuk menggambarkan dinamika penyebaran perilaku perundungan terhadap variasi parameter intervensi. Data simulasi mengacu pada *National Adolescent Mental Health Survey* (NAMHS) 2021 yang melibatkan 5.584 remaja Indonesia usia 10–17 tahun yang tercantum pada Erskine *et al.* (2025), sedangkan nilai parameter model diadaptasi dari penelitian dan artikel ilmiah relevan terkait dinamika penyebaran perilaku perundungan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

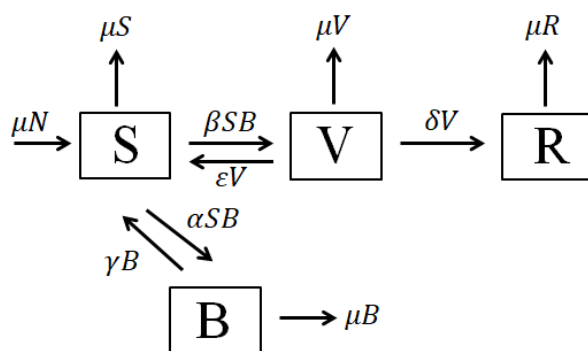
Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini adalah model SBVR, yang membagi populasi menjadi empat subpopulasi, yaitu *Susceptible* (**S**) menyatakan siswa rentan, baik yang belum pernah maupun pernah menjadi pelaku atau korban perundungan, *Bullies* (**B**) menyatakan pelaku perundungan, *Victims* (**V**) menyatakan korban perundungan, dan *Recovered* (**R**) menyatakan korban yang pulih dari perundungan. Dalam membentuk model matematika pada penyebaran perilaku perundungan di sekolah, terdapat beberapa asumsi yang harus dipenuhi, yaitu:

1. Populasi diasumsikan tertutup, sehingga jumlah siswa yang masuk sama dengan jumlah siswa yang keluar.
2. Siswa rentan dapat menjadi pelaku perundungan atau korban perundungan.
3. Pelaku perundungan dapat kembali menjadi siswa rentan melalui intervensi program anti perundungan.
4. Korban perundungan dapat kembali menjadi siswa rentan atau berpindah ke subpopulasi korban yang pulih.
5. Korban perundungan yang telah mendapatkan intervensi namun masih menunjukkan gejala trauma atau belum sepenuhnya pulih, maka tetap dikategorikan ke dalam subpopulasi *Victims*.
6. Siswa *Recovered* merupakan korban yang telah pulih secara psikologis dan sosial melalui intervensi bimbingan konseling.
7. Korban yang telah pulih tidak dapat kembali menjadi siswa rentan karena dianggap memiliki ketahanan mental untuk menghindari perundungan.

Tabel 1. Deskripsi Parameter-Parameter dalam Model

Parameter	Definisi	Syarat	Satuan
α	Tingkat perpindahan siswa dari subpopulasi rentan ke subpopulasi pelaku	$\alpha > 0$	Perbulan
β	Tingkat perpindahan siswa dari subpopulasi rentan ke subpopulasi korban	$\beta > 0$	Perbulan
ε	Tingkat ketahanan diri korban untuk melakukan perlawanan terhadap pelaku	$\varepsilon > 0$	Perbulan
γ	Efektivitas program anti perundungan	$\gamma \geq 0$	Perbulan
δ	Efektivitas bimbingan konseling bagi korban	$\delta > 0$	Perbulan
μ	Tingkat siswa masuk dan keluar	$\mu > 0$	Perbulan

Secara sistematis model penyebaran perilaku perundungan di sekolah disajikan pada Gambar 1.

**Gambar 1.** Diagram Alir Penyebaran Perilaku Perundungan di Sekolah

Berdasarkan Gambar 1, setiap populasi dinyatakan sebagai fungsi waktu $S(t), B(t), V(t)$, dan $R(t)$. Untuk memperoleh model dalam bentuk proporsi terhadap total populasi N , didefinisikan $s = \frac{S}{N}, b = \frac{B}{N}, v = \frac{V}{N}, r = \frac{R}{N}$, sehingga sistem penyebaran perilaku perundungan dapat dinyatakan dalam bentuk proporsi sebagai berikut.

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu + \gamma b + \varepsilon v - (\alpha + \beta)sb - \mu s \\ \frac{db}{dt} &= (\alpha s - \gamma - \mu)b \\ \frac{dv}{dt} &= \beta sb - (\varepsilon + \delta + \mu)v \\ \frac{dr}{dt} &= \delta v - \mu r \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dimana s, b, v, r masing-masing menyatakan proporsi individu dalam kompartemen rentan, pelaku, korban, dan pulih pada populasi siswa. Populasi diasumsikan tertutup, sehingga sistem proporsi memenuhi $s(t) + b(t) + v(t) + r(t) = 1$ untuk setiap waktu t .

Transisi antar subpopulasi dalam model (1) dipengaruhi oleh interaksi antarindividu yang direpresentasikan melalui suku perkalian antar variabel. Secara umum, tanda negatif pada suatu suku menunjukkan berkurangnya proporsi individu dari subpopulasi terkait, sedangkan tanda positif menunjukkan bertambahnya proporsi individu pada subpopulasi tersebut.

Secara khusus, suku yang melibatkan interaksi antara subpopulasi rentan dan pelaku, yaitu sb , merepresentasikan tingkat interaksi antara individu rentan dan pelaku dalam populasi. Pada persamaan $\frac{ds}{dt}$ terdapat suku $-\alpha sb$ dan $-\beta sb$ yang menunjukkan berkurangnya proporsi individu dalam subpopulasi rentan akibat interaksi dengan pelaku. Suku $-\alpha sb$ merepresentasikan perpindahan individu rentan menjadi pelaku, sedangkan suku $-\beta sb$ menunjukkan perpindahan individu rentan menjadi korban.

Sebaliknya, pada persamaan $\frac{db}{dt}$ terdapat suku $+\alpha sb$ yang menyatakan bertambahnya proporsi pelaku yang berasal dari individu rentan akibat pengaruh lingkungan sosial, seperti imitasi perilaku agresif atau tekanan kelompok. Demikian pula, pada persamaan $\frac{dv}{dt}$, suku $+\beta sb$ menunjukkan bertambahnya proporsi korban akibat interaksi dengan pelaku. Dengan demikian, penggunaan suku sb dalam model ini menunjukkan bahwa laju perpindahan individu bergantung pada intensitas interaksi antara subpopulasi rentan dan pelaku, sehingga semakin besar jumlah kedua subpopulasi tersebut, semakin tinggi peluang terjadinya perundungan.

Interpretasi yang sama berlaku pada suku-suku lainnya dalam sistem, sehingga setiap persamaan pada model merepresentasikan dinamika perpindahan individu antar subpopulasi berdasarkan interaksi sosial dan proses yang terjadi dalam sistem.

Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium dalam model matematika penyebaran perilaku perundungan diperoleh dengan membuat persamaan pada sistem (1) sama dengan nol, yaitu $\frac{ds}{dt} = \frac{db}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$ (Boyce *et al.*, 2017; Hirsch *et al.*, 2013). Titik ekuilibrium bebas perundungan merupakan kondisi ketika tidak ada siswa yang berperan sebagai pelaku maupun korban perundungan, sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas perundungan yaitu $Q_0 = (s, b, v, r) = (1, 0, 0, 0)$. Sedangkan titik ekuilibrium perundungan merupakan kondisi ketika perilaku perundungan masih berlangsung dalam populasi. Titik ekuilibrium perundungan dinyatakan sebagai $Q^* = (s^*, b^*, v^*, r^*)$ dimana

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{\gamma + \mu}{\alpha} & v^* &= \frac{\beta(\gamma + \mu)(\alpha\mu - \mu\gamma - \mu^2)}{\alpha(\alpha\mu(\varepsilon + \delta + \mu) + \beta(\gamma + \mu)(\delta + \mu))} \\ b^* &= \frac{(\alpha\mu - \mu\gamma - \mu^2)(\varepsilon + \delta + \mu)}{\alpha\mu(\varepsilon + \delta + \mu) + \beta(\gamma + \mu)(\delta + \mu)} & r^* &= \frac{\delta\beta(\gamma + \mu)(\alpha - \gamma - \mu)}{\alpha(\alpha\mu(\varepsilon + \delta + \mu) + \beta(\gamma + \mu)(\delta + \mu))} \end{aligned}$$

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) menggambarkan jumlah rata-rata siswa baru yang menjadi pelaku perundungan akibat pengaruh satu pelaku dalam subpopulasi rentan (Driessche & Watmough, 2005). Nilai R_0 digunakan untuk menentukan dinamika penyebaran perilaku perundungan. Jika $R_0 > 1$, maka perilaku perundungan akan menyebar, sedangkan jika $0 < R_0 < 1$, maka perilaku perundungan akan menurun dan akhirnya menghilang. Pada model ini, nilai R_0 ditentukan menggunakan pendekatan *Next Generation Matrix* (NGM) yaitu dengan memisahkan laju infeksi baru dan laju transisi keluar dari proporsi subpopulasi pelaku perundungan (b) dan proporsi subpopulasi korban perundungan (v) (Martcheva, 2015). Berdasarkan sistem pada Persamaan (1), kedua proporsi subpopulasi tersebut dinyatakan melalui persamaan berikut.

$$\frac{db}{dt} = (\alpha s - \gamma - \mu)b \qquad \frac{dv}{dt} = \beta sb - (\varepsilon + \delta + \mu)v$$

Langkah selanjutnya adalah memisahkan bagian laju infeksi baru ke dalam matriks $\mathcal{F}(x)$ dan laju transisi keluar ke dalam matriks $\mathcal{V}(x)$, sehingga diperoleh:

$$\mathcal{F}(x) = \begin{bmatrix} \alpha sb \\ \beta sb \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}(x) = \begin{bmatrix} (\gamma + \mu)b \\ (\varepsilon + \delta + \mu)v \end{bmatrix} \quad (2)$$

Linearisasi Persamaan (2) dengan membentuk matriks Jacobian F dan V .

$$F = \begin{bmatrix} \alpha s & 0 \\ \beta s & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \gamma + \mu & 0 \\ 0 & \varepsilon + \delta + \mu \end{bmatrix} \quad (3)$$

Substitusikan titik ekuilibrium Q_0 pada persamaan (3), sehingga

$$F(1,0,0,0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad V(1,0,0,0) = \begin{bmatrix} \gamma + \mu & 0 \\ 0 & \varepsilon + \delta + \mu \end{bmatrix} \quad (4)$$

Selanjutnya dihitung invers matriks V dari persamaan (4) sebagai berikut.

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma + \mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon + \delta + \mu} \end{bmatrix}$$

Matriks *Next Generation Matrix* (NGM) diperoleh dari hasil perkalian antara matriks F dan V^{-1} , maka

$$K = F \times V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\gamma + \mu} & 0 \\ \frac{\beta}{\gamma + \mu} & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari nilai eigen yang memenuhi $|K - \lambda I| = 0$.

$$|K - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{\gamma + \mu} - \lambda & 0 \\ \frac{\beta}{\gamma + \mu} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{\alpha}{\gamma + \mu}, \quad \lambda_2 = 0$$

Karena R_0 merupakan nilai radius spektral dari *Next Generation Matrix*, maka bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah nilai terbesar dari λ_1 dan λ_2 , sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\alpha}{\gamma + \mu}$$

Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Analisis kestabilan dilakukan dengan melinearisasikan sistem persamaan diferensial nonlinear pada Persamaan (1). Linearisasi dilakukan dengan membentuk matriks Jacobian yang diperoleh dari turunan parsial dari fungsi laju perubahan terhadap masing-masing variabel (s, b, v, r), sehingga diperoleh matriks Jacobian (Sinaga *et al.*, 2021) sebagai berikut.

$$J_f = \begin{bmatrix} -\alpha b - \beta b - \mu & \gamma - \alpha s - \beta s & \varepsilon & 0 \\ \alpha b & \alpha s - \gamma - \mu & 0 & 0 \\ \beta b & \beta s & -\varepsilon - \delta - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu \end{bmatrix} \quad (5)$$

Selanjutnya akan dianalisis kestabilan di titik ekuilibrium Q_0 dan Q^* .

Teorema 1 (Al-Maalwi *et al.*, 2021) *Jika $0 < R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium bebas perundungan $Q_0 = (1, 0, 0, 0)$ stabil asimtotik lokal. Jika tidak, maka titik ekuilibrium bebas perundungan tidak stabil.*

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $0 < R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium Q_0 stabil asimtotik lokal dan jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium Q_0 tidak stabil. Substitusikan Q_0 ke persamaan (5) sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\mu & \gamma - \alpha - \beta & \varepsilon & 0 \\ 0 & \alpha - \gamma - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\varepsilon - \delta - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu \end{bmatrix} \quad (6)$$

Selanjutnya dicari nilai eigen dari matriks Jacobian pada persamaan (6), yang memenuhi $|J_1 - \lambda I| = 0$ sebagai berikut:

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & \gamma - \alpha - \beta & \varepsilon & 0 \\ 0 & \alpha - \gamma - \mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\varepsilon - \delta - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\mu - \lambda)^2 (\alpha - \gamma - \mu - \lambda) (-\varepsilon - \delta - \mu - \lambda) = 0$$

Dari persamaan karakteristik di atas, dapat diperoleh nilai-nilai eigen sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -\mu < 0 \\ \lambda_3 &= \alpha - \gamma - \mu = (R_0 - 1)(\gamma + \mu) < 0 \Leftrightarrow 0 < R_0 < 1 \\ \lambda_4 &= -\varepsilon - \delta - \mu = -(\varepsilon + \delta + \mu) < 0\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil perhitungan, diperoleh empat nilai eigen dari sistem, dimana λ_1 , λ_2 dan λ_4 bernilai negatif karena seluruh parameter bernilai positif. Selanjutnya untuk λ_3 diperoleh $\lambda_3 = (R_0 - 1)(\gamma + \mu)$ yang bernilai negatif jika dan hanya jika $0 < R_0 < 1$. Dengan demikian, terbukti bahwa titik ekuilibrium bebas perundungan bersifat stabil asimtotik lokal ■.

Untuk mempermudah analisis kestabilan titik ekuilibrium Q^* , beberapa bagian dari titik ekuilibrium perundungan Q^* dimisalkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}p &= \alpha\mu - \mu\gamma - \mu^2 = \mu(R_0 - 1)(\gamma + \mu) \\ q &= \alpha\mu(\varepsilon + \delta + \mu) + \beta(\gamma + \mu)(\delta + \mu) > 0\end{aligned}$$

sehingga titik ekuilibrium perundungan $Q^* = (s^*, b^*, v^*, r^*)$ dapat ditulis kembali dalam bentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned}s^* &= \frac{\gamma + \mu}{\alpha} & v^* &= \frac{\beta(\gamma + \mu)p}{\alpha q} \\ b^* &= \frac{p(\varepsilon + \delta + \mu)}{q} & r^* &= \frac{\delta\beta(\gamma + \mu)p}{\alpha\mu q}\end{aligned}\quad (7)$$

Substitusikan titik ekuilibrium perundungan Q^* pada Persamaan (7) ke dalam matriks Jacobian pada Persamaan (5), sehingga diperoleh:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\alpha\left(\frac{p(\varepsilon + \delta + \mu)}{q}\right) - \beta\left(\frac{p(\varepsilon + \delta + \mu)}{q}\right) - \mu & \gamma - \alpha\left(\frac{\gamma + \mu}{\alpha}\right) - \beta\left(\frac{\gamma + \mu}{\alpha}\right) & \varepsilon & 0 \\ \alpha\left(\frac{p(\varepsilon + \delta + \mu)}{q}\right) & \alpha\left(\frac{\gamma + \mu}{\alpha}\right) - \gamma - \mu & 0 & 0 \\ \beta\left(\frac{p(\varepsilon + \delta + \mu)}{q}\right) & \beta\left(\frac{\gamma + \mu}{\alpha}\right) & -\varepsilon - \delta - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu \end{bmatrix}\quad (8)$$

Selanjutnya dicari nilai eigen dari matriks Jacobian pada persamaan (8) yang memenuhi $|J_2 - \lambda I| = 0$ sebagai berikut

$$\begin{vmatrix} -(\alpha + \beta)\left(\frac{p(\varepsilon + \delta + \mu)}{q}\right) - \mu - \lambda & -\mu - \beta\left(\frac{\gamma + \mu}{\alpha}\right) & \varepsilon & 0 \\ \alpha\left(\frac{p(\varepsilon + \delta + \mu)}{q}\right) & -\lambda & 0 & 0 \\ \beta\left(\frac{p(\varepsilon + \delta + \mu)}{q}\right) & \beta\left(\frac{\gamma + \mu}{\alpha}\right) & -\varepsilon - \delta - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik polinomial

$$\lambda^4 + A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0\quad (9)$$

dimana nilai koefisien A, B, C, D yaitu

$$A = \frac{(\alpha p + \beta p + q)(\varepsilon + \delta + \mu) + 2\mu q}{q}$$

$$B = \frac{p(\varepsilon + \delta + \mu)(\alpha\delta + \alpha\varepsilon + 3\alpha\mu + \beta\delta + \beta\gamma + 3\beta\mu) + 2q\mu(\varepsilon + \delta) + 3q\mu^2}{q}$$

$$C = \frac{p(\varepsilon + \delta + \mu)(2\alpha\delta\mu + 2\alpha\varepsilon\mu + 3\alpha\mu^2 + \beta\delta\gamma + 2\beta\delta\mu + 2\beta\gamma\mu + 3\beta\mu^2) + q\mu^2(\varepsilon + \delta + \mu)}{q}$$

$$D = \frac{(\mu p)(\varepsilon + \delta + \mu)(\alpha\delta\mu + \alpha\varepsilon\mu + \alpha\mu^2 + \beta\delta\gamma + \beta\delta\mu + \beta\gamma\mu + \beta\mu^2)}{q}$$

Persamaan karakteristik (9) memiliki bentuk yang kompleks dan tidak dapat difaktorkan secara sederhana, sehingga sulit untuk menentukan secara langsung tanda positif atau negatif dari keempat nilai eigennya. Oleh karena itu, untuk menyelidiki tanda dari nilai eigen tersebut, maka digunakan kriteria Hurwitz (Martcheva, 2015). Seluruh akar dari persamaan (9) memiliki bagian riil negatif jika syarat kriteria Hurwitz terpenuhi, yaitu koefisien polinomial bernilai positif dan seluruh determinan submatriks Hurwitz juga positif.

Teorema 2 (Al-Maalwi *et al.*, 2021) *Titik ekuilibrium perundungan $Q^* = (s^*, b^*, v^*, r^*)$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.*

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium Q^* stabil asimtotik lokal dan jika $0 < R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium Q^* tidak stabil.

Pertama akan ditunjukkan bahwa koefisien dari persamaan (9) bernilai positif. Karena nilai A, B, C, D tersusun dari operasi penjumlahan dan perkalian dari parameter-parameter model yang secara definisi bersifat positif, maka tanda dari koefisien polinomial karakteristik ditentukan dari nilai p . Nilai $p > 0$ jika dan hanya jika $R_0 > 1$. Dengan demikian, seluruh koefisien polinomial karakteristik dari Persamaan (3.27) bernilai positif yaitu $A, B, C, D > 0$, jika dan hanya jika $R_0 > 1$, sehingga syarat pertama terpenuhi.

Selanjutnya dibentuk matriks Hurwitz berdasarkan urutan koefisien dari polinomial karakteristik pada persamaan (9)

$$H = \begin{bmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ C & B & A & 1 \\ 0 & D & C & B \\ 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

dengan submatriks utama, yaitu H_1, H_2, H_3 , dan H_4 sebagai berikut.

$$H_1 = [A], \quad H_2 = \begin{bmatrix} A & 1 \\ C & B \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} A & 1 & 0 \\ C & B & A \\ 0 & D & C \end{bmatrix}, \quad H_4 = H = \begin{bmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ C & B & A & 1 \\ 0 & D & C & B \\ 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

Misalkan $\Delta_j = \det(H_j)$, dengan $j = 1, 2, 3, 4$ menyatakan determinan dari sub-sub matriks Hurwitz, sehingga dapat dituliskan

$$\Delta_1 = \det(H_1) = |A| = A > 0$$

$$\Delta_2 = \det(H_2) = \begin{vmatrix} A & 1 \\ C & B \end{vmatrix} = AB - C > 0$$

$$\Delta_3 = \det(H_3) = \begin{vmatrix} A & 1 & 0 \\ C & B & A \\ 0 & D & C \end{vmatrix} = -A^2D + ABC - C^2 > 0$$

$$\Delta_4 = \det(H_4) = \begin{vmatrix} A & 1 & 0 & 0 \\ C & B & A & 1 \\ 0 & D & C & B \\ 0 & 0 & 0 & D \end{vmatrix} = -A^2D^2 + ABCD - C^2D > 0$$

Berdasarkan hasil perhitungan terbukti bahwa $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$, dan $\Delta_4 > 0$ jika dan hanya jika $R_0 > 1$, sehingga syarat kedua terpenuhi. Dengan demikian, ketika $R_0 > 1$ kedua syarat kriteria Hurwitz terpenuhi, sehingga semua akar dari polinomial karakteristik pada persamaan (3.27) memiliki bagian riil negatif yang artinya titik ekuilibrium Q^* stabil asimtotik lokal ■.

Simulasi Numerik Model Penyebaran Perilaku Perundungan di Sekolah

Simulasi numerik dilakukan untuk memvisualisasikan dinamika penyebaran perilaku perundungan di sekolah serta meninjau efektivitas intervensi program anti perundungan melalui variasi nilai parameter. Proses simulasi dilakukan menggunakan Python, dengan nilai parameter diambil dari berbagai sumber penelitian sebelumnya. Data populasi diperoleh dari *National Adolescent Mental Health Survey* (NAMHS) 2021, yang melibatkan 5.584 responden remaja Indonesia usia 10–17 tahun (Erskine *et al.*, 2025). Berdasarkan survei, proporsi awal pelaku perundungan ditetapkan sebesar 0,8% dan proporsi korban sebesar 2,3%, sedangkan proporsi individu pulih diasumsikan 0%, sehingga proporsi siswa rentan sebesar 96,9%. Nilai awal variabel dan parameter yang digunakan ditampilkan pada Tabel 2 dan Tabel 3, berdasarkan parameter yang telah dijelaskan pada Tabel 1.

Tabel 2. Nilai Awal Variabel dalam Proporsi

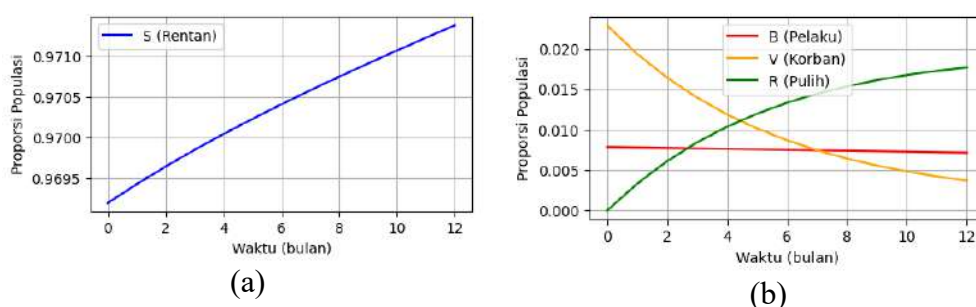
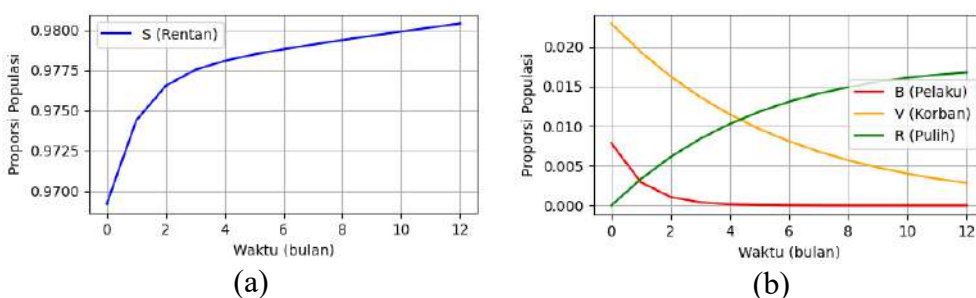
Variabel	Nilai	Keterangan
N	5.584	Jumlah populasi yang digunakan dalam model yang diadaptasi dari data NAMHS (Erskine <i>et al.</i> , 2025)
$s(0)$	0,9690	Proporsi subpopulasi siswa rentan
$b(0)$	0,0080	Proporsi subpopulasi pelaku
$v(0)$	0,0230	Proporsi subpopulasi korban
$r(0)$	0	Proporsi subpopulasi korban pulih

Tabel 3. Nilai Parameter Penyebaran Perilaku Perundungan

Parameter	Nilai	Sumber
α	0,0042	(Crokidakis, 2025)
β	0,025	(Crokidakis, 2025)
δ	0,159	(Yani <i>et al.</i> , 2023)
ε	0,0042	(Crokidakis, 2025)
μ	0,0119	(Erskine <i>et al.</i> , 2025)

Berdasarkan hasil perhitungan, diperoleh bahwa ketika tidak ada intervensi program anti perundungan ($\gamma = 0$), diperoleh $R_0 = 0,3529 < 1$, sedangkan pada kondisi intervensi maksimal ($\gamma = 1$), nilai $R_0 = 0,0042 < 1$. Hasil ini menunjukkan bahwa bahkan tanpa intervensi, penyebaran perilaku perundungan tidak akan bertahan lama dalam populasi siswa. Namun, penerapan program anti perundungan yang optimal tetap berperan penting dalam mempercepat penurunan jumlah pelaku dan memperkuat kondisi bebas perundungan di sekolah.

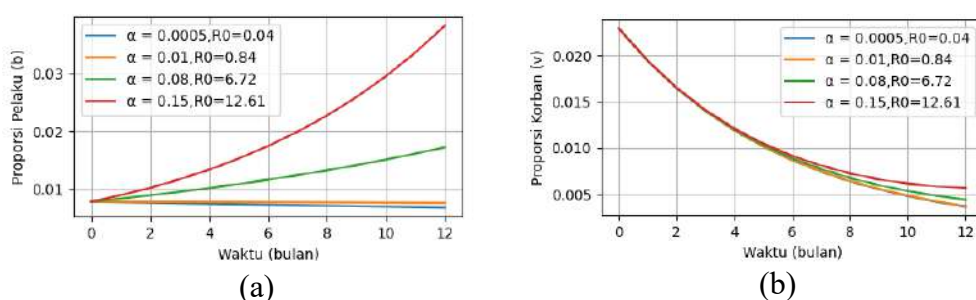
Berdasarkan simulasi yang dilakukan, diperoleh grafik sebagai berikut.

**Gambar 2.** Grafik Proporsi Subpopulasi *Susceptible* (a) dan BVR (b) tanpa Intervensi**Gambar 3.** Grafik Proporsi Subpopulasi *Susceptible* (a) dan BVR (b) dengan Intervensi

Simulasi dilakukan selama 12 bulan untuk membandingkan dinamika perilaku perundungan tanpa intervensi ($\gamma = 0$) dan dengan intervensi maksimal ($\gamma = 1$). Pada kondisi tanpa intervensi, proporsi siswa rentan meningkat dari 0,9690 menjadi 0,9714, sementara pelaku dan korban menurun dari 0,0080 menjadi 0,0072 dan dari 0,0230 menjadi 0,0038, serta proporsi siswa pulih meningkat menjadi 0,0178. Namun, ketika intervensi diterapkan secara optimal, peningkatan proporsi siswa rentan berlangsung lebih cepat hingga mencapai

0,9804, sedangkan pelaku dan korban menurun tajam hingga mencapai nol dan 0,0028, dengan proporsi siswa pulih mencapai 0,0168. Hasil ini menunjukkan bahwa meskipun perilaku perundungan dapat menurun secara alami tanpa intervensi, penerapan program anti perundungan yang efektif secara signifikan mempercepat penurunan jumlah pelaku dan korban, serta memperkuat kondisi bebas perundungan di lingkungan sekolah. Selain itu, kecenderungan peningkatan proporsi siswa rentan menuju nilai mendekati 1 serta penurunan pelaku dan korban menuju nol menunjukkan bahwa solusi sistem secara bertahap konvergen menuju titik ekuilibrium bebas perundungan, yaitu $Q_0 = (1,0,0,0)$

Simulasi variasi parameter α dilakukan pada kondisi tanpa intervensi ($\gamma = 0$) untuk melihat pengaruh tingkat perpindahan siswa dari subpopulasi rentan ke pelaku terhadap dinamika perundungan. Hasil menunjukkan bahwa semakin besar nilai α , bilangan reproduksi dasar (R_0) meningkat dan perilaku perundungan cenderung menyebar lebih luas. Pada nilai α kecil (0,0005 dan 0,010) dengan $R_0 < 1$, proporsi pelaku cenderung menurun menuju nol, yang menunjukkan bahwa sistem konvergen menuju titik ekuilibrium bebas perundungan. Sebaliknya, pada nilai α lebih besar (0,08 dan 0,15) dengan $R_0 > 1$, proporsi pelaku meningkat dan cenderung mendekati nilai konstan tertentu, yang mengindikasikan bahwa sistem menuju titik ekuilibrium endemik. Sementara itu, proporsi korban menunjukkan pola penurunan pada seluruh variasi α , yang mengindikasikan adanya pengaruh mekanisme pemulihan seperti efektivitas bimbingan konseling (δ) dan ketahanan diri korban (ε). Dengan demikian, parameter α berperan signifikan terhadap peningkatan jumlah pelaku, namun pengaruhnya terhadap jumlah korban tidak dominan karena adanya mekanisme pemulihan dalam sistem.



Gambar 4. Grafik Proporsi Subpopulasi Pelaku dengan Variasi α (a) dan Proporsi Subpopulasi Korban dengan Variasi α (b)

KESIMPULAN

Penelitian ini menyusun model matematika untuk menggambarkan penyebaran perilaku perundungan di sekolah dengan empat subpopulasi, yaitu siswa rentan (S), pelaku (B), korban (V), dan korban yang pulih (R), yang kemudian digunakan untuk meninjau dinamika penyebaran perilaku perundungan dengan atau tanpa intervensi program anti perundungan. Berdasarkan analisis, diperoleh titik ekuilibrium bebas perundungan dan titik ekuilibrium perundungan.

Hasil analisis kestabilan menunjukkan bahwa ketika $R_0 < 1$, sistem menuju titik ekuilibrium bebas perundungan, sedangkan ketika $R_0 > 1$, perilaku perundungan cenderung bertahan dalam populasi. Simulasi menunjukkan bahwa tanpa intervensi ($R_0 = 0,3529 < 1$), perilaku perundungan cenderung menurun secara alami dengan proporsi pelaku dan korban berkurang serta proporsi siswa rentan meningkat perlahan, sedangkan intervensi optimal ($R_0 = 0,0042 < 1$) mempercepat peningkatan proporsi siswa rentan sekaligus menekan pelaku mencapai nol dan korban mendekati nol. Hal ini menunjukkan bahwa penerapan program anti-perundungan yang efektif memiliki peran penting dalam mempercepat pengendalian perilaku perundungan di lingkungan sekolah.

Model ini memiliki keterbatasan karena belum mempertimbangkan perpindahan langsung dari subpopulasi pelaku ke subpopulasi pulih, yang disebabkan oleh definisi subpopulasi pulih yang hanya mencakup korban yang telah mengalami pemulihan. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan model dengan mempertimbangkan kemungkinan perpindahan pelaku menuju kondisi pemulihan yang lebih luas, sehingga model yang dihasilkan dapat merepresentasikan dinamika perundungan secara lebih realistis.

REFERENSI

- Al-Maalwi, R., Al-Sheikh, S., Ashi, H. A., & Asiri, S. (2021). Mathematical Modeling and Parameter Estimation of Unemployment with The Impact of Training Programs. *Mathematics and Computer in Simulation*, 182, 705–720. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0378475420304134>
- Ashi, H. A. (2021). Stability Analysis of a Simple Mathematical Model for School Bullying. *AIMS Mathematics*, 7(October), 4936–4945. <https://doi.org/10.3934/math.2022274>
- Boyce, W. E., Diprima, R. C., & Meade, D. B. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (11th ed.). Jhon Wiley & Sons. https://books.google.co.id/books/about/Elementary_Differential_Equations_and_Bo.html?id=SyaVDwAAQBAJ&redir_esc=y
- Crokidakis, N. (2025). A Mathematical Model for the Bullying Dynamics in Schools. *Applied Mathematics and Computation*, 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.129254>
- Driessche, P. Van Den, & Watmough, J. (2005). Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *IEEE Transactions on Affective Computing*, 273–284. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- Erskine, H. E., Maravilla, J. C., Fine, S. L., Ramaiya, A., & Li, M. (2025). Bullying Victimisation and Perpetration and the Association with Mental Disorders Among Adolescents in Kenya, Indonesia, and Vietnam: Findings from the National Adolescent Mental Health Surveys. *Child and Adolescent Psychiatry and Mental Health*, 19(Suppl 1), 1–13.
- Haeringen, E. S. Van, Veltmeijer, E. A., & Gerritsen, C. (2024). Empirical Validation of an Agent-Based Model of Emotion Contagion. *IEEE Transactions on Affective Computing*, 15(1), 273–284.

- <https://doi.org/10.1109/TAFFC.2023.3272031>
- Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2013). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press.
<https://doi.org/10.1016/C2009-0-61160-0>
- Komariyah, S. (2022). *Dampak Bullying School terhadap Perkembangan Sosial Remaja di SMK Al-Muhtadin Depok* [FITK UIN Syarif Hidayatullah Jakarta].
<https://repository.uinjkt.ac.id/dspace/handle/123456789/61909>
- Lusiana, S. N. E., & Arifin, S. (2022). Dampak Bullying terhadap Kepribadian Seorang Anak. *Kariman: Jurnal Pendidikan Keislaman*, 10, 337–350.
<https://doi.org/10.52185/kariman.v10i2.252>
- Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7612-3>
- Rigby, K. (2024). Theoretical Perspectives and Two Explanatory Models of School Bullying. *International Journal of Bullying Prevention*, 6(2), 101–109.
<https://doi.org/10.1007/s42380-022-00141-x>
- Sinaga, L. P., Kartika, D., & Nasution, H. (2021). *Pengantar Sistem Dinamik*. Amal Insani.
https://books.google.co.id/books/about/Pengantar_Sistem_Dinamik.html?id=N0NTEAAAQBAJ&redir_esc=y
- Stubbs-Richardson, M., & May, D. C. (2021). Social Contagion in Bullying: an Examination of Strains and Types of Bullying Victimization in Peer Network. *American Journal of Criminal Justice*, 46, 749–769.
<https://doi.org/10.1007/s12103-020-09572-y>
- Yani, R. A., Mustikasari, M., & Imelisa, R. (2023). International Journal of Social Science And Human Research The Effect of Counseling Group towards Self-Efficacy at Victim Bullying Students. *International Journal of Social Science and Human Research*, 06(01), 521–527. <https://doi.org/10.47191/ijssshr/v6-i1-69>
- Yokotani, K., & Takano, M. (2021). Social Contagion of Cyberbullying via Online Perpetrator and Victim Network. *Computers in Human Behaviour*, 119.