Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 1-9

SIFAT TURUNAN PADA ALJABAR LIE AFFINE BERDIMENSI 6

Edi Kurniadi

[1]*Departement Matematika FMIPA Unpad*
Jl.Raya Bandung-Simedang Km.21 Jatinangor Sumedang 45361 Jawa Barat,Indonesia
email *: edi.kurniadi@unpad.ac.id*

ABSTRACT

In this paper we study that any derivation of affine Lie algebra of dimension 6, denoted by aff(2), is inner. We give another approach to prove it by direct computations of transformation matrix of derivation of aff(2). We show that transformation matrix for the derivation of any element in aff(2) equals to transformation matrix of adjoint representation of its element. Furthermore, we give an alternative to prove that aff(2) is Frobenius Lie algebra.

Keywords :Affine Lie algebra, Derivation of a Lie algebra, Frobenius Lie algebra

ABSTRAK

Dalam artikel ini, ditunjukkan bahwa sembarang turunan pada aljabar Lie affine berdimensi 6, dinotasikan dengan aff(2), adalah *inner*. Pembuktian tersebut didapat dengan cara menghitung langsung matriks transformasi dari turunan aff(2). Dalam hal ini, dibuktikan bahwa matriks transformasi dari turunan sembarang unsur di aff(2) sama dengan matriks transformasi representasi *adjoint* dari unsur tersebut. Lebih jauh, diberikan juga pendekatan yang berbeda untuk membuktikan bahwa aff(2) adalah aljabar Lie Frobenius.

***Kata kunci:** Aljabar Lie affine, aljabar Lie Frobenius, Turunan aljabar Lie.*

1. PENDAHULUAN

Dalam artikel ini aljabar Lie affine yang dimaksud adalah aljabar Lie affine atas lapangan real $\mathbb{R}$. Aljabar Lie affine berdimensi $n(n+1)$, dinotasikan oleh $\mathrm{aff}(n)$, adalah kasus khusus dari hasil kali semi langsung aljabar Lie $\mathfrak{g} \coloneqq M_{n,p} \rtimes \mathfrak{g}l_n(\mathbb{R})$ yaitu untuk $p = 1$ (lihat [1]). Dalam hal ini, $M_{n,p}$ adalah ruang matriks berukuran $n \times p$ dan $\mathfrak{g}l_n(\mathbb{R})$ adalah aljabar Lie matriks real berukuran $n \times n$. Perhatikan bahwa untuk $p = 1$, $M_{n,p} = M_{n,1}$ isomorfik dengan $\mathbb{R}^n$. Akibatnya untuk $n = 1$ diperoleh $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n \rtimes \mathfrak{g}l_n(\mathbb{R}) =: \mathrm{aff}(n)$. Untuk kasus $n = 2$, aljabar Lie $\mathfrak{g}$ tiada lain adalah aljabar Lie $\mathrm{aff}(2)$ berdimensi 6. Jadi, $\mathrm{aff}(2)$ dapat ditulis sebagai hasil kali semi langsung antara $\mathbb{R}^2$ dengan $\mathfrak{g}l_2(\mathbb{R})$ dan dinotasikan oleh $\mathrm{aff}(2) := \mathbb{R}^2 \rtimes \mathfrak{g}l_2(\mathbb{R})$.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 1-9

Aljabar Lie affine $\mathrm{aff}(2)$ adalah ruang *tangent* dari grup automorfisma *affine* $\mathrm{Aff}(2) \coloneqq \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Kajian tentang $\mathrm{Aff}(2)$ dan juga aljabar Lie-nya telah banyak dilakukan. Misalnya [2] telah mengklasifikasikan dimensi orbit $\mathrm{Aff}(2)$ untuk kasus sistem diferensial kuadratik. Di sisi lain penelitian untuk kasus $n = 1$ yaitu $\mathrm{aff}(1) \coloneqq \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+$ telah menjadi model yang bagus untuk mempelajari *square-integrable representations* (lihat [3], [4], dan [5]).

Fakta tentang turunan dari $\mathrm{aff}(n)$ adalah *inner* telah diperoleh dalam hasil penelitian [6]. Meskipun demikian, dalam artikel ini akan dibuktikan turunan dari $\mathrm{aff}(2)$ adalah *inner* dengan cara yang berbeda dari hasil [6]. Pembuktian dilakukan dengan cara menghitung langsung matriks transformasinya kemudian dibuktikan bahwa matriks transformasi turunan setiap unsur di $\mathrm{aff}(2)$ sama dengan matriks transformasi dari representasi *adjoint* unsur yang berkorespondensi.

Dalam [7] disebutkan aljabar Lie $\mathrm{aff}(2)$ adalah *nonsolvable* dan $\mathrm{aff}(2)$ dapat dikonstruksi dari split torus $\mathcal{F} = \langle f \rangle$ dengan $f = \mathrm{diag}\{0,0,0,1,1\}$ sehingga $\mathrm{aff}(2)$ dapat ditulis menjadi $\mathrm{aff}(2) := \mathbb{R}^2 \rtimes (sl_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{F})$ dengan $sl_2(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{g}l_2(\mathbb{R})$. adalah ruang matriks real 2×2 dengan *trace* nol. Selain itu, $\mathrm{aff}(2)$ adalah aljabar Lie Frobenius (lihat [1] dan [7]). Berbeda dengan hasil sebelumnya, dalam artikel ini akan diberikan pendekatan yang berbeda untuk membuktikan bahwa $\mathrm{aff}(2)$ adalah aljabar Lie Frobenius.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Beberapa notasi tentang turunan aljabar Lie, representasi *adjoint* aljabar Lie, aljabar Lie affine $\mathrm{aff}(2)$, dan aljabar Lie Frobenius akan dibahas sekilas.

Definisi 1[8]. *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *aljabar Lie yang bracket-nya adalah* $[,]$. *Pemetaan linear* $\mathfrak{I} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *dikatakan turunan dari* $\mathfrak{g}$ *jika untuk setiap* $x, y \in \mathfrak{g}$ *berlaku*

$$\mathfrak{I}([x, y]) = [\mathfrak{I}(x), y] + [x, \mathfrak{I}(y)]. \tag{1}$$

Himpunan semua turunan dari $\mathfrak{g}$ *dinotasikan dengan* $T(\mathfrak{I})$, *yaitu*

$$T(\mathfrak{I}) \coloneqq \{\mathfrak{I} \quad ; \mathfrak{I} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \text{ adalah turunan } \mathfrak{g}\}. \tag{2}$$

Definisi 2 [8]. *Pemetaan* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ *yang didefinisikan oleh*

$$\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{g} \ni y \mapsto \mathrm{ad}\, x(y) \coloneqq [x, y] \in \mathfrak{g}. \tag{3}$$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 1-9

disebut representasi adjoint dan Persamaan (3) *disebut turunan inner. Himpunan semua turunan inner dinotasikan oleh* $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$. *Dengan kata lain , turunan* $\mathfrak{J}$ *dikatakan inner jika* $T(\mathfrak{J}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$.

Definisi 3 [8]**.** *Skalar real* a_{ij}^k *disebut konstanta struktur dari suatu aljabar Lie* $\mathfrak{g}$ *terhadap basis* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *jika persamaan berikut ini dipenuhi*

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_k. \qquad (4)$$

Proposisi 4[9]**.** *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *aljabar Lie dengan basis* $\{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ *dan misalkan pula* a_{ij}^k *konstanta strukturnya. Misalkan* $[\mu_{ij}]^T$ *matriks transformasi untuk pemetaan linear* $\mathfrak{J} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *dengan* $[\mu_{ij}]^T$ *transpos* $[\mu_{ij}]$. $\mathfrak{J}$ *turunan dari* $\mathfrak{g}$ *jika dan hanya jika*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \mu_{kp} = \sum_{k=1}^{n} (\mu_{ik} a_{kj}^p + \mu_{jk} a_{ik}^p). \qquad (5)$$

dengan $1 \le i, j, p \le n$.

Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie berdimensi n dengan ruang dualnya $\mathfrak{g}^*$ dan hubungan keduanya diberikan oleh

$$\langle f, s \rangle := f(s), f \in \mathfrak{g}^*, s \in \mathfrak{g}. \qquad (6)$$

Definisi 5 [10]**.** *Aljabar Lie* $\mathfrak{g}$ *dengan basis* $\{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ *dikatakan Frobenius jika terdapat fungsional linear* $f \in \mathfrak{g}^*$ *sedemikian sehingga determinan matriks yang entri-entrinya diberikan oleh* $\langle f, [s_i, s_j] \rangle \coloneqq f([s_i, s_j])$ *tidak sama dengan nol.*

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dengan fokus kajian pada paper [6]. Dengan menghitung matriks transformasi dari turunan $\mathfrak{J}$ dari $\mathrm{aff}(2)$ diperoleh bahwa $T(\mathfrak{J}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$. Dengan kata lain, turunan $\mathfrak{J}$ dari $\mathrm{aff}(2)$ adalah *inner*. Selanjutnya dengan memilih unsur f di ruang dual $\mathrm{aff}(2)^*$ diperoleh bahwa determinan matriks yang entri-entrinya diberikan oleh $\langle f, [s_i, s_j] \rangle \coloneqq f([s_i, s_j])$ tidak sama dengan nol. Akibatnya, $\mathrm{aff}(2)$ adalah aljabar Lie Frobenius.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 1-9

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam Hasil dan Pembahasan ini setidaknya ada dua sifat aljabar Lie affine $\mathrm{aff}(2)$ yang dipelajari. Untuk mempermudah dalam pembahasan, unsur di $\mathrm{aff}(2)$ dapat diekspresikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} A \in \mathfrak{g}l_2(\mathbb{R}) & x \in \mathbb{R}^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Selanjutnya, unsur di ruang dual $\mathrm{aff}(2)^*$ dapat diekspresikan juga dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} A \in \mathfrak{g}l_2(\mathbb{R}) & * \\ y \in (\mathbb{R}^2)^* & * \end{pmatrix}. \tag{8}$$

dan identifikasi keduanya dinyatakan oleh

$$\langle f, X \rangle = \mathrm{trace}\ (px) + \mathrm{trace}\ (\alpha A). \tag{9}$$

dengan $f \coloneqq f(\alpha, p) \in \mathrm{aff}(2)^*$ dan $X \coloneqq X(A, x) \in \mathrm{aff}(2)$.

Selanjutnya akan dibuktikan sifat-sifat aljabar Lie affine $\mathrm{aff}(2)$ dalam dua proposisi berikut ini:

Proposisi 6. Turunan aljabar Lie affine $\mathrm{aff}(2)$ berdimensi 6 adalah *inner*.

Bukti .

Aljabar Lie affine $\mathrm{aff}(2)$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali semi langsung antara torus $\mathcal{F} = \langle f \rangle$ dengan $\mathbb{R}^2 \rtimes sl_2(\mathbb{R})$, yaitu $\mathrm{aff}(2) = \mathcal{F} \oplus \left(\mathbb{R}^2 \rtimes sl_2(\mathbb{R})\right) = \mathbb{R}^2 \rtimes (sl_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{F})$. Dalam hal ini, split torus $\mathcal{F}$ adalah turunan yang dapat didiagonalkan dari Der $(\mathbb{R}^2 \rtimes sl_2(\mathbb{R}))$. Kemudian pilih $S \coloneqq \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ basis untuk $\mathrm{aff}(2)$, dengan $S_1 \coloneqq \{e_1, e_2\}$ basis standard untuk $\mathbb{R}^2$, $S_2 \coloneqq \{s_3, s_4, s_5\}$ basis untuk $sl_2(\mathbb{R})$ dan $S_3 = \{s_6\}$ basis untuk $\mathcal{F}$. Unsur-unsur dalam basis S_1, S_2, S_3 dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

1. $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $s_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, s_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dan $s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bracket tak nol dari $\mathrm{aff}(2)$ dan konstanta strukturnya diberikan Tabel 1 berikut ini

Jurnal Matematika Murni dan Terapan “εpsilon”
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 1-9

Tabel 1. *Bracket* tak nol dan konstanta struktur aff(2)

Bracket tak nol	Konstanta struktur
$[s_5, s_3] = 2s_3$	$a_{53}^3 = 2$
$[s_5, s_4] = -2s_4$	$a_{45}^4 = 2$
$[s_3, s_4] = s_{5,}$	$a_{34}^5 = 1$
$[s_5, s_1] = s_1$	$a_{51}^1 = 1$
$[s_5, s_2] = -s_2$	$a_{25}^2 = 1$
$[s_3, s_2] = s_1$	$a_{32}^1 = 1$
$[s_4, s_1] = s_2$	$a_{41}^2 = 1$
$[s_6, s_1] = s_1$	$a_{61}^1 = 1$
$[s_6, s_2] = s_2$	$a_{62}^2 = 1$

Dengan menggunakan Tabel 1 di atas, diperoleh matriks transformasi dari representasi *adjoint* $\text{ad}\, x : \text{aff}(2) \to \text{aff}(2)$ dengan $x \in \text{aff}(2)$ terhadap basis S sebagai berikut:

1. $\text{ad s}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

2. $\text{ad s}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

3. $\text{ad s}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

4. $\text{ad s}_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 1-9

5. $\operatorname{ad} s_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
6. $\operatorname{ad} s_6 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sedangkan matriks transformasi dari turunan $\Im : \mathrm{aff}(2) \to \mathrm{aff}(2)$ dapat dihitung menggunakan Persamaan (5), yaitu

$$\sum_{k=1}^{6} a_{ij}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6} (\mu_{ik}a_{kj}^{p} + \mu_{jk}a_{ik}^{p})$$

dengan $1 \le i, j, p \le 6$. Untuk lebih jelasnya perhatikan Tabel 2 berikut ini :

Tabel 2. Perhitungan entri matriks $(\mu_{ij})^T$

Pasang (i,j)	Persamaan entri-entri matriks
(1,2)	$\sum_{k=1}^{6} a_{12}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{1k}a_{k2}^{p} + \mu_{2k}a_{1k}^{p})$.
(1,3)	$\sum_{k=1}^{6} a_{13}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{1k}a_{k3}^{p} + \mu_{3k}a_{1k}^{p})$.
(1,4)	$\sum_{k=1}^{6} a_{14}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{1k}a_{k4}^{p} + \mu_{4k}a_{1k}^{p})$.
(1,5)	$\sum_{k=1}^{6} a_{15}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{1k}a_{k5}^{p} + \mu_{5k}a_{1k}^{p})$.
(1,6)	$\sum_{k=1}^{6} a_{16}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{1k}a_{k6}^{p} + \mu_{6k}a_{1k}^{p})$.
(2,3)	$\sum_{k=1}^{6} a_{23}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{2k}a_{k3}^{p} + \mu_{3k}a_{2k}^{p})$.
(2,4)	$\sum_{k=1}^{6} a_{24}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{2k}a_{k4}^{p} + \mu_{4k}a_{2k}^{p})$.
(2,5)	$\sum_{k=1}^{6} a_{25}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{2k}a_{k5}^{p} + \mu_{5k}a_{2k}^{p})$.
(2,6)	$\sum_{k=1}^{6} a_{26}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{2k}a_{k6}^{p} + \mu_{6k}a_{2k}^{p})$.
(3,4)	$\sum_{k=1}^{6} a_{34}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{3k}a_{k4}^{p} + \mu_{4k}a_{3k}^{p})$.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 1-9

(3,5)	$\sum_{k=1}^{6} a_{35}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{3k}a_{k5}^{p} + \mu_{5k}a_{3k}^{p})$.
(3,6)	$\sum_{k=1}^{6} a_{36}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{3k}a_{k6}^{p} + \mu_{6k}a_{3k}^{p})$.
(4,5)	$\sum_{k=1}^{6} a_{45}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{4k}a_{k5}^{p} + \mu_{5k}a_{4k}^{p})$.
(4,6)	$\sum_{k=1}^{6} a_{46}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{4k}a_{k6}^{p} + \mu_{6k}a_{4k}^{p})$.
(5,6)	$\sum_{k=1}^{6} a_{56}^{k}\mu_{kp} = \sum_{k=1}^{6}(\mu_{5k}a_{k6}^{p} + \mu_{6k}a_{5k}^{p})$.

Selanjutnya, dengan menyelesaikan semua sistem persamaan linear dalam Tabel 2 di atas maka diperoleh matriks transformasi dari turunan $\mathfrak{J} : \mathrm{aff}(2) \to \mathrm{aff}(2)$ sebagai berikut:

$$(\mu_{ij})^{T} \coloneqq \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \xi & \psi & 0 & \gamma & \gamma \\ \zeta & \alpha & 0 & \gamma & -\psi & \psi \\ 0 & 0 & \beta & 0 & -2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 2\zeta & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Perhatikan bahwa matriks transformasi $(\mu_{ij})^{T}$ dari $\mathfrak{J}_{s_i}$ sama dengan matriks transformasi dari representasi *adjoint* ad $\mathrm{s_i}$ untuk setiap $i = 1,2,3,4,5,6$. Dengan kata lain, $\mathrm{Der\,aff}(2) = \mathrm{ad\,aff}(2)$. Oleh karena itu, turunan aljabar Lie affine $\mathrm{aff}(2)$adalah *inner*.

■

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa aljabar Lie affine $\mathrm{aff}(2)$ adalah aljabar Lie Frobenius sebagai berikut:

Proposisi 7. Aljabar Lie affine $\mathrm{aff}(2)$ adalah Frobenius.

Bukti .

Meskipun dalam [7] telah ditunjukkan bahwa $\mathrm{aff}(2)$ adalah aljabar Lie Frobenius yaitu dengan menunjukkan bahwa determinan matriks $[s_i, s_j] = 4(s_2^2 s_3 + s_1 s_2 s_5 - s_1^2 x_4)^2 \neq 0$, akan tetapi dalam pembuktian kali ini akan digunakan Definisi 5 yaitu dengan menunjukkan bahwa terdapat $f(p,\alpha) \in \mathrm{aff}(2)^{*}$ sedemikian sehingga determinan matriks yang entri-entrinya didefinisikan oleh $\langle f, [s_i, s_j]\rangle$ tidak sama dengan nol.

Menggunakan hasil dari [7], diperoleh matriks $[s_i, s_j]$, yaitu matriks yang entri-entrinya *bracket* $[s_i, s_j]$ terhadap basis S.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 1-9

$$[s_i, s_j] := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -s_2 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & 0 & -s_1 & 0 & s_2 & -s_2 \\ 0 & s_1 & 0 & s_5 & -2s_3 & 0 \\ s_2 & 0 & -s_5 & 0 & 2s_4 & 0 \\ s_1 & -s_2 & 2s_3 & -2s_4 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Kemudian pilih $f(p,\alpha) \in \mathrm{aff}(2)^*$ dengan $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2)^*$ dan $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$. Dengan kata lain, $f(p,\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{aff}(2)^*$. Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (9), diperoleh matriks $\langle f, [s_i, s_j] \rangle$ sebagai berikut:

$$\langle f, [s_i, s_j] \rangle := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Menggunakan perluasan kofaktor, diperoleh $\det\langle f, [s_i, s_j] \rangle = -4 \neq 0$. Jadi, $\mathrm{aff}(2)$ adalah aljabar Lie Frobenius.

■

5. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat diambil kesimpulan bahwa turunan aljabar Lie affine berdimensi 6 $\mathrm{aff}(2)$ adalah *inner* dan aljabar Lie affine berdimensi 6 $\mathrm{aff}(2)$ adalah aljabar Lie Frobenius. Disarankan untuk meneliti lebih lanjut tentang analisis harmonik $\mathrm{aff}(2)$ dan mempelajari sifat-sifat lainnya serta mempelajari untuk kasus aljabar Lie affine berdimensi $n^2 + n$ seperti bagaimana mendapatkan rumus umum pfaffian $\mathrm{aff}(n)$.

6. REFERENSI

[1] M. Rais, "La representation du groupe affine," *Ann.Inst.Fourier,Grenoble*, vol. 26, pp. 207--237, 1978.

[2] N. Ghegerstega and V. Orlov, "Applications of Aff(2,R)- orbits for quadratic differential systems," *Bul. Acad. S¸TIINT¸E A REPUBLICII*

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 1-9

Mold. Mat., vol. 2, no. 57, pp. 122--126, 2008.

[3] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul, "Transform associated to square-integrable group of representations I," *J.Math.Phys*, vol. 26, pp. 2473--2479, 1985.

[4] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul, "Trsansform associated to square-integrable group representations .II. Examples," *Ann.Inst.H.Poincare Phys.Theor*, vol. 45, pp. 293--309, 1986.

[5] V. Gayral and et al, "Fourier analysis on the affine group, quantization and noncompact Connes geometries," *J. Noncommutative Geom.*, vol. 2, pp. 215--261, 2008.

[6] A. Diatta and B. Manga, "On properties of principal elements of frobenius lie algebras," *J. Lie Theory*, vol. 24, no. 3, pp. 849–864, 2014.

[7] A. I. Ooms, "Computing invariants and semi-invariants by means of Frobenius Lie algebras," *J. Algebra.*, vol. 321, pp. 1293--1312, 2009.

[8] J. Hilgert and K.-H. Neeb, *Structure and Geometry of Lie Groups*. New York: Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2012.

[9] V. Ayala, E. Kizil, and I. D. A. Tribuzy, "On an algorithm for finding derivations of lie algebras," *Proyecciones J. Math.*, vol. 31, no. 1, pp. 81–90, 2012.

[10] A. I. Ooms, "On frobenius Lie algebras," *Comm. Algebra.*, vol. 8, pp. 13--52, 1980.