Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 35-45

TITIK TETAP PERSEKUTUAN EMPAT PEMETAAN KONTRAKTIF PADA RUANG METRIK *CONE*

Ainal Mawaddah, Muhammad Mahfuzh Shiddiq, Nurul Huda
Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani Km. 36.00 Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
Email : mawaddahainal@rocketmail.com

ABSTRACT

In 2006, Huang Long Guang and Zhang Xian has introduced more recent metrics called *cone* metrics. A non-empty set *X* with a metric cone *d* is called *cone* metric space. A mapping has a unique fixed point if the mapping is contractive mapping. The concept of a fixed point of fellowship in the *cone* metric space must also satisfy some *coincidence point, point of coincidence,* and *weakly compatible* mapping conditions. This study examines the fixed point of fellowship for four contractive mappings in the *cone* metric space. The result of this study indicate that four mapping S, T, I and J have a unique fixed point of association in the *cone* metric space.

Keywords: cone metric space, common fixed point,contractive mapping, coincidence point, point of coincidence, weakly compatible.

ABSTRAK

Huang Long Guang dan Zhang Xian pada tahun 2006 telah memperkenalkan metrik yang lebih baru yang disebut metrik *cone*. Suatu himpunan tak kosong *X* yang dilengkapi metrik *cone d* disebut ruang metrik *cone*. Suatu pemetaan memiliki titik tetap yang tunggal jika pemetaan tersebut merupakan pemetaan kontraktif. Konsep titik tetap persekutuan di ruang metrik *cone* juga harus memenuhi beberapa kondisi pemetaan yang bersifat *coincidence point, point of coincidence, dan kompatibel lemah*. Penelitian ini mengkaji titik tetap persekutuan untuk empat pemetaan yang kontraktif pada ruang metrik *cone*. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa empat pemetaan S, T, I dan J memiliki titik tetap persekutuan yang tunggal pada ruang metrik *cone.*

Kata Kunci: ruang metrik *cone*, titik tetap persekutuan, pemetan kontraktif, *coincidence point, point of coincidence*, kompatibel lemah

1. PENDAHULUAN

Salah satu konsep yang menjadi pembahasan dalam matematika analisis adalah kajian tentang ruang metrik. Metrik adalah fungsi jarak di himpunan tak kosong X. Himpunan X dilengkapi dengan suatu metrik *d* dituliskan dengan (X, d) disebut ruang metrik. Selanjutnya Huang Long Guang dan Zhang Xian (2006) memperkenalkan metrik yang lebih baru yang disebut metrik *cone.* Suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi metrik *cone* d disebut ruang metrik *cone*. Ruang metrik *cone* dikatakan lengkap jika setiap barisan *Cauchy* pada ruang metrik *cone* merupakan barisan yang konvergen.

Guang dan Xian (2006) membuktikan teorema-teorema titik tetap pada ruang metrik *cone*. Titik tetap merupakan titik yang dipetakan ke dirinya sendiri. Keberadaan titik tetap pada suatu pemetaan memiliki tiga kemungkinan, yaitu tunggal, lebih dari satu, atau tidak terdapat titik tetap pada pemetaan tersebut. Suatu pemetaan memiliki titik tetap yang tunggal jika pemetaan tersebut merupakan pemetaan kontraktif. Selanjutnya, Abbas dan Jungck (2007), memperkenalkan titik tetap pesekutuan. Titik tetap persekutuan merupakan suatu titik tetap yang sama dari dua pemetaan atau lebih. Konsep titik tetap persekutuan di ruang metrik *cone* juga harus memenuhi beberapa kondisi pemetaan yang bersifat *coincidence point*, *point of coincidence*, dan kompatibel lemah. Pada skripsi ini, penulis akan mempelajari titik tetap persekutuan untuk empat pemetaan yang memenuhi pemetaan kontraktif pada ruang metrik cone.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan himpunan yang dilengkapi dengan metrik. Berikut ini diberikan definisi ruang metrik sebagai salah satu konsep dasar ruang metrik *cone*:

Definisi 2.1.1[7]

Suatu ruang metrik adalah suatu pasangan (X, d), *dimana* X *adalh himpunantak kosong dan* d *adalah suatu metrik pada* X *(fungsi jarak pada* X*) yaitu fungsi yang didefinisikan pada* $X \times X$ *sedemikian hingga untuk semua* $x, y, z \in X$ *diperoleh*

