Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 33-39

# RELASI *FUZZY* PADA GRUP FAKTOR *FUZZY*

**[*1]Ahmad Madani, [1]Saman Abdurrahman, [1]Na'imah Hijriati**

*[1]Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat*
*Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan*
*[*]Email: dhamath74@gmail.com*

## ABSTRACT

Fuzzy subsets on the non-empty set is a mapping of this set to the interval [0,1]. The concept of fuzzy subgroups introduced from advanced concept of fuzzy set in group theory. In concept of fuzzy set there is the concept of relations is fuzzy relations. In this study examined that fuzzy relations related to the equivalence and congruence on a fuzzy group and fuzzy factor group. The results of this study was to show that a fuzzy relation $\beta : \beta(a,b) = \min\{\mu_H(a), \mu_H(b)\}$ if $a \neq b$ and $\beta(a,b) = \mu_H(e)$ if $a = b$ is a fuzzy congruence relations on fuzzy group and a fuzzy relation $\rho$ defined of $\rho(xH, yH) = K(xHy^{-1}H)$is a fuzzy congruence relations on fuzzy factor group.

**Keywords:** Fuzzy subgroup, Fuzzy factor group, Fuzzy relations $\beta$, Fuzzy congruence relations.

## ABSTRAK

*Subset fuzzy* pada himpunan tak kosong merupakan suatu pemetaan dari himpunan tersebut ke interval [0,1]. Diperkenalkan konsep subgrup *fuzzy* yang merupakan pengembangan dari konsep himpunan *fuzzy* didalam teori grup. Pada konsep himpunan *fuzzy* terdapat konsep relasi yaitu relasi *fuzzy*. Pada penelitian ini dikaji sifat relasi *fuzzy* yang berkaitan dengan sifat ekuivalensi dan kongruen pada grup *fuzzy* dan grup faktor *fuzzy*. Hasil dari penelitian ini yaitu relasi *fuzzy* $\beta$ dengan : $\beta(a,b) = \min\{\mu_H(a), \mu_H(b)\}$ jika $a \neq b$ dan $\beta(a,b) = \mu_H(e)$ jika $a = b$ merupakan relasi kongruen *fuzzy* atas grup *fuzzy* serta relasi *fuzzy* $\rho$ yang didefinisikan oleh $\rho(xH, yH) = K(xHy^{-1}H)$ merupakan relasi kongruen *fuzzy* atas grup faktor *fuzzy*.

**Kata Kunci:** Subgrup *fuzzy*, Grup faktor *fuzzy*, Relasi *fuzzy* $\beta$, Relasi kongruen *fuzzy*.

## 1. PENDAHULUAN

Himpunan *fuzzy* dikembangkan pada tahun 1965 oleh Zadeh, kemudian pada tahun 1971, Rosenfeld memperkenalkan konsep grup *fuzzy* dalam teori grup yang mana salah satu dari konsep grup *fuzzy* adalah subgrup *fuzzy* [12]. Konsep relasi *fuzzy* dituliskan oleh Klir pada tahun 1995 [9] yaitu subset *fuzzy* $\mu$ pada $X \times X$ yang dapat dituliskan $\mu : X \times X \rightarrow [0,1]$. Pada tahun 1992, Kuroki memperkenalkan konsep kongruen *fuzzy* dan karakteristik dari kongruen *fuzzy* dari grup $G$ yang cakupannya hanya pada subgrup normal *fuzzy* [10]. Relasi kongruen *fuzzy* terpenuhi apabila relasi *fuzzy* merupakan relasi ekuivalensi *fuzzy* yang kompatibel *fuzzy* [3]. Dalam penelitian ini akan mengkaji relasi *fuzzy* yang membentuk suatu relasi *fuzzy* $\beta$ atas grup $G$ [3]. Dengan menggunakan relasi tersebut akan diuji kongruen *fuzzy* pada grup *fuzzy*. Kemudian, membuktikan bahwa himpunan *fuzzy* dari grup faktor *fuzzy* merupakan subgrup faktor *fuzzy* dan subgrup normal faktor *fuzzy* dengan menggunakan relasi *fuzzy* $\beta$ serta

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 33-39

membuktikan suatu relasi *fuzzy* $\rho$ merupakan relasi kongruen *fuzzy* pada grup faktor *fuzzy*.

