Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.20 No.1 (Juni 2026) Hal. 103-118

# UNIFIKASI JALUR TRANSFORMASI DAN SIFAT SIKLIS DARI VARIABEL ACAK RUMPUN DISTRIBUSI KONTINU: DARI NORMAL HINGGA t-STUDENT

**Raden Gunawan Santosa*, Junius Karel Tampubolon**

Program Studi Informatika Fakultas Teknik Informatika,
Universitas Kristen Duta Wacana
Jl Dr. Wahidin Sudirohusodo No. 5-25 Yogyakarta 55224, Indonesia
*email: gunawan@staff.ukdw.ac.id

## ABSTRACT

Probability distributions serve as the cornerstone of inferential statistics, yet the mathematical proofs of their genealogical relationships are frequently presented fragmentedly using inconsistent methodologies in academic literature. This study aims to reconstruct and unify the transformation pathways of major continuous probability distributions—comprising Standard Normal (Z), Chi-Square ($\chi^2$), Gamma (Γ), Beta ($(\beta$), F-Snedecor (F), and t-Student (t) into a single, cohesive theoretical framework. The analytical derivation relies on the rigorous application of multistage bivariate Jacobian matrix transformations and asymptotic analysis, thereby eliminating dependency on Moment Generating Functions (MGF) which often fail to converge within specific parameter spaces. The results demonstrate that this transformation chain does not merely form a one-way linear trajectory, but rather a cyclic (circular) conceptual structure. The Standard Normal distribution acts as the origin that derives Chi-Square, Gamma, Beta, and F, before culminating in the t-distribution. Furthermore, through asymptotic limit proofs as the degrees of freedom approach infinity ($v \to \infty$), the probability density function of the t-Student distribution mathematically converges back into the Standard Normal distribution ($Z$), perfectly closing the genealogical loop. The theoretical contribution of this study clarifies the underlying mathematical assumptions, eliminating the "black-box" perspective on t-tests, ANOVA, and Chi-Square tests, while providing a computational foundation for optimizing random number generator algorithms in stochastic simulations.

**Keywords**: Jacobian Transformation, Cyclic Structure, Distribution Unification, Asymptotic Property, Probability Genealogy

## ABSTRAK

Distribusi probabilitas kontinu merupakan fondasi utama dalam inferensi statistik, namun pembuktian hubungan genealogi antar-distribusi sering kali disajikan secara terfragmentasi menggunakan metodologi yang inkonsisten dalam literatur akademik. Penelitian ini bertujuan untuk melakukan rekonstruksi dan unifikasi jalur transformasi variabel acak rumpun distribusi kontinu utama—meliputi Distribusi Normal Baku ($Z$), Chi-Square ($\chi^2$), Gamma (Γ), Beta ($\beta$), F-Snedecor ($F$), dan t-Student ($t$) ke dalam satu kerangka kerja teoretis yang terpadu. Metode pembuktian yang digunakan mengandalkan penerapan teknik transformasi variabel Jacobian multitahap secara simultan dan analisis asimtotik, guna mengeliminasi dependensi terhadap Fungsi Pembangkit Momen (MGF) yang sering kali tidak konvergen pada ruang integral tertentu. Hasil penelitian analitis menunjukkan bahwa rantai transformasi ini tidak sekadar membentuk lintasan linier searah, melainkan sebuah struktur konseptual yang siklis (sirkular). Distribusi Normal Baku bertindak sebagai hulu yang menurunkan Chi-Square, Gamma, Beta, dan F, hingga bermuara pada distribusi t-Student. Melalui pembuktian limit asimtotik ketika derajat kebebasan mendekati tak hingga ($v \to \infty$), fungsi padat peluang distribusi t-Student terbukti secara matematis konvergen kembali menjadi

distribusi Normal Baku ($Z$), sehingga menutup siklus genealogi secara sempurna. Kontribusi teoretis penelitian ini memberikan kejelasan matematis yang menghilangkan pandangan kotak hitam (*black box*) pada uji-t, ANOVA, dan uji Chi-Square, sekaligus menyediakan landasan bagi optimasi algoritma generator bilangan acak pada komputasi stokastik.

**Kata kunci:** Transformasi Jacobian, Struktur Siklis, Unifikasi Distribusi, Sifat Asimtotik, Genealogi Probabilitas

Received: 29 May 2026, Accepted: 16 July 2026, Published: 18 July 2026.

## PENDAHULUAN

Dalam teori statistika matematis dan aplikasinya pada inferensi data, rumpun distribusi probabilitas kontinu memegang peranan yang sangat fundamental. Distribusi Normal Baku ($Z$), Chi-Square ($\chi^2$), Gamma ($\Gamma$), Beta ($\beta$), F-Snedecor ($F$), dan t-Student ($t$) merupakan pilar utama dalam pengembangan uji hipotesis, analisis varians (ANOVA), hingga pemodelan stokastik kompleks. Pemahaman mendalam mengenai sifat, perilaku, dan struktur keterhubungan geometris antar-distribusi ini menjadi prasyarat mutlak untuk menjamin validitas teoretis dari estimator yang digunakan dalam statistik inferensial.

Secara historis, hubungan kekerabatan atau genealogi antara keenam distribusi ini telah banyak dibahas dalam literatur klasik statistika (Hogg *et al*., 2019). Namun, mayoritas referensi akademis menyajikan pembuktian hubungan tersebut secara terfragmentasi dan menggunakan metodologi yang inkonsisten. Sebagai contoh, penurunan distribusi Chi-Square dari Normal sering kali mengandalkan *Moment Generating Functions* (MGF), sementara hubungan antara Gamma, Beta, dan F diturunkan secara terpisah melalui teknik konvolusi integral yang rumit. Pendekatan yang terfragmentasi ini menyembunyikan struktur kesatuan (*unity*) dari sistem distribusi kontinu. Terlebih lagi, analisis yang ada umumnya menyajikan hubungan tersebut sebagai lintasan linier searah, sehingga mengabaikan sifat asimtotik yang sebenarnya mampu menutup sistem ini menjadi sebuah siklus teoretis yang utuh (Casella & Berger, 2024).