(i) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) \in \mathbb{R}$

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetri)*

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(ketaksamaan segitiga)*

Definisi 2.1.2 [3]

Diberikan $X = \{x_n\}$ *adalah barisan bilangan riil.* X *dikatakan naik jika memenuhi ketaksamaan :* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$

X *dikatakan turun jika memenuhi ketaksamaan :* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 35-45

Definisi 2.1.3 [3]
Jika $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ dikatakan naik pada A jika $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 \leq x_2$ kemudian $f(x_1) \leq f(x_2)$. Fungsi f dikatakan naik murni pada A jika $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 < x_2$ kemudian $f(x_1) < f(x_2)$.
Jika $A \subseteq \mathbb{R}$, fungsi $g: A \to \mathbb{R}$ dikatakan turun pada A jika $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 \leq x_2$ kemudian $g(x_1) \geq g(x_2)$. Fungsi g dikatakan turun murni pada A jika $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 < x_2$ kemudian $g(x_1) > g(x_2)$.

Definisi 2.1.4 [3]
Diberikan $X = \mathbb{R}$ dan (x_n) barisan di X. Barisan (x_n) dikatakan terbatas jika terdapat bilangan riil $M > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Setelah memahami konsep barisan terbatas di bilangan riil, berikut ini diberikan definisi mengenai subbarisan:

Definisi 2.1.5 [3]
Jika $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ suatu barisan naik murni dari bilangan asli maka (x_{n_k}) yang dinyatakan

$$\left(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\right)$$

disebut subbarisan dari $(x_n$

1.2 Ruang Metrik *Cone*

Definisi 2.2.1 [7]
Diberikan $A \subseteq X$. Titik $p \in X$ dikatakan titik interior A jika terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $N_\varepsilon(p) \subseteq A$. Himpunan semua titik interior A dinotasikan $int(A)$.
Definisi 2.2.2 [7]
Misalkan X suatu ruang vektor dengan norm dalam X merupakan pemetaan $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat berikut:
(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \forall\, \boldsymbol{x} \in X$
(ii) $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
(iii) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ *dan* $\boldsymbol{x} \in X$
(iv) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|, \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$
Pasangan $(X, \|.\|)$ disebut ruang norm.

Definisi 2.2.3 [7]
Diberikan $(X, \|.\|)$ suatu ruang norm. Jika setiap barisan Cauchy di X konvergen maka X disebut ruang norm yang lengkap. Ruang norm yang lengkap disebut juga dengan ruang Banach.

Definisi 2.2.4 [5]
Diberikan ruang Banach riil E, C subset E disebut suatu cone jika dan hanya jika:
i. $C \neq \emptyset$, $C \neq \{0\}$, *dan* $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ *berlaku* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in C$
ii. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *dimana* $a, b \geq 0$ *dan* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C$ *berlaku* $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in C$
iii. *Jika* $\boldsymbol{x} \in C$ *dan* $-\boldsymbol{x} \in C$ *maka* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 35-45

Definisi 2.2.5 [8]
Misalkan X suatu himpunan tak kosong. Relasi "$\preccurlyeq$" dikatakan urutan parsial pada X jika memenuhi
1. *untuk semua $a \in X$ berlaku $a \preccurlyeq a$* (refleksif)
2. *untuk $a, b \in X$, jika $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq a$ maka $a = b$* (anti-simetris)
3. *untuk $a, b, c \in X$, jika $a \preccurlyeq b$ dan $b \preccurlyeq c$ maka $a \preccurlyeq c$* (transitif)

Definisi 2.2.6 [5]
Diketahui $C \subseteq E$ dengan E suatu ruang Banach riil. Relasi "$\preccurlyeq$" dikatakan urutan parsial pada C yang didefinisikan dengan $x \preccurlyeq y$ atau $y \succcurlyeq x$ jika dan hanya jika $y - x \in C$

Definisi 2.2.7 [2]
Diberikan $X \neq \emptyset$, E suatu ruang Banach riil. Pemetaan $d: X \times X \longrightarrow (E, \preccurlyeq)$ disebut metrik cone pada X jika
(i) $d(x,y) \succcurlyeq 0,\ \forall\, x, y \in X\ ,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
(ii) $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$
(iii) $d(x,y) \preccurlyeq d(x,z) + d(z,y),\ \forall\, x, y, z \in X.$
Pasangan (X, d) disebut ruang metrik cone.