## 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Himpunan *Fuzzy*

Himpunan *fuzzy* merupakan pemetaan dari himpunan tak kosong ke interval tertutup $[0,1]$:

**Definisi 2.1.1 [9]**
*Suatu subset $\mu$ dari $G$ merupakan suatu fungsi $\mu : G \to [0,1]$.*

**Definisi 2.1.3 [13]**
*Diberikan himpunan fuzzy $K$ dan $L$ dari himpunan tak kosong $G$, sehingga berlaku*:
*(i)* $K \subseteq L$ jika dan hanya jika $K(x) \leq L(x), \forall\, x \in G$.
*(ii)* $K = L$ jika dan hanya jika $K \subseteq L\ dan\ L \subseteq K$.
*(iii)* $(K \cap L)(x) = \min\{K(x), L(x)\}, \forall\, x \in G$.
*(iv)* $(K \cup L)(x) = \max\{K(x), L(x)\}, \forall\, x \in G$.

### 2.2 Relasi *Fuzzy*

**Definisi 2.2.1 [9]**
*Diberikan $X$ himpunan tak kosong, maka relasi biner fuzzy $R$ pada $X$ merupakan subset fuzzy $\mu$ pada $X \times X$ dapat dituliskan $\mu : X \times X \to [0,1]$ dengan himpunan fuzzy $R = \{(x,y), \mu(x,y) | (x,y) \in X \times X\}$.*

**Definisi 2.2.2 [3]**
*Diberikan $X$ himpunan tak kosong. Suatu relasi biner fuzzy $\mu$ atas $X$ disebut relasi ekuivalensi jika berlaku*:
*(i)* $Refleksif$, yaitu $\forall x \in X\ berlaku\ \mu(x,x) = 1$.
*(ii)* $Simetrik$, yaitu $\forall x, y \in X\ berlaku\ \mu(x,y) = \mu(y,x)$.
*(iii)* $Transitif$, yaitu $\forall x, z \in X\ berlaku\ \mu(x,z) \geq \max_{y \in X}\{\mu(x,y).\mu(y,z)\}$.

**Definisi 2.2.3 [3]**
*Diberikan $S$ semigrup, suatu relasi biner fuzzy $\mu$ atas $S$ disebut kompatibel fuzzy jika untuk setiap $a, b, c, d \in S\ berlaku\ min\{\mu(a,b), \mu(c,d)\} \leq \mu(ac, bd)$.*

**Definisi 2.2.4 [3]**
*Diberikan $S$ semigrup, suatu relasi ekulivalensi fuzzy $\mu$ yang kompatibel atas $S$ disebut kongruen fuzzy.*

**Definisi 2.2.5 [3]**
*Misalkan $\mu_H$ adalah subgrup fuzzy dari grup $G$. Didefinisikan relasi fuzzy $\beta$ pada grup $G$ yang dipetakan ke interval $[0,1]$ sebagai :*

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 33-39

$$\beta(a,b) = \begin{cases} \min\{\mu_H(a), \mu_H(b)\}, jika\ a \neq b \\ \mu_H(e) \qquad\qquad\qquad , jika\ a = b \end{cases}$$

**2.3 Subgrup *Fuzzy* dan Subgrup Normal *Fuzzy***

**Definisi 2.3.1 [2]**
*Diberikan $G$ grup, suatu pemetaan $\mu_H: G \to [0,1]$ disebut subgrup fuzzy jika:*
*(i)* $\mu_H(xy) \geq \min\{\mu_H(x), \mu_H(y)\}, \forall\, x, y \in G.$
*(ii)* $\mu_H(x^{-1}) = \mu_H(x), \forall\, x \in G.$
*(iii)* $\mu_H(e) = 1.$

**Teorema 2.3.2**
*Jika $G$ grup dengan elemen identitas $e$, maka $\mu_H(x) \leq \mu_H(e),\ \forall x \in G$.*

**Definisi 2.6.3 [3]**
*Suatu subgrup fuzzy $\mu_H$ atas $G$ disebut subgrup normal fuzzy dari $G$ jika:*
$$\mu_H(xy) = \mu_H(yx) \text{ untuk setiap } x, y \in G.$$

**2.4 Subgrup Faktor *Fuzzy* dan Subgrup Normal Faktor *Fuzzy***

**Definisi 2.4.1 [3]**
*Himpunan fuzzy $K$ yang merupakan subgrup fuzzy atas $G/H$ disebut subgrup faktor fuzzy.*

**Definisi 2.4.2 [3]**
*Himpunan fuzzy $K$ yang merupakan subgrup normal fuzzy atas $G/H$ disebut subgrup normal faktor fuzzy.*

Selanjutnya dibentuk suat pemetaan $K : G/H \to [0,1]$ dengan $K(xH) = \beta(x,h)$ sedemikian sehingga $K$ merupakan subgrup faktor *fuzzy* dan subgrup normal faktor *fuzzzy*. Kemudian diberikan $K$ suatu subgrup normal faktor *fuzzy* didefinisikan relasi *fuzzy* $\rho$ sebagai berikut:

**Definisi 2.4.3 [3]**
*Relasi fuzzy $\rho$ atas $G/H \times G/H$ didefinisikan sebagai:*
$$\rho(xH, yH) = K(xHy^{-1}H)$$

## 3. PROSEDUR PENELITIAN

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Mempelajari definisi maupun teorema yang akan digunakan dalam penelitian seperti definisi himpunan *fuzzy*, relasi *fuzzy*, subgrup *fuzzy* dan subgrup normal *fuzzy*.
2. Membuktikan bahwa relasi *fuzzy* $\beta$ dari grup $G$ dengan menggunakan relasi *fuzzy* merupakan relasi kongruen *fuzzy*.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 33-39

3. Membuktikan bahwa himpunan *fuzzy* $K$ dari grup faktor *fuzzy* merupakan subgrup faktor *fuzzy* dan subgrup normal faktor *fuzzy*.
4. Membuktikan bahwa relasi *fuzzy* $\rho$ dari grup faktor *fuzzy* merupakan relasi kongruen *fuzzy*.
5. Menyimpulkan hasil dan saran dari penelitian.

## 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 4.1 Relasi *Fuzzy* $\beta$ Merupakan Relasi Kongruen *Fuzzy*

Diberikan relasi *fuzzy* $\beta$ pada Definisi 2.2.5, akan dibuktikan bahwa relasi *fuzzy* $\beta$ merupakan kongruen *fuzzy* dengan $\mu_H$ adalah subgrup *fuzzy* dari grup $G$. Berikut akan disajikan proposisi yang terkait dengan relasi fuzzy $\beta$ yaitu:

**Proposisi 4.1.1**
*Diberikan $G$ grup dengan identitas $e$ . Jika $\mu_H$ merupakan subgrup fuzzy atas grup $G$, maka relasi $\beta$ atas $G$ merupakan relasi ekuivalensi atas $G$.*

Bukti:
$(i)$ Relasi *fuzzy* $\beta$ bersifat Refleksif.
Ambil suatu $a \in G$ sehingga $\beta(a,a) = \mu_H(e) = 1$.
$(ii)$ Relasi *fuzzy* $\beta$ bersifat Simetrik.
Ambil sebarang $a, b \in G$ diperoleh

$$\begin{aligned}\beta(a,b) &= \min\{\mu_H(a), \mu_H(b)\}\\ &= \min\{\mu_H(b), \mu_H(a)\}\\ &= \beta(b,a).\end{aligned}$$

$(iii)$ Relasi *fuzzy* $\beta$ bersifat Transitif.
Ambil sebarang $a, b, c \in G$ maka berdasarkan Definisi 2.5.3 diperoleh bahwa :

$$\begin{aligned}\beta \circ \beta(a,c) &= \operatorname*{maks}_{b\in G}\{\beta(a,b).\beta(b,c)\}\\ &= \operatorname*{maks}_{b\in G}\{\min\{\mu_H(a),\mu_H(b)\}.\min\{\mu_H(b),\mu_H(c)\}\}\\ &\le \operatorname*{maks}_{b\in G}\{\min\{\mu_H(a),\mu_H(b)\}\}.\operatorname*{maks}_{b\in G}\{\min\{\mu_H(b),\mu_H(c)\}\}\\ &\le \operatorname*{maks}_{b\in G}\{\mu_H(a)\}.\operatorname*{maks}_{b\in G}\{\mu_H(c)\}\\ &\le \min\{\mu_H(a),\mu_H(c)\}\\ &= \beta(a,c), \forall a,c \in G.\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa relasi *fuzzy* $\beta$ merupakan relasi ekuivalensi.■

**Proposisi 4.1.2**
*Jika $\mu_H$ subgrup fuzzy dari $G$, $\forall\, x,y \in G, \exists\, x^{-1}, y^{-1} \in G$, maka berlaku:*

$$\beta(x^{-1}, y^{-1}) = \beta(x,y).$$

Bukti:
Diketahui $\mu_H$ subgrup *fuzzy* dari $G$, diperoleh:

$$\begin{aligned}\beta(x^{-1},y^{-1}) &= \min\{\mu_H(x^{-1}),\mu_H(y^{-1})\}\\ &= \min\{\mu_H(x),\mu_H(y)\}\\ &= \beta(x,y).\end{aligned}$$

Kemudian, akan dibuktikan bahwa relasi *fuzzy* $\beta$ adalah relasi yang kompatibel yang akan disajikan oleh proposisi berikut:

**Proposisi 4.1.3**
*Jika G grup , maka relasi fuzzy $\beta$ atas G merupakan kompatibel fuzzy.*
Bukti :
Dengan menggunakan Definisi 2.2.3 [3] dan relasi *fuzzy* $\beta$,sehingga untuk setiap $a, b, c, d \in G$ diperoleh

$$\begin{aligned}\beta(ac, bd) &= \min\{\mu_H(ac), \mu_H(bd)\}\\ &\geq \min\{\min\{\mu_H(a), \mu_H(c)\}, \min\{\mu_H(b), \mu_H(d)\}\}\\ &= \min\{\mu_H(a), \mu_H(b), \mu_H(c), \mu_H(d)\}\\ &= \min\{\min\{\mu_H(a), \mu_H(b)\}, \min\{\mu_H(c), \mu_H(d)\}\}\\ &= \min\{\beta(a, b), \beta(c, d)\}.\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa relasi *fuzzy* $\beta$ merupakan kompatibel *fuzzy*. ■

**Proposisi 4.1.4**
*Jika G grup, maka relasi fuzzy $\beta$ atas G merupakan kongruen fuzzy.*
Bukti:
Diketahui pada Proposisi 4.1.1, diperoleh bahwa relasi *fuzzy* $\beta$ merupakan ekuivalensi *fuzzy* dan pada Proposisi 4.1.3 diperoleh bahwa relasi *fuzzy* $\beta$ merupakan kompatibel *fuzzy*, sehingga pada Definisi 2.2.4 diperoleh bahwa relasi *fuzzy* $\beta$ merupakan kongruen *fuzzy*.■

## 4.2 Subgrup Faktor *Fuzzy* dan Subgrup Normal Faktor *Fuzzy*

Dibentuk suatu pemetaan $K : G/H \to [0,1]$ dengan $K(xH) = \beta(x, h)$ sedemikian sehinggga $K$ subgrup *fuzzy*. Selanjutnya $K$disebut subgrup faktor *fuzzy* dan subgrup normal faktor *fuzzy* yang disajikan pada praposisi berikut.

**Proposisi 4.2.1**
*Himpunan fuzzy $K : G/H \to [0,1]$ dengan $K(xH) = \beta(x, h)$merupakan subgrup faktor fuzzy dari $G/H$.*
Bukti:
Akan dibuktikan bahwa $K$ subgrup faktor *fuzzy* dari $G/H$. Karena $\mu_H$ subgrup *fuzzy* dari grup $G$. Untuk setiap $xH, yH \in G/H$ diperoleh

$$\begin{aligned}K(xHyH) &= K(xyH)\\ &= \beta(xy, h)\\ &= \min\{\mu_H(xy), \mu_H(h)\}\\ &= \mu_H(xy).\end{aligned}$$

Karena $\mu_H$ subgrup *fuzzy* sehingga

$$\begin{aligned}K(xHyH) &\geq \min\{\mu_H(x), \mu_H(y)\}\\ &\geq \min\{\min\{\mu_H(x), \mu_H(h)\}, \min\{\mu_H(y), \mu_H(h)\}\}\\ &= \min\{\beta(x, h), \beta(y, h)\}\\ &= \min\{K(xH), K(yH)\}.\end{aligned}$$

dan,
Untuk $x \in G/H$, $\exists\, x^{-1} \in G$ dengan $h \in H$ maka $x^{-1}H \in G/H$ diperoleh

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 33-39

$$
\begin{aligned}
K(x^{-1}H) &= \beta(x^{-1}, h)\\
&= \min\{\mu_H(x^{-1}), \mu_H(h)\}\\
&= \min\{\mu_H(x), \mu_H(h)\}\\
&= \beta(x, h) = K(xH).
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh bahwa $K$ merupakan subgrup faktor *fuzzy* dari $G/H$. ■

**Proposisi 4.2.2**

*Himpunan fuzzy $K : G/H \to [0,1]$ dengan $K(xH) = \beta(x, h)$. Jika $\mu_H$ subgrup normal maka $K$ merupakan subgrup normal faktor fuzzy dari $G/H$.*

Bukti:

Dengan menggunakan definisi subgrup normal *fuzzy* dan diketahui bahwa $\mu_H$ subgrup normal *fuzzy* sehingga untuk setiap $xH, yH \in G/H$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
K(xHyH) &= \beta(xy, h)\\
&= \min\{\mu_H(xy), \mu_H(h)\}\\
&= \min\{\mu_H(yx), \mu_H(h)\}\\
&= \beta(yx, h)\\
&= K(yxH)\\
&= K(yHxH).
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh bahwa $K$ merupakan subgrup normal faktor *fuzzy* dari $G/H$. ■

**Proposisi 4.2.3**

*Jika $K$ adalah subgrup faktor fuzzy dari grup $G/H$ untuk suatu $xH \in G/H$ maka berlaku: $K(xHyH) = K(yH) \Leftrightarrow K(xH) = K(H) \quad \forall\, yH \in G/H$.*

Bukti:

$$
\begin{aligned}
K(xHyH) &\geq \min\{K(xH), K(yH)\}\\
&= \min\{K(H), K(yH)\}\\
&= \min\{K(eH), K(yH)\}\\
&= \min\{\beta(e, h), \beta(y, h)\}\\
&= \min\{\min\{\mu_H(e), \mu_H(h)\}, \min\{\mu_H(y), \mu_H(h)\}\}\\
&= \min\{\mu_H(h), \min\{\mu_H(y), \mu_H(h)\}\}\\
&= \min\{\mu_H(y), \mu_H(h)\}\\
&= \beta(y, h)\\
&= K(yH).
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
K(xH) &= \beta(x, h)\\
&= \min\{\mu_H(x), \mu_H(h)\}\\
&= \min\{\mu_H(e), \mu_H(h)\}\\
&= \beta(e, h)\\
&= K(eH)\\
&= K(H).
\end{aligned}
$$

■

Diberikan *subset fuzzy* dari sebarang himpunan tak kosong $K$ dan $L$, maka akan ditunjukkan sifat operasi *fuzzy* $K \cap L$ merupakan nilai minimum dari derajat keanggotaan suatu unsur dari $K$ dan $L$, yang mana akan disajikan Proposisi sebagai berikut

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 33-39

**Proposisi 4.2.4**
*Jika diberikan $K$ dan $L$ merupakan dua subgrup faktor fuzzy dari $G/H$, maka $K \cap L$ merupakan subgrup faktor fuzzy dari $G/H$.*
Bukti:
Untuk setiap $xH, yH \in G/H$ dengan $h \in H$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} K \cap L(xHyH) &= \min\{K(xHyH), L(xHyH)\} \\ &\geq \min\{\min\{K(xH), K(yH)\}, \min\{L(xH), L(yH)\}\} \\ &= \min\{K(xH), K(yH), L(xH), L(yH)\} \\ &= \min\{\min\{K(xH), L(yH)\}, \min\{K(yH), L(yH)\}\} \\ &= \min\{K \cap L(xH), K \cap L(yH)\}. \end{aligned}$$

Untuk suatu $xH \in G/H$ dengan $h \in H$ , $\exists\, x^{-1} \in G$ maka $x^{-1}H \in G/H$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} K \cap L(x^{-1}H) &= \min\{K(x^{-1}H), L(x^{-1}H)\} \\ &= \min\{K(xH), L(xH)\} \\ &= K \cap L(xH). \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa $K \cap L$ merupakan subgrup faktor *fuzzy* dari $G/H$. ■

**Proposisi 4.2.5**
*Jika diberikan $K$ dan $L$ merupakan dua subgrup normal faktor fuzzy dari $G/H$ ,maka $K \cap L$ merupakan subgrup normal faktor fuzzy dari $G/H$.*
Bukti:

$$\begin{aligned} K \cap L(xHyH) &= \min\{K(xHyH), L(xHyH)\} \\ &= \min\{K(yHxH), L(yHxH)\} \\ &= K \cap L(yHxH). \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa $K \cap L$ merupakan subgrup normal faktor *fuzzy* dari $G/H$. ■

## 4.3 Relasi *Fuzzy* $\rho$ merupakan Relasi Kongruen *Fuzzy*

Diberikan relasi *fuzzy* $\rho$ [3] pada Definisi 2.4.3, dari Definisi 2.2.4 akan dibuktikan bahwa relasi *fuzzy* $\rho$ merupakan relasi ekuivalensi *fuzzy* dan relasi kompatibel *fuzzy* yang disajikan pada proposisi berikut.

**Proposisi 4.3.1**
*Relasi $\rho(aH, bH) = K(aHb^{-1}H)$ merupakan relasi kongruen fuzzy pada $G/H \times G/H$.*
Bukti:
$(i)$ Relasi *fuzzy* $\rho$ bersifat Refleksif.
Ambil suatu $aH \in G/H$ diperoleh

$$\begin{aligned} \rho(aH, aH) &= K(aHa^{-1}H) \\ &= R(H). \end{aligned}$$

$(ii)$ Relasi *fuzzy* $\rho$ bersifat Simetrik.
Ambil sebarang $aH, bH \in G/H$ diperoleh

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 33-39

$$
\begin{aligned}
\rho(aH,bH) &= K(aHb^{-1}H)\\
&= K(ab^{-1}H)\\
&= K((ab^{-1})^{-1}H)\\
&= K(ba^{-1}H)\\
&= \rho(bH,aH).
\end{aligned}
$$

$(iii)$ Relasi *fuzzy* $\rho$ bersifat Transitif.

Ambil sebarang $aH,bH,cH \in G/H$,diperoleh

$$
\begin{aligned}
\rho\circ\rho(aH,cH) &= \underset{bH\in G/H}{\text{maks}}\{\rho(aH,bH).\rho(bH,cH)\}\\
&= \underset{bH\in G/H}{\text{maks}}\{K(aHb^{-1}H).K(bHc^{-1}H)\}\\
&= \underset{bH\in G/H}{\text{maks}}\{K(ab^{-1}H).K(bc^{-1}H)\}\\
&= \underset{b\in G}{\text{maks}}\{\beta(ab^{-1},h).\beta(bc^{-1},h)\}\\
&= \underset{y\in G}{\text{maks}}\{\min\{\mu_H(ab^{-1}),\mu_H(h)\}.\min\{\mu_H(bc^{-1}),\mu_H(h)\}\}\\
&\le \underset{y\in G}{\text{maks}}\{\min\{\min\{\mu_H(ab^{-1}),\mu_H(bc^{-1})\},\mu_H(h)\}\}\\
&\le \underset{y\in G}{\text{maks}}\{\min\{\mu_H(ac^{-1}),\mu_H(h)\}\}\\
&= \min\{\mu_H(ac^{-1}),\mu_H(h)\}\\
&= K(aHc^{-1}H)\\
&= \rho(aH,cH).
\end{aligned}
$$

$(iv)$ Relasi *fuzzy* $\rho$ merupakan Kompatibel *fuzzy*

Ambil sebarang $aH,bH,cH,dH \in G/H$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\min\{\rho(aH,bH),\rho(cH,dH)\} &= \min\{K(ab^{-1}H),K(cd^{-1}H)\}\\
&= \min\{\beta(ab^{-1},h),\beta(cd^{-1},h)\}\\
&= \min\{\mu_H(ab^{-1}),\mu_H(cd^{-1})\}.
\end{aligned}
$$

Karena diketahui bahwa $\mu_H$ subgrup normal *fuzzy* sehingga

$$
\begin{aligned}
\min\{\rho(aH,bH),\rho(cH,dH)\} &= \min\{\mu_H(b^{-1}a),\mu_H(cd^{-1})\}\\
&\le \mu_H(b^{-1}acd^{-1})\\
&= \mu_H(acb^{-1}d^{-1})\\
&= \min\{\mu_H(ac(bd)^{-1}),\mu_H(h)\}\\
&= \beta(ac(bd)^{-1},h)\\
&= K(acH(bd)^{-1}H)\\
&= \rho(acH,bdH).
\end{aligned}
$$

Berdasarkan pembuktian (i), (ii), (iii) diperoleh bahwa relasi *fuzzy* $\rho$ merupakan relasi ekuivalensi *fuzzy* dan pada pembuktian $(iv)$ diperoleh bahwa relasi *fuzzy* $\rho$ merupakan kompatibel *fuzzy*, sehingga dari Definisi 2.5.7 maka disimpulkan bahwa relasi *fuzzy* $\rho$ merupakan relasi kongruen *fuzzy* atas grup $G/H$. ■

## 5. KESIMPULAN

1. Relasi *fuzzy* $\beta$ pada $G\times G$ yang dipetakan ke interval [0,1] sebagai berikut: $\beta(a,b)=\min\{\mu_H(a),\mu_H(b)\}$ jika $a\neq b$ dan $\beta(a,b)=\mu_H(e)$ jika $a=b$, maka relasi *fuzzy* $\beta$ merupakan relasi kongruen *fuzzy*.
2. Pemetaan $K: G/H \to [0,1]$ yang didefinisikan oleh $K(xH)=\beta(x,h)$ untuk setiap $h\in H$ merupakan subgrup normal faktor *fuzzy*.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2020) Hal. 33-39

3. Pemetaan $\rho: G/H \times G/H \to [0,1]$, didefinisikan $\rho(xH, yH) = K(xHy^{-1}H)$ merupakan relasi kongruen *fuzzy*.

## 6. DAFTAR PUSTAKA


[1] Abdurrahman, S. 2012. *Struktur Aljabar*. Surabaya.
[2] Akgul, M. 1988. *Some Properties of Fuzzy Groups.* Journal of Mathematical Analysis and Application. 133:93-100.
[3] Aktas, H. 2004. *On Fuzzy Relations and Fuzzy Quotient Groups.* International Journal of Computational Cognition Volume 2. 2:71-79.
[4] Filep, L & Maurier, G.I. 1989. *Fuzzy Congruences and Compatible Fuzzy Partitions.* Fuzzy Set and System. 46: 121-132.
[5] Fraleigh, J.B. 2003. *A First Course in Abstract Algenbra 7th edition.* Addison Wasley Publishing Company, New York.
[6] Judson, Thomas W. 2009. *Abstract Algebra Theory and Applications.* Stephen F. Austin State University, Texas.
[7] Kandasamy, W.B.V. 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra.* American Research Press and W.B. Vasantha Kandasamy Rehoboth. USA.
[8] Kim, J.P & Bae, D.R. 1997. *Fuzzy Congruences in Groups.* Fuzzy Sets and Systems. 85: 115-120.
[9] Klir, G.J & Yuan, B. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications.* New Jersey: Prentice Hall PTR.
[10] Mordeson, J.N , Bhutani, K.R & Rosenfeld, A. 2005. *Fuzzy Group Theory.* Studies in Fuzziness and Soft Computing, Volume 131. USA.
[11] Mordeson, J.N, Malik, D.S, Kuroki, N. 2003. *Fuzzy Semigroups*. Studies in Fuzziness and Soft Computing, Volume 131. USA.
[12] Rosenfeld, A. 1971. *Fuzzy Groups.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 35: 512-517.
[13] Zadeh, L. 1965. *Fuzzy Sets.* Information and Control. 8: 338-353.