Untuk menjembatani celah teoretis tersebut, penelitian ini melakukan rekonstruksi dan unifikasi jalur transformasi variabel acak seluruh rumpun distribusi kontinu tersebut ke dalam satu kerangka kerja yang terpadu. Kontribusi utama artikel ini bukan terletak pada penemuan distribusi baru, melainkan pada penyusunan ulang (*reconstruction*) hubungan antar distribusi kontinu utama ke dalam satu kerangka transformasi yang konsisten. Tujuan utama dari artikel ini terletak pada penerapan teknik transformasi variabel Jacobian multitahap secara simultan dan konsisten, yang dimulai dari hulu (Distribusi Normal) hingga bermuara pada Distribusi t-Student. Lebih jauh lagi, berbeda dengan pendekatan linier konvensional, penelitian ini memperkenalkan paradigma struktur siklis

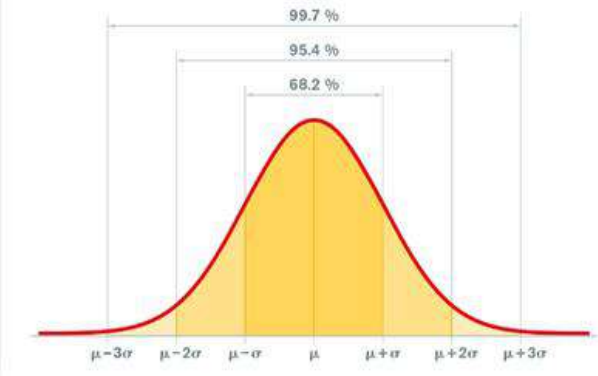
(sirkular), di mana melalui pembuktian limit asimtotik saat derajat kebebasan $v$ mendekati tak hingga ($v \to \infty$), fungsi padat peluang distribusi t-Student terbukti secara matematis konvergen kembali menjadi distribusi Normal Baku. Dengan demikian, seluruh rantai transformasi ini membentuk satu lingkaran genealogi yang tertutup sempurna.

Berdasarkan latar belakang tersebut, tujuan utama penelitian ini adalah memverifikasi secara ketat (*rigorous*) keterhubungan sirkular enam distribusi probabilitas kontinu melalui pendekatan transformasi variabel terpadu. Kontribusi teoritis yang ditawarkan dari rekonstruksi ini mencakup dua aspek penting. Pertama, dari aspek pedagogis dan akademis, unifikasi ini menyediakan jalur penurunan yang lebih efisien dan elegan tanpa harus bergantung pada fungsi pembangkit yang sering kali tidak eksis pada ruang parameter tertentu. Kedua, secara praktis, kejelasan matematis dari struktur siklis ini memberikan landasan komputasi yang berharga untuk optimasi algoritma generator bilangan acak (*random number generator*) dalam simulasi stokastik dan metode Monte Carlo, dengan memanfaatkan sifat intervertibilitas antar-distribusi.

## TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan diberikan beberapa definisi tentang distribusi yang terkait dengan topik penelitian ini. Beberapa distribusi yang diperlukan seperti Normal Baku ($Z$), Chi-Square ($\chi^2$), Gamma ($\Gamma$), Beta ($\beta$), F-Snedecor ($F$), dan t-Student ($t$) dapat dipelajari pada definisi-definisi berikut (Casella & Berger, 2024)(Hogg *et al*., 2019).

**Definisi 1.** Variabel acak kontinu $Z$ dikatakan berdistribusi Normal Baku, dinotasikan dengan $Z \backsim N(0,1)$, jika memiliki fungsi padat peluang (pdf) yang didefinisikan pada ruang sampel $S_Z = \{z: -\infty < z < \infty\}$ sebagai berikut: $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$.




**Gambar 1**. Bentuk Distribusi Normal

Penelitian terdahulu menegaskan pentingnya distribusi Normal sebagai landasan statistik parametrik, baik dalam memahami karakteristik data teoretis melalui Teorema Chebyshev (Puger, 2020) maupun aplikasinya di bidang keperawatan (Maity & Saha, 2023) dan evaluasi pendidikan menggunakan analisis *Z-score* (Valentine *et al*., 2024). Oleh karena itu, pengujian normalitas—baik melalui pendekatan visual maupun uji statistik—menjadi langkah awal yang krusial untuk menjamin kualitas dan ketepatan analisis data pada tahapan penelitian selanjutnya (Isnaini *et al*., 2025).

Distribusi Gamma merupakan distribusi kontinu dua parameter ($\alpha$ dan $\beta$) yang fleksibel dan banyak digunakan untuk memodelkan waktu tunggu hingga terjadinya suatu peristiwa (Hogg *et al*., 2019).

**Definisi 2.** Variabel acak kontinu $X$ dikatakan berdistribusi Gamma dengan parameter bentuk $\alpha > 0$ dan parameter skala $\beta > 0$, dinotasikan dengan $X \backsim Gamma(\alpha, \beta)$, jika memiliki pdf pada ruang sampel $S_X = \{x: x > 0\}$ berupa: $f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$ dengan $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ adalah Integral Gamma.

Penelitian telah mengkaji karakteristik teoretis distribusi Gamma beserta kasus khususnya—seperti distribusi Erlang, Eksponensial, Chi-Square, dan Beta—melalui analisis nilai harapan, varians, fungsi pembangkit momen, hingga estimasi parameternya (Warella *et al*., 2021). Selain secara teoretis, distribusi Gamma juga terbukti efektif diaplikasikan dalam memodelkan fenomena riil, seperti analisis waktu bertahan hidup tikus terhadap dosis bahan beracun (Ramlan & Irmasari, 2024) serta pemodelan waktu keterlambatan penyelesaian kurikulum siswa (Sari *et al*., 2025).

Distribusi Chi-Square ( $\chi^2$) merupakan salah satu distribusi probabilitas kontinu yang paling sering digunakan dalam statistika inferensial, khususnya dalam uji kebaikan-suai (*goodness-of-fit test*), uji independensi, dan estimasi varians populasi (Casella & Berger, 2024).

**Definisi 3.** Variabel acak kontinu $U$ dikatakan berdistribusi Chi-Square dengan derajat kebebasan $v > 0$ (dimana $v$ bilangan bulat), dinotasikan dengan $U \backsim \chi^2(v)$jika memiliki pdf pada ruang sampel $S_U = \{u: u > 0\}$ berupa: $f_U(u; v) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} u^{(v/2)-1} e^{-\frac{u}{2}}$.

Penelitian terdahulu menunjukkan bahwa distribusi Chi-Square berfungsi sebagai kerangka inferensi statistik yang kokoh di berbagai bidang multidisiplin (Ramadhan *et al*., 2025). Secara praktis, distribusi ini efektif diaplikasikan melalui uji asosiasi dan independensi, seperti dalam menganalisis laju pertumbuhan penduduk (Gedeon *et al*., 2024), menguji hubungan nominal kualitatif pada kepuasan fasilitas kampus (Heryaninda *et al*., 2023), hingga mengevaluasi pengaruh gender terhadap pemilihan program studi (Afrianda *et al*., 2024).

Distribusi Beta merupakan distribusi fleksibel pada interval [0,1] yang parameter-parameternya memungkinkan pemodelan berbagai bentuk kurva asimetris maupun simetris (Casella & Berger, 2024).

**Definisi 4.** Variabel acak kontinu *Y* dikatakan berdistribusi Beta dengan parameter bentuk $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$, dinotasikan dengan $Y \backsim Beta(\alpha, \beta)$, jika memiliki pdf pada ruang sampel $S_Y = \{y: 0 \leq y \leq 1\}$ berupa: $f(y; \alpha, \beta) = \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$ dengan $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ dan memiliki hubungan dengan fungsi Gamma, yaitu $\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Penelitian terdahulu membahas karakteristik distribusi Beta dua parameter melalui pendekatan estimasi parameter menggunakan metode kuadrat momen dan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) pada model regresi (Suanda, 2023). Hasil evaluasi menunjukkan bahwa metode momen lebih optimal digunakan pada ukuran sampel kecil, sedangkan metode MLE terbukti lebih konsisten dan efisien secara asimtotik ketika ukuran sampel besar (Ali *et al*., 2023).

Distribusi F-Snedecor merupakan distribusi probabilitas kontinu yang menjadi fondasi utama dalam statistika inferensial multivariat, khususnya dalam analisis varians (ANOVA), uji signifikansi regresi linear simultan, dan uji kesamaan varians antara dua populasi independen. Karakteristik distribusi F ditentukan secara unik oleh sepasang parameter derajat kebebasan, yaitu derajat kebebasan pembilang dan derajat kebebasan penyebut (Casella & Berger, 2024)(Walck, 2017).

**Definisi 5.** Variabel acak kontinu *X* dikatakan berdistribusi F dengan derajat bebas pembilang $d_1 > 0$ dan derajat bebas penyebut $d_2 > 0$, dinotasikan dengan $X \backsim F(d_1, d_2)$, jika memiliki pdf pada ruang sampel $S_X = \{x: x > 0\}$ berupa: $f_X(x) = \frac{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{d_1}{2}}}{B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} \frac{x^{\frac{d_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{d_1}{d_2}x\right)^{\frac{d_1+d_2}{2}}}$ dengan $B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)$ adalah fungsi Beta dan memiliki hubungan dengan fungsi *Gamma*, yaitu $B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{d_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)}$.

Penelitian yang telah dilakukan, membuktikan efektivitas distribusi F-Fisher dalam pengujian statistik dan pemodelan data seumur hidup tanpa memerlukan transformasi data (Akinyemi *et al*., 2022). Penerapannya terbukti mampu mengatasi masalah Behren-Fisher pada metodologi Analisis Varians (ANAVA) melalui pendekatan rata-rata harmonik (Abidoye *et al*., 2015), serta memberikan performa model yang lebih baik berdasarkan kriteria *Akaike Information Criterion* (AIC) dan uji Kolmogorov-Smirnov (Akinyemi *et al*., 2022).

Distribusi t-Student merupakan distribusi probabilitas kontinu yang memiliki peran vital dalam inferensi statistik sampel kecil, khususnya ketika standar deviasi populasi tidak diketahui. Bentuknya memiliki bentuk kurva yang simetris dan mirip

dengan distribusi Normal Baku, namun memiliki ekor yang lebih tebal (*heavier tails*) (Hogg *et al*., 2019)(Casella & Berger, 2024).

**Definisi 6.** Variabel acak kontinu *T* dikatakan berdistribusi t-Student dengan derajat kebebasan $v \in N$, dinotasikan dengan $T \backsim t(v)$, jika memiliki pdf pada ruang sampel $S_T = \{t: -\infty < t < \infty\}$ berupa

$$f_T(t;v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}.$$

Penelitian terapan terdahulu membuktikan efektivitas distribusi t-Student dalam menganalisis hubungan antarvariabel dan melakukan inferensi populasi pada kondisi ukuran sampel yang terbatas (Brereton, 2015). Secara praktis, distribusi ini berhasil diaplikasikan untuk mengidentifikasi penyebab masalah rekonsiliasi pada proses produksi (Magdalena & Krisanti, 2019) serta memberikan akurasi yang lebih tinggi dibandingkan distribusi Normal saat digunakan untuk simulasi data kecil dan deteksi anomali (Tarigan *et al*., 2025).

Penelitian murni berfokus pada pencarian jawaban atas pertanyaan mendasar dan membangun fondasi teori (mencari tahu mengapa sesuatu terjadi). Sedangkan, penelitian terapan berfokus pada penyelesaian masalah praktis di dunia nyata (mencari tahu bagaimana teori itu bisa digunakan).

Ketika keduanya diintegrasikan, tercipta siklus inovasi yang utuh: penelitian murni menghasilkan pengetahuan baru, dan penelitian terapan mengubah pengetahuan tersebut menjadi teknologi, obat-obatan, atau kebijakan yang bermanfaat bagi masyarakat.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoretis murni dalam bidang statistika matematis dengan fokus pada rekonstruksi dan unifikasi hubungan antar distribusi probabilitas kontinu. Pendekatan yang digunakan adalah analisis deduktif analitis melalui operasi aljabar linier dan kalkulus integral lanjut. Objek formal dalam penelitian ini adalah enam fungsi padat peluang (pdf) standar, yaitu Distribusi Normal Baku, Chi-Square, Gamma, Beta, F-Snedecor, dan t-Student.

Untuk membangun sebuah alur pembuktian yang linier dan terpadu, prosedur transformasi variabel dalam penelitian ini dirancang melalui enam tahapan logis sebagai berikut:

1. **Tahap I (Transformasi Normal Baku ke Chi-Square):** Menggunakan teknik transformasi variabel tunggal (*univariat*) non-linear dengan mengkuadratkan variabel acak Normal Baku ($Z^2$) untuk menghasilkan distribusi Chi-Square dengan derajat kebebasan $v = 1$.
2. **Tahap II (Transformasi Chi-Square ke Gamma):** Melakukan rekonseptualisasi parameter bentuk dan skala ($\alpha = \frac{v}{2}$ dan $\beta = 2$) untuk

membuktikan bahwa Chi-Square merupakan bagian terikat dari keluarga besar distribusi Gamma.

3. **Tahap III (Transformasi Gamma ke Beta):** Menggunakan teknik transformasi bivariat simultan melalui perkalian matriks Jacobian terhadap dua variabel acak Gamma yang independen untuk memunculkan struktur marginal distribusi Beta.
4. **Tahap IV (Transformasi Beta ke F-Snedecor):** Menerapkan transformasi rasio inversi monoton pada fungsi Beta guna memetakan karakteristik parameter pembilang dan penyebut pada distribusi F.
5. **Tahap V (Transformasi F-Snedecor ke t-Student):** Menurunkan fungsi pembuktian melalui relasi akar kuadrat variabel acak guna mengaitkan distribusi F(1,nu) dengan distribusi t-Student.
6. **Tahap VI (Penutupan Siklus: Transformasi t-Student ke Normal Baku):** Menggunakan operasi limit asimtotik untuk derajat kebebasan mendekati tak hingga ($v \to \infty$) sehingga membuktikan konvergensi kembali ke fungsi hulu (Normal Baku).

Alat analisis utama yang digunakan untuk mengeksekusi keenam tahapan di atas meliputi beberapa teorema.

**Perubahan Variabel Univariat (Metode Jacobian 1-D)**

**Teorema 1.** Misalkan variabel acak kontinu $X$ memiliki fungsi padat peluang (*pdf*) $f_X(x)$ pada ruang sampel $\mathcal{A}$. Jika terdapat fungsi transformasi $Y = u(x)$ yang monoton murni dan terdiferensial dari $\mathcal{A}$ ke $\mathcal{B}$ dengan fungsi invers $x = w(y)$, maka *pdf* dari variabel acak $Y$ pada ruang sampel $\mathcal{B}$ ditentukan oleh:
$f_Y(y) = f_X\big(w(y)\big)|w'(y)|$ dimana $w'(y) = \frac{dx}{dy}$ adalah turunan pertama fungsi invers terhadap $y$.

Teorema Perubahan Variabel Univariat, sering dikenal sebagai Metode Jacobian Satu Dimensi (1-D), digunakan untuk menentukan fungsi padat peluang (PDF) baru dari suatu variabel acak hasil transformasi monotonik. Inti dari teorema ini terletak pada pelestarian nilai probabilitas (preservasi massa peluang) pada ruang sampel yang ditransformasikan. Agar transformasi ini valid, fungsi $Y = u(x)$ harus memenuhi syarat monoton murni (selalu naik atau selalu turun) dan terdiferensialkan.

**Transformasi Jacobian Bivariat**

**Teorema 2.** Misalkan $X_1$ dan $X_2$ adalah variabel acak kontinu dengan fungsi padat peluang (pdf) gabungan $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ pada ruang sampel $\mathcal{A}$. Misalkan pula transformasi $Y_1 = u_1(x_1,x_2)$ dan $Y_2 = u_2(x_1,x_2)$ merupakan pemetaan satu-satu (*one-to-one mapping*) dari $\mathcal{A}$ ke ruang sampel $\mathcal{B}$, dengan fungsi inversi $x_1 = w_1(y_1,y_2)$dan $x_2 = w_2(y_1,y_2)$ yang memiliki turunan parsial kontinu. Maka, pdf gabungan dari $Y_1$ dan $Y_2$ pada ruang sampel $\mathcal{B}$ ditentukan oleh:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}\left(w_1(y_1,y_2), w_2(y_1,y_2)\right)|J|$$

dengan $|J|$ adalah nilai mutlak determinan dari matriks Jacobian $J$, yaitu

$$|J| = \left| det\left( \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial y_1} & \frac{\partial w_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial w_2}{\partial y_1} & \frac{\partial w_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \right) \right|.$$

Teorema Transformasi Jacobian Bivariat ini merupakan perluasan dari metode univariat yang digunakan untuk menentukan fungsi padat peluang (PDF) gabungan dari dua variabel acak baru ($Y_1$ dan $Y_2$) yang terbentuk dari interaksi simultan dua variabel acak asal ($X_1$dan $X_2$)

**Fungsi Densitas Peluang Marginal**

**Teorema 3.** Misalkan $Y_1$ dan $Y_2$ adalah dua variabel acak kontinu bersama yang memiliki fungsi densitas peluang (*pdf*) bersama $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ yang terdefinisi pada ruang sampel $\mathcal{B}$.

Fungsi densitas peluang marginal dari $Y_1$, yang dinotasikan dengan $f_{Y_1}(y_1)$, diperoleh dengan mengintegrasikan *pdf* bersama tersebut terhadap variabel acak $Y_2$ pada seluruh batas domainnya (integral batas total): $f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)d\,y_2$.

Teorema Fungsi Densitas Peluang Marginal merupakan instrumen fundamental dalam analisis multivariat yang digunakan untuk mengisolasi perilaku probabilistik dari suatu variabel acak tunggal dari dalam variabel acak gabungan.

**Teorema Limit Euler**

**Teorema 4.** Jika $x$ adalah suatu konstanta riil, maka limit asimtotik dari bentuk $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ untuk $n$ menuju tak hingga ditentukan oleh: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Teorema ini menyatakan bahwa ketika basis fraksional $\left(1+\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}\right)$ diekspon ensialkan dengan variabel $n$, maka seiring bergeraknya $n$ menuju tak hingga, bentuk tersebut tidak lagi tumbuh secara tak terbatas, melainkan berkonvergensi secara rigid ke sebuah nilai limit yang stabil, yaitu $e^x$.

**Aproksimasi Stirling:**

**Teorema 5.** Untuk nilai $y$ yang sangat besar ( $y \to \infty$), Fungsi Gamma dari $y+1$ (atau bentuk Faktorial $y!$) secara asimtotik ekivalen dengan bentuk perkalian eksponensial berikut: $\Gamma(y+1) \approx \sqrt{2\pi y}\left(\frac{y}{e}\right)^y$ atau $\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(y+a)}{\Gamma(y)y^a} = 1$.

Secara komputasi dan analitis, menghitung nilai faktorial atau fungsi Gamma pada skala besar sering kali memicu kendala *overflow* atau menghasilkan bentuk integral tak wajar yang tidak dapat diselesaikan secara langsung. Teorema ini menyederhanakan kompleksitas tersebut dengan mengganti fungsi Gamma ke

dalam kombinasi fungsi aljabar elementer berupa perkalian fungsi pangkat, eksponensial, dan akar kuadrat $\sqrt{2\pi}$.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari tahap-tahap yang telah diuraikan dijabarkan sebelumnya, selanjutnya akan dibuktikan tahap-tahap analitis proses pembuktian Tahap I sampai dengan Tahap VI.

### Derivasi Distribusi Chi-Square dari Normal Baku ($\mathbf{Z \rightarrow \chi^2}$) (Tahap I)

**Teorema 6**. Misalkan diketahui variabel acak $Z \sim N(0,1)$. Jika didefinisikan variabel acak baru $U = Z^2$, maka $U$ berdistribusi Chi-Square dengan derajat kebebasan $\upsilon = 1$, atau $U \sim \chi^2(1)$. Untuk pembuktian $\upsilon > 1$, dapat digunakan *Moment Generating Function* (MGF), yang langkah-langkahnya juga diberikan dalam bagian ini.

**Bukti**

Diberikan fungsi transformasi variabel acak $U = Z^2$. Fungsi ini tidak monoton murni pada seluruh ruang sampel $S_U = (-\infty, \infty)$, sehingga pembuktian dilakukan dengan membagi wilayah menjadi dua bagian monoton atau menggunakan pendekatan Fungsi Distribusi Kumulatif (CDF):

$$F_U(u) = P(Z^2 \leq u) = P\left(-\sqrt{u} \leq Z \leq \sqrt{u}\right) \tag{1}$$

Diketahui Distribusi Normal Baku bersifat simetris di sekitar nol, persamaan (1) dapat ditulis sebagai:

$$F_U(u) = \int_0^{\sqrt{u}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \tag{2}$$

Untuk mendapatkan fungsi padat peluang (pdf) $f_V(u)$, lakukan diferensiasi terhadap $u$ menggunakan Aturan Leibniz, yaitu:

$$f_U(u) = \frac{d}{du}[F_U(u)] = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u} . \frac{d}{dv}\left(\sqrt{u}\right) \tag{3}$$

$$f_U(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u} . \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{-1/2} e^{-\frac{u}{2}} . \tag{4}$$

Selanjutnya disubstitusi nilai konstanta $\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$, sehingga persamaan (3) dan (4) dapat ditulis sebagai:

$$f_U(v) = \frac{1}{2^{1/2}\sqrt{2\pi}} u^{(1/2)-1} e^{-\frac{u}{2}} . \tag{5}$$

Persamaan (5) sesuai dengan pdf distribusi $U \sim \chi^2(1)$, yang merupakan bentuk khusus untuk $\upsilon = 1$ dari $f_U(u;v) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} u^{(v/2)-1} e^{-\frac{u}{2}}$. Untuk pembuktian $\upsilon > 1$, misalkan $\upsilon = k$, dengan $k$ suatu bilangan bulat positif akan

digunakan *Moment Generating Function* (MGF) (Hogg *et al*., 2019). Dalam hal ini, jika $Z_1, Z_2, Z_3 \dots Z_k$ berdistribusi independen dan identik $N(0,1)$, maka $X = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \backsim \chi^2(k)$.

Yang pertama adalah MGF untuk satu variabel acak kuadrat distribusi normal baku. Untuk $Z \backsim N(0,1)$ maka dapat dicari MGF dari $U = Z^2$adalah

$$M_U(t) = E\left(e^{tz^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{1}{2}-t)z^2}\, dz$$

Dengan integral Gaussian Standar: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2}\, dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ untuk $a > 0$, maka dengan mengambil $a = \frac{1}{2} - t$, diperoleh $M_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}-t}} = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = (1-2t)^{-1/2}$, untuk $\frac{1}{2} > t$. Dengan kata lain diperoleh $U \backsim \chi^2(1)$.

Kedua adalah MGF untuk k variabel acak kuadrat distribusi normal baku. Untuk $Z_1, Z_2, Z_3 \dots Z_k$ berdistribusi independen dan identik $N(0,1)$, akan dicari MGF $X = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$. Karena $Z_i^2$ independen , maka jumlahnya adalah hasil perkalian MGF masing-masing, sehingga:

$$M_X(t) = \prod_{i=1}^{k} M_{Z_i^2}(t) = (1-2t)^{-k/2}, \frac{1}{2} > t$$

Hasil di atas merupakan MGF dist $\chi^2(k)$ atau $Gamma\left(\frac{k}{2}, 2\right)$ yang adalah $M_{\chi^2(k)}(t) = (1-2t)^{-k/2}$, $\frac{1}{2} > t$. Karena MGF menentukan distribusi unik, sehingga didapat $\sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \backsim \chi^2(k)$.

**Rekonseptualisasi Chi-Square ke dalam Keluarga Gamma ($\chi^2 \rightarrow$ Gamma) (Tahap II)**

**Teorema 7**. Jika $V \backsim \chi^2(v)$ , maka $V$ secara ekivalen merupakan variabel acak yang berdistribusi Gamma dengan parameter bentuk $\alpha = v/2$ dan parameter skala $\beta = 2$.

**Bukti**

Perhatikan pdf distribusi Gamma standar dengan parameter parameter bentuk $\alpha > 0$ dan parameter skala $\beta > 0$:

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}. \quad (6)$$

Dengan melakukan substitusi nilai $\alpha = \frac{v}{2}$ dan $\beta = 2$ secara langsung ke dalam persamaan (6) , diperoleh:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{v/2-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad (7)$$

Secara matematis terbukti bahwa distribusi Chi-Square dengan derajat kebebasan $v$ adalah bentuk khusus (*special case*) dari distribusi Gamma dengan parameter bentuk $\alpha = v/2$ dan parameter skala $\beta = 2$. Hubungan ini menegaskan bahwa Chi-Square merupakan *subset* geometris dan struktural di dalam rumpun besar distribusi Gamma.

**Penurunan Distribusi Beta dari Rumpun Gamma (Gamma →B ) (Tahap III)**

**Teorema 7**. Misalkan $X_1 \sim Gamma(\alpha_1, 1)$ dan $X_2 \sim Gamma(\alpha_2, 1)$ adalah dua variabel acak independen. Jika didefinisikan $Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ dan $Y_2 = X_1 + X_2$, maka fungsi marginal dari $Y_1$ akan berdistribusi Beta dengan parameter $\alpha_1$ dan $\alpha_2$.

**Bukti**

Karena $X_1$ dan $X_2$ independen, maka pdf gabungannya adalah

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} {x_1}^{\alpha_1-1} {x_2}^{\alpha_2-1} e^{-(x_1+x_2)} \text{ untuk } x_1, x_2 > 0. \quad (8)$$

Inversi fungsi transformasi untuk mendapatkan $x_1$ dan $x_2$ adalah $x_1 = y_1 y_2$ dan $x_2 = y_2 (1 - y_1)$. Matriks Jacobian ($J$) dari fungsi inversi tersebut dinyatakan

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ -y_2 & 1 - y_1 \end{vmatrix} = y_2 (1 - y_1) - (-y_2 y_1) = y_2 .$$

Untuk $x_1$, $x_2$ dan $|J|$ disubstitusi ke dalam pdf gabungan baru $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(y_1 y_2, y_2 (1 - y_1))|J|$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} {y_1}^{\alpha_1-1}(1 - y_1)^{\alpha_2-1}\right]\left[{y_2}^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-(y_2)}\right].$$

Untuk mendapatkan pdf marginal $f_{Y_1}(y_1)$, integrasi $f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ terhadap $y_2$ pada batas $(0, \infty)$:

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{{y_1}^{\alpha_1-1}(1 - y_1)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^\infty {y_2}^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-(y_2)} dy_2 . \quad (9)$$

Nilai integral di atas menghasilkan fungsi komponen $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)$. Berdasarkan definisi fungsi Beta $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ diperoleh hasil akhir:

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} {y_1}^{\alpha_1-1}(1 - y_1)^{\alpha_2-1} \text{ , untuk } 0 < y_1 < 1. \quad (10)$$

Persamaan (10) ini terbukti merupakan pdf dari Distribusi $B(\alpha_1, \alpha_2)$.

**Transformasi dari Distribusi Beta ke F (B → F) (Tahap IV)**

**Teorema 8**. Jika variabel acak $B \sim Beta\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right)$ ,maka variabel acak $F = \frac{v_2 B}{v_1(1-B)}$ berdistribusi $F$ dengan derajat kebebasan pembilang $v_1$ dan derajat kebebasan penyebut $v_2$.

**Bukti**

Diberikan, variabel acak:

$$F = \frac{v_2 B}{v_1(1-B)} \tag{11}$$

Fungsi inversi dari persamaan (10) dinyatakan sebagai:

$B = \frac{v_1 F}{v_2 + v_1 F}$ dan $1 - B = \frac{v_2}{v_2 + v_1 F}$.

Turunan pertama (Jacobian univariat) dari B terhadap F adalah:

$$|J| = \frac{dB}{dF} = \frac{v_1(v_2 + v_1 F) - (\ v_1 F)\, v_1}{(v_2 + v_1 F)^2} = \frac{v_1 v_2}{(v_2 + v_1 F)^2},$$

Kemudian komponen $B$ dan $\frac{dB}{dF}$ disubstitusi ke dalam pdf distribusi Beta:

$f_F(f) = f_B(b).|J|$

$$f_F(f) = \frac{1}{B\left(\frac{v_1}{2},\frac{v_2}{2}\right)} \left(\frac{v_1 f}{v_2 + v_1 f}\right)^{\frac{v_1}{2}-1} \left(\frac{v_2}{v_2 + v_1 f}\right)^{\frac{v_2}{2}-1} \cdot \frac{v_1 v_2}{(v_2 + v_1 f)^2}.$$

Melalui penyederhanaan aljabar pada suku-suku penyebut, sehingga diperoleh struktur formal pdf distribusi $F$ berikut.

$$f_F(f) = \frac{1}{B\left(\frac{v_1}{2},\frac{v_2}{2}\right)} \cdot \frac{{v_1}^{\frac{v_1}{2}-1+1} \cdot {v_2}^{\frac{v_2}{2}-1+1} \cdot f^{\frac{v_1}{2}-1}}{(v_2 + v_1 f)^{\left(\frac{v_1}{2}-1\right)+\left(\frac{v_2}{2}-1\right)+2}}$$

$$f_F(f) = \frac{{v_1}^{\frac{v_1}{2}} \cdot {v_2}^{\frac{v_2}{2}}}{B\left(\frac{v_1}{2},\frac{v_2}{2}\right)} \cdot \frac{f^{\frac{v_1}{2}-1}}{(v_2 + v_1 f)^{\left(\frac{v_1}{2}-1\right)+\left(\frac{v_2}{2}-1\right)+2}}. \tag{12}$$

Bentuk fungsional (11) identik secara mutlak dengan struktur pdf dari distribusi F dengan derajat kebebasan pembilang $v_1$ dan derajat kebebasan penyebut $v_2$.

**Hubungan Distribusi F ke t (F → t) (Tahap V)**

**Teorema 9**. Jika sebuah variabel acak $T \sim t(v)$, maka variabel acak $F = T^2$ akan berdistribusi *F* dengan derajat kebebasan pembilang $v_1 = 1$ dan derajat kebebasan penyebut $v_2 = v$.

**Bukti**

Bukti ini menggunakan metode transformasi univariat kuadrat untuk fungsi non-monoton simetris. Pdf dari $F = T^2$ dinyatakan oleh:

$$f_F(f) = \frac{1}{2\sqrt{f}}\left[f_T\left(\sqrt{f}\right) + f_T\left(-\sqrt{f}\right)\right] \tag{13}$$

Pdf dari distribusi t-Student bersifat simetris sempurna di sekitar nol, sehingga $f_T(t) = f_T(-t)$ , maka persamaan (13) dapat disederhanakan menjadi:

$$f_F(f) = \frac{1}{2\sqrt{f}}\left[2f_T\left(\sqrt{f}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{f}}\left[f_T\left(\sqrt{f}\right)\right] \quad (14)$$

Substitusikan pdf dari distribusi t-Student $f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$ ke dalam persamaan (14), diperoleh: $f_F(f) = \frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{\left(\sqrt{f}\right)^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$ yang ekuivalen dengan $f_F(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{v}{2}\right)}\left(\frac{1}{v}\right)^{1/2}\frac{f^{\frac{1}{2}-1}}{\left(1+\frac{1}{v}f\right)^{\frac{1+v}{2}}}$. Bentuk $f_F(f)$ ini sama dengan distribusi F dengan derajat kebebasan $d_1, d_2$ yang berbentuk: $f_X(x) = \frac{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{d_1}{2}}}{B\left(\frac{d_1}{2},\frac{d_2}{2}\right)}\frac{x^{\frac{d_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{d_1}{d_2}x\right)^{\frac{d_1+d_2}{2}}}$ dengan substitusi $d_1 = 1$ dan $d_2 = v$.

Dengan demikian, terbukti secara matematis, jika $T \sim t(v)$ maka $T^2 \sim F(1, v)$

**Penutupan Siklus Asimtotik (t → Normal Baku) (Tahap VI)**

**Teorema 10**. Misalkan $T$ adalah variabel acak berdistribusi t-Student dengan derajat kebebasan $v$. Ketika nilai $v$ bergerak mendekati tak hingga $(v \to \infty)$, fungsi padat peluang dari $T$ secara asimtotik konvergen menjadi fungsi padat peluang distribusi Normal Baku $N(0,1)$.

**Bukti**

Distribusi t berbentuk: $f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$, selanjutnya $\lim_{v\to\infty} f_T(t) = \left[\lim_{v\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\right]\left[\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}\right]$ dievaluasi bagian suku kedua terlebih dahulu menggunakan definisi limit Euler $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, yaitu $\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} = \lim_{v\to\infty}\left[\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^v\right]^{-\frac{1}{2}.\frac{v+1}{v}}$. Untuk bagian dalam kurung siku: $\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^v = e^{t^2}$ dan bagian pangkat luar $\lim_{v\to\infty}\left(-\frac{1}{2}.\frac{v+1}{v}\right) = -\frac{1}{2}$, kedua hasil di atas digabungkan, maka diperoleh

$$\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} = \left(e^{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (15)$$

Selanjutnya, dievaluasi bagian suku pertama (rasio fungsi Gamma) yaitu bentuk $\lim_{v\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$ menggunakan pendekatan Stirling untuk nilai besar: $\Gamma(z+$

1) $\approx \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^{z}$. Untuk pendekatan pembilang $\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{v+1}{2}}}\left(\frac{\frac{v+1}{2}}{e}\right)^{\frac{v+1}{2}} = \sqrt{\frac{4\pi}{v+1}}\left(\frac{v+1}{2e}\right)^{\frac{v+1}{2}}$ dan untuk pendekatan penyebut $\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{v}{2}}}\left(\frac{\frac{v}{2}}{e}\right)^{\frac{v+1}{2}} = \sqrt{\frac{4\pi}{v}}\left(\frac{v}{2e}\right)^{\frac{v}{2}}$. Dilakukan substitusi pada suku pertama sebagai berikut:

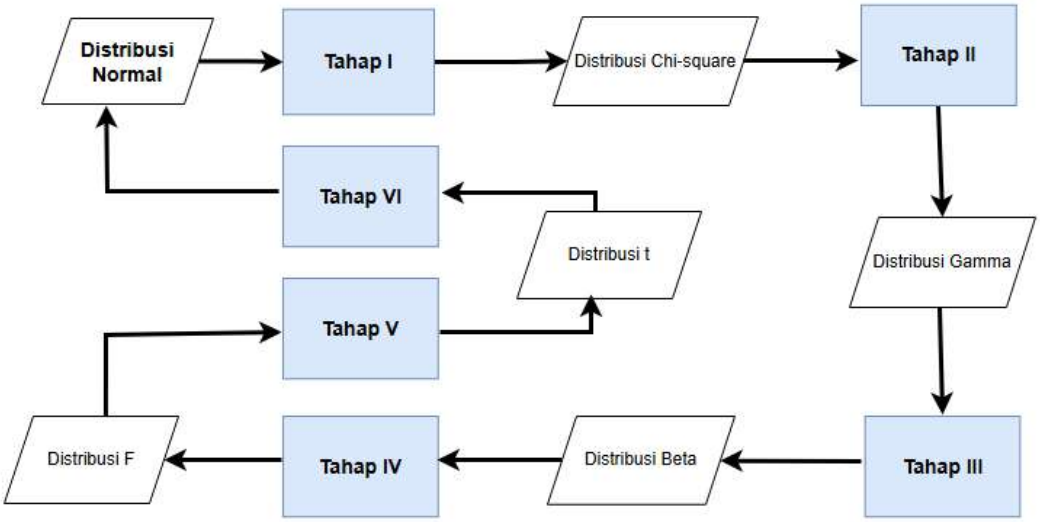
$$\lim_{v\to\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} = \lim_{v\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{4\pi}{v+1}}\left(\frac{v+1}{2e}\right)^{\frac{v+1}{2}}}{\sqrt{v\pi}\sqrt{\frac{4\pi}{v}}\left(\frac{v}{2e}\right)^{\frac{v}{2}}} = \frac{1}{2\pi}. \tag{16}$$

Dari gabungan hasil kedua limit, Persamaan (15) dan (16) , didapat:

$$\lim_{v\to\infty} f_T(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{17}$$

Persamaan (17) merupakan rumus mutlak dari fungsi padat peluang distribusi Normal Baku ($Z$). Pembuktian ini menutup rantai transformasi menjadi sebuah siklus genealogi yang sirkular sempurna.

Adapun rangkuman bagan siklus tahap proses pembuktian analitisnya dapat dilihat pada Gambar 2.




**Gambar 2**. Bagan Siklus Tertutup Jalur Transformasi Tiap Distribusi

## KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil menyatukan jalur transformasi variabel dari enam distribusi probabilitas kontinu utama (Z, $\chi^2$, Gamma, Beta, F, dan t) menggunakan teknik Jacobian multitahap untuk membuktikan silsilah antar-distribusi secara terpadu. Berawal dari distribusi Normal Baku (Z) sebagai fondasi yang membentuk distribusi Chi-Square melalui transformasi kuadrat, interkoneksi ini berlanjut ke

dalam keluarga distribusi Gamma dan Beta, hingga akhirnya membentuk struktur rasio pada distribusi F dan t. Berbeda dengan pandangan linier konvensional, penelitian ini secara eksplisit membuktikan sifat siklis (sirkular) dalam sistem tersebut; melalui pembuktian limit asimtotik saat derajat kebebasan mendekati tak hingga $\upsilon \to \infty$), fungsi padat peluang distribusi t-Student terbukti konvergen kembali menjadi distribusi Normal Baku ($Z$), sehingga resmi menutup rumpun distribusi ini menjadi sebuah siklus teoretis yang utuh.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Penghargaan tulus penulis sampaikan kepada Prodi Informatika, Fakultas Teknologi Informasi, Universitas Kristen Duta Wacana atas bantuan finansial dan kepercayaan yang diberikan. Dukungan ini memungkinkan penulis untuk mendalami keterhubungan antar-distribusi statistik secara komprehensif hingga selesainya penelitian ini.

## REFERENSI

Abidoye, A. O., Jolayemi, E. T., Sanni, O. O. M., & Oyejola, B. A. (2015). On application of Modified F-Statistic: An example of Sales Distribution of Pharmaceutical Drugs. *International Journal of Statistics and Applications*, *5*(2), 68–71. https://doi.org/10.5923/j.statistics.20150502.03

Afrianda, V., Rijaya, C., Sihombing, F., & Mardhotillah, B. (2024). Penerapan Uji Chi-Square untuk Menganalisis Pengaruh Gender pada Pilihan Program Studi Tahun 2024. *Multi Proximity: Jurnal Statistika Universitas Jambi*, *3*(1), 53–60. https://doi.org/https://doi.org/10.22437/multiproximity.v3i1.40645

Akinyemi, E. K., Ogunsola, O. A., & Oyinbodunmi, B. O. (2022). The F-Distribution with Applications to Number of Female Patients with Cancer. *Asian Journal of Probability and Statistics*, *16*(2), 10–14. https://doi.org/10.9734/ajpas/2022/v16i230397

Ali, H., Akanihu, C. ., & Felix, J. (2023). Investigating the Parameters of the Beta Distribution. *World Journal of Advanced Research and Reviews*, *19*(1), 815–830. https://doi.org/10.30574/wjarr.2023.19.1.1409

Brereton, R. G. (2015). The t-distribution and Its Relationship to the Normal Distribution. *Journal of Chemometrics*, *29*(9), 481–483. https://doi.org/10.1002/cem.2713

Casella, G., & Berger, R. L. (2024). *Statistical Inference* (Second, Vol. 2). CRC Press Taylor & Francis Group.

Gedeon, Rinsaghi, Y., Tantri, & Parhusip, J. (2024). Analisis Distribusi Frekuensi dan Uji Chi-Square pada Laju Pertumbuhan Penduduk dan Kepadatan Penduduk di Provinsi Kalimantan Tengah, 2023. *Router: Jurnal Teknik Informatika Dan Terapan*, *2*(4), 197–206. https://doi.org/https://doi.org/10.62951/router.v2i4.328

Heryaninda, A. A., Hainiyah, D., Zhahra, A. L., Putri, C., & Anam, H. I. K. (2023). Survei Hubungan Asosiasi antara UKT (Uang Kuliah Tunggal) Mahasiswa Universitas Sultan Ageng Tirtayasa Angkatan 2022 terhadap Tingkat Kepuasan Fasilitas Kampus. *Nusantara Journal of Multidisciplinary Science*,

*1*(3), 569–577.

Hogg, R. V., McKean, J. W., & Craig, A. T. (2019). *Introduction to Mathematical Statistics* (Eighth Edi). Pearson.

Isnaini, M., Afgani, M. W., Haqqi, A., & Azhari, I. (2025). Teknik Analisis Data Uji Normalitas. *J-CEKI : Jurnal Cendekia Ilmiah*, *4*(2), 1377–1384. https://doi.org/https://doi.org/10.56799/jceki.v4i2.7007

Magdalena, R., & Krisanti, M. A. (2019). Analisis Penyebab dan Solusi Rekonsiliasi Finished Goods Menggunakan Hipotesis Statistik dengan Metode Pengujian Independent Sample T-Test di PT. Merck, Tbk. *Jurnal TEKNO (Civil Engineering, Electrical Engineering and Industrial Engineering)*, *16*(1), 35–48. https://doi.org/10.33557/jtekno.v16i1.623

Maity, M., & Saha, P. (2023). Normal distribution. *International Journal of Science and Research (IJSR)*, *12*(12), 298–299. https://doi.org/10.1136/bmj.b646

Puger, I. G. N. (2020). Teorema Chebychev dan Penyebaran Data pada Kurve Normal: Suatu Kajian Statistik Parametrik. *DAIWI WIDYA Jurnal Pendidikan*, *07*(1), 1–17.

Ramadhan, Z. M., Kaharap, B. A., & Parhusip, J. (2025). Analisis Distribusi Khi Kuadrat dalam Penelitian Statistik. *Journal of Multidisciplinary Inquiry in Science (Journal MISTER)*, *2*(1), 922–927. https://doi.org/https://doi.org/10.32672/mister.v2i1.2587

Ramlan, A. M., & Irmasari. (2024). Pembelajaran Distribusi Gamma dalam Masalah Biomedis: Tinjauan pada Pengaruh Dosis Beracun pada Tikus. *Journal of Research in Science and Mathematics Education (J-RSME)*, *3*(2), 111–119. https://doi.org/https://doi.org/10.56855/jrsme.v3i2.1069

Sari, R. P., Dacholfany, M. I., Khushk, A., & Dewi, W. U. (2025). Simulation and Analysis of Gamma Distribution in Assessing Delay Rate Completion of the Curriculum in Schools. *Sciencestatistics: Journal of Statistics, Probability, and Its Application*, *3*(1), 55–62. https://doi.org/10.24127/sciencestatistics.v3i1.8158

Suanda, E. D. (2023). Estimasi Maksimum Likelihood untuk Parameter dalam Model Regresi Beta. *Jurnal Matematika Komputasi Dan Statistika*, *3*(2), 388–397. https://doi.org/10.33772/jmks.v3i2.44

Tarigan, C. P., Fajriansyah, G. N., Simatupang, S. W., & Parhusip, J. (2025). Analisis Penerapan Distribusi T-Student dalam Pengolahan Data Kecil untuk Analitik dengan Sistem Informatika. *JATI (Jurnal Mahasiswa Teknik Informatika)*, *9*(1), 592–597.

Valentine, V., Septiani, C. S., & Mulyono, M. R. (2024). Penerapan Kurva Normal dalam Analisis Nilai Ujian Akhir Siswa Propinsi Kalimantan Tengah. *Informatech: Jurnal Ilmiah Informatika dan Komputer*, *1*(2), 157–162. https://pdfs.semanticscholar.org/fa32/230f309d61c5039b8653656cf3dd96c489b1.pdf

Walck, C. (2017). Hand-book on Statistical Distributions for Experimentalists. In *Hospitals*. Particle Physics Group Fysikum University of Stockholm.

Warella, R. Y., Wattimanela, H. J., & Ilwaru, V. Y. I. (2021). Sifat-Sifat dan Kejadian Khusus Distribusi Gamma. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, *15*(1), 047–058. https://doi.org/https://doi.org/10.30598/barekengvol15iss1pp047-058