Definisi 2.2.8 [1]
Diberikan (X, d) suatu ruang metrik cone. Barisan (x_n) di X dikatakan
(a) *Barisan konvergen jika untuk setiap $\boldsymbol{c}$ di E dengan $\mathbf{0} \ll \boldsymbol{c}$, terdapat N sedemikian sehingga untuk semua $n > N$ berlaku $d(x_n, x) \ll \boldsymbol{c}$ untuk suatu titik tetap x di X,*
(b) *Barisan Cauchy jika untuk setiap$\boldsymbol{c}$ di E dengan $\mathbf{0} \ll \boldsymbol{c}$, terdapat N sedemikian sehingga untuk semua $m, n > N$ berlaku $d(x_m, x_n) \ll \boldsymbol{c}$.*

Definisi 2.2.9 [5]
Diberikan (X, d) suatu ruang metrik cone Jika setiap barisan Cauchy di $X, d)$ konvergen maka (X, d) disebut ruang metrik cone yang lengkap.

Definisi 2.2.10 [2]
Suatu cone C disebut regular jika setiap barisan naik di suatu ruang Banach E yang terbatas ke atas adalah konvergen yaitu suatu barisan $(\boldsymbol{x_n})$ di E sedemikian hingga
$\boldsymbol{x_1} \preccurlyeq \boldsymbol{x_2} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \boldsymbol{x_n} \preccurlyeq \boldsymbol{x_{n+1}} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \boldsymbol{y}$
untuk $\boldsymbol{y} \in E$ maka terdapat $\boldsymbol{x} \in E$ sedemikian hingga $\|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x}\| \to 0$.

Definisi 2.2.11 [2]
Suatu cone C disebut normal jika terdapat bilangan $k > 0$ sedemikian hingga untuk semua$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ berlaku
$\|\boldsymbol{x}\| \leq k\, \|\boldsymbol{y}\|$ *dengan* $\mathbf{0} \preccurlyeq \boldsymbol{x} \preccurlyeq \boldsymbol{y}$
Bilangan positif terkecil k yang memenuhi persamaan di atas disebut konstanta normal dari C.

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 35-45

Lemma 2.2.21 [5]
Setiap cone regular merupakan cone normal.

Berdasarkan Lemma 2.2.11, diketahui bahwa suatu *cone regular* juga merupakan *cone* normal, namun belum tentu bahwa *cone* normal merupakan *cone regular*.

Lemma 2.2.13[4]
Diberikan (X,d) suatu ruang metrik cone dengan cone regular P. kemudian d(x,y) $\in int\, P$, untuk x, y $\in X$ dengan $x \neq y$. Misalkan $\varphi: intP \cup \{0_E\} \to intP \cup \{0_E\}$ adalah fungsi dengan yang memenuhi sifat sebagai berikut :
(i) $\varphi(t) = 0_E$ jika dan hanya jika $t = 0_E$;
(ii) $\varphi(t) \ll_E t$, untuk $t \in intP$;
(iii) $\varphi(t) \leq_E d(x,y)$ atau $d(x,y) \leq_E \varphi(t)$, untuk $t \in intP \cup \{0_E\}$ dan $x, y \in X$.
Misalkan $\{x_n\}$ suatu barisan pada X dengan $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ adalah barisan turun. Maka $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ konvergen ke $r = 0_E$atau $r \in intP$.
Bukti
Diberikan $\{x_n\}$ sebuah barisan pada X dengan $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ monoton turun. Karena P cone regular dan $0 \leq d(x_n, x_{n+1})$,untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,maka berdasarkan Definisi 2.2.7 terdapat $r \in P$ sehingga

$$d(x_n, x_{n+1}) \to r \text{ dengan } n \to \infty$$

Jika $d(x_n, x_{n+1}) = 0$, untuk suatu n maka bedasarkan Definisi 2.1.2 terbukti $r = 0$. Selanjutnya dapat diasumsikan $\mathrm{d}(\mathrm{x_n}, \mathrm{x_{n+1}}) \neq 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Lalu, sesuai dengan yang diketahui pada Lemma, yaitu $\mathrm{d}(\mathrm{x_n}, \mathrm{x_{n+1}}) \in \mathrm{int\, P}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Andaikan $\mathrm{r} \neq 0$.
Karena P adalah cone regular, maka berdasarkan Lemma 2.2.10 P juga merupakan cone normal. Diberikan $B = \{t \in int\, P: \|t\| < \frac{\|r\|}{k}\}$, dimana K merupakan konstanta normal di cone P. Untuk setiap bilangan bulat positif a dengan $a < \frac{\|r\|}{k}$, dan $t \in int\, P$, maka $\frac{at}{\|t\|} \in B$. Jadi B adalah himpunan tak kosong. Selanjutnya diasumsikan untuk setiap $\mathrm{t} \in \mathrm{B}$,berlaku

$$\Phi(t) \leq d(x_n, x_{n+1}), \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Andaikan, terdapat $\mathrm{t_0} \in \mathrm{B}$. Akibatnya terdapat bilangan postif m sehingga

$$d(x_m, x_{m+1}) < \Phi(t_0)$$

Karena $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ monoton turun, diperoleh

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_m, x_{m+1}) < \Phi(t_0), \text{ untuk setiap } n \geq m,$$

yang mengakibatkan $\mathrm{d}(\mathrm{x_n}, \mathrm{x_{n+1}}) < \Phi(\mathrm{t_0})$, untuk setiap $n \geq m$.
Dimisalkan $\mathrm{n} \to \infty$ pada ketaksamaan diatas, diperoleh

$$r \leq \Phi(t_0) \ll t_0,$$

Yang mengakibatkan $\|r\| < K\|t_0\|$, dimana K merupakan konstanta normal pada cone P.
Ketaksamaan $\|t_0\| \geq \frac{\|r\|}{K}$, yang kontradiksi dengan asumsi bahwa $t_0 \in B$.
Maka untuk setiap $t \in B$, $\Phi(t) \leq d(x_n, x_{n+1})$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Untuk $n \to \infty$ pada pertaksamaan diatas, diperoleh $\Phi(t) \leq r$.
Oleh karena itu, untuk setiap $t \in B$,

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 35-45

$r - \Phi(t) \in P, yaitu = \Phi(t) + q,$ untuk suatu $q \in P$.
Jadi, $0 \leq q \ll \Phi(t) + q$ .karena $\Phi(t) \in int\ P$, untuk setiap $t \in B$. diperoleh

$$0 \ll \Phi(t) + q; \text{ dengan } 0 \ll r.$$

Maka dapat disimpulkan bahwa r ∈ int P. ■

Definisi 2.2.13 [5]
Diberikan (X, d) suatu ruang metrik cone Jika setiap barisan Cauchy di (X, d) konvergen maka (X, d) disebut ruang metrik cone yang lengkap.

2.3 *Coincidence Point, Point of Coincidence* dan Kompatibel Lemah

Konsep teorema titik tetap persekutuan di ruang metrik cone selain memenuhi cone regular atau cone normal juga memenuhi kondisi pemetaan yang bersifat kompatibel lemah. Berikut ini diberikan definisi *coincidence point* dan *point of coincidence* ,yaitu :

Definisi 2.3.1[1]
Diberikan (X,d) suatu ruang metric cone dan f dan g self-maps pada X. jika w = fx =gx untuk suatu $x \in X$, maka x disebut coincidence point dari f dan g sedangkan w disebut point of coincidence dari f dan g.
Berdasarkan definisi di atas,diketahui bahwa sebarang w $\in X$ sedemikian hingga berlaku *w = fx =gx* untuk suatu $x \in X$ maka w disebut *point of coincidence* dari *f* dan *g*.

Definisi 2.3.2 [9]
Dua self-maps f dan g pada ruang metric cone X disebut kompatibel lemah jika fx= gx untuk suatu $x \in X$. berlaku fgx = gfx

2.4 Titik Tetap dan Titik Tetap Persekutuan

Definisi 2.4.1 [7]
Diberikan X himpunan tak kosong dan pemetaan $T: X \longrightarrow X$.. $x \in X$ dikatakan titik tetap dari T jika dan hanya jika $T(x) = x$.
Selanjutnya notasi $T(x)$ yang menyatakan pemetaan T untuk suatu $x \in X$ dapat dituliskan menjadi Tx. Setelah mengetahui definisi dari kompatibel lemah dan point of coincidence berikut ini diberikan definisi titik tetap persekutuan yaitu sebagai berikut :

Definisi 2.4.2 [1]
Diberikan f dan g self-maps kompatibel lemah dari himpunan X. jika f dan g memiliki point of coincidence w = fx = gx tunggal, maka w adalah titik tetap persekutuan tunggal dari f dan g.

2.5 Pemetaan kontraktif

Adapun definisi dari pemetaan kontraktif dinyatakan seperti di bawah ini:

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 35-45

Definisi 2.5.1 [7]
Diberikan $X = (X, d)$ suatu ruang metrik dan $X \neq \emptyset$. Pemetaan $T: X \to X$ dikatakan pemetaan kontraktif pada X jika terdapat bilangan riil positif α dengan $\alpha < 1$ sedemikian hingga

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq \alpha d(x, y), \forall\, x, y \in X.$$

3. METODE PENELITIAN

Penulisan dilakukan melalui studi literatur. Prosedur yang digunakan dalam penelitian ini adalah Membuktikan barisan (y_n) adalah barisan Cauchy pada ruang metrik *cone*, menunjukkan pemetaan γ dan α mempunyai *coincidence point*, menunjukkan pemetaan δ dan β mempunyai *coincidence point*, dan menunjukkan pemetaan α, β, γ dan δ mempunyai titik tetap persekutuan yang tunggal.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibuktikan teorema titik tetap persekutuan dengan cone regular dari empat pemetaan kontraktif pada ruang metrik cone:

4.1 Teorema titik tetap persekutuan dengan cone regular

Teorema 4.1
Diberikan (X,d) suatu ruang metrik cone dengan cone P
- *(a) Ruang metrik cone (X,d) lengkap,*
- *(b) P adalah cone regular;*
- *(c) $d(x, y) \in intP$ untuk semua x,y ∈ X sehingga $x \neq y$;*

Diberikan suatu pemetaan β, α, γ ,δ : $X \to X$ untuk setiap pasangan $(x, y) \in X \times X$ sehingga $\beta X \subseteq \gamma X$ dan $\alpha X \subseteq \delta X$ dan

$$\Phi_1\big(d(\alpha x, \beta y)\big) \leq \psi_1\left(d(\gamma x, \delta y), d(\gamma x, \alpha x), d(\delta y, \beta y), \frac{1}{2}[d(\gamma x, \beta y) + (\delta y, \alpha x)]\right) - \psi_2\big(d(\gamma x, \delta y)\big) \qquad (4.1)$$

Dimana ψ_1 : $P^4 \to P$ dan ψ_2 : $intP \cup \{0_E\} \to intP \cup \{0_E\}$ adalah fungsi kontinu dengan sifat sebagai berikut :
- *(d) ψ_1 adalah monoton naik disemua empat variabel;*
- *(e) $\phi_1(t) = \psi_1(t, t, t, t)$ untuk setiap $t \in P$;*
- *(f) $\psi_1(t_1, t_2, t_3, t_4) = 0_E$ jika dan hanya jika $\psi_2(t) = 0_E$ jika dan hanya jika $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t = 0_E$;*
- *(g) $\psi_2(t) \ll_E t$ untuk semua $t \in intP$;*
- *(h) $\psi_2(t) \leq_E d(x, y)$ atau $d(x, y) \leq_E \psi_2(t)$ untuk $t \in intP \cup \{0_E\}$ dan $x, y \in X$.*

Jika salah satu rentang αX, βX, γX, dan δX adalah subset tertutup dari (X,d) maka:
- *Pasangan { α,γ } mempunyai coincidence point;*
- *Pasangan { β,δ } mempunyai coincidence point.*

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 35-45

Jika pasangan { α,γ } dan { β,δ }kompatibel lemah, maka α, β, γ dan δ *mempunyai titik persekutuan yang tunggal.*

Bukti.

Langkah 1 : Menunjukkan eksistensi coincidence point dari pasangan pemetaan { α,γ } dan { β,δ }

Misalkan x_0 titik sebarang di X. Karena $\beta X \subseteq \gamma X$ dan $\alpha X \subseteq \delta X$, kita dapat mendefinisikan barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ di Xdengan

$$y_{2n-1} = \alpha x_{2n-2} = \delta x_{2n-1},\ y_{2n} = \beta x_{2n-1} = \gamma x_{2n},\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

- Pertama klaim bahwa $\{y_n\}$ adalah barisan Cauchy di ruang metrik *cone* (X, d)

Andaikan bahwa terdapat $p\epsilon\ \mathbb{N}^*$ sehingga $y_{2p} = y_{2p+1}$. Pilih $x = x_{2p}$ dan $y = x_{2p+1}$ dan digunakan pada fungsi Φ_1 di (4.1), diperoleh

$$\phi_1\left(d(y_{2p+2,}y_{2p+1})\right)$$
$$= \phi_1\left(d(\alpha x_{2p}, \beta x_{2p+1})\right)$$
$$\leq_E \psi_1(d(\gamma x_{2p}, \delta x_{2p+1}), d(\gamma x_{2p,}\alpha x_{2p}), d(\delta x_{2p+1,}\beta x_{2p+1}), \tfrac{1}{2}[d(\gamma x_{2p,}\beta x_{2p+1})$$
$$+d(\delta x_{2p+1,}\alpha x_{2p})])-\psi_2(d(\gamma x_{2p,}\delta x_{2p+1}))$$
$$= \psi_1(d(y_{2p+1,}y_{2p}), d(y_{2p,}y_{2p+1}), d(y_{2p+1,}y_{2p+2}), \tfrac{1}{2}d(y_{2p,}y_{2p+2})) \tag{4.3}$$
$$-\psi_2(d(y_{2p+1,}y_{2p}))$$
$$= \psi_1(0_{E,}0_{E,}d(y_{2p+1,}y_{2p+2}), \tfrac{1}{2}d(y_{2p,}y_{2p+2})) \tag{4.4}$$

Berdasarkan poin (d) pada Teorema yaitu $\psi_1$adalah fungsi naik kuat pada ke empat variabel, maka pada kasus khusus berlaku

$d(y_{2p+1,}y_{2p+2}) \leq_E 0_{E,}$.

selanjutnya dipilih $x = x_{2n+1}$ dan $y = x_{2n+2}$ dan berdasarkan persamaan (4.1), diperoleh

$$\phi_1\left(d(y_{2n+2,}y_{2n+3})\right)$$
$$\leq_E \psi_1(d(y_{2n+1,}y_{2n+2}), d(y_{2n+1,}y_{2n+2}), d(y_{2n+2,}y_{2n+3}), \tfrac{1}{2}d(y_{2n+1,}y_{2n+3})) \tag{4.5}$$

$$-\psi_2(d(y_{2n+1,}y_{2n+2}))$$

Dengan cara yang serupa, dapat disimpulkan bahwa

$$d(y_{2n+2,}y_{2n+3}) \leq_E d(y_{2n+1,}y_{2n+2}), \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.6}$$

Sekarang akan ditunjukkan, tanpa menghilangkan generalitasnya, bahwa γX adalah subset tertutup pada ruang metrik *cone* (X, d). Berdasarkan persamaan (4.1), terdapat $u \in X$ sehingga $z = \gamma u$. misalkan $\alpha u = z$, dari persamaan (4.1)

$$\Phi_1(d(\alpha u, \beta x_{2n+1})) \tag{4.7}$$
$$\leq_E \psi_1(d(\gamma u, \delta x_{2n+1}), d(\gamma u, \alpha u), d(\delta x_{2n+1}, \beta x_{2n+1}$$
$$\frac{1}{2}[d(\gamma u, \beta x_{2n+1}) + d(\alpha u, \delta x_{2n+1})])$$
$$-\psi_2(d(\gamma u, \delta x_{2n+1})).$$

Pada limit terbatas seperti $n \to +\infty$ dari fungsi kontinu ψ_1, ψ_2, diperoleh

$$\Phi_1\big(d(\alpha u, z)\big) \leq_E \psi_1(0_E, d(z, \alpha u), 0_E, \frac{1}{2}d(\alpha u, z)) - \psi_2(0_E)$$
$$= \psi_1(0_E, d(z, \alpha u), 0_E, \tfrac{1}{2}d(\alpha u, z)) .$$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 35-45

Oleh karena itu, fakta bahwa ψ_1 naik kuat sehubungan dengan adanya variabel pertama menghasilkan

$$d(\alpha u, z) \leq_E 0_E$$

Akibatnya,

$$\alpha u = z \tag{4.8}$$

Persamaan yang telah diperoleh yaitu, $\alpha u = \gamma u = z$, artinya u adalah *coincidence point* pada γ dan α.

Dari $\alpha X \subset \delta X$ dan persamaan (4.8), diperoleh $z \in \delta X$. dapat disimpulkan bahwa terdapat $v \in X$ sehingga $z = \delta v$. misalkan $\beta v = z$. Dari persamaan (4.1), diperoleh

$$\begin{aligned}\Phi_1(d(z,\beta v) &= \Phi_1(d(\alpha u,\beta v)\\ &\leq_E \psi_1\left(d(\gamma u,\delta v), d(\gamma u,\alpha u), d(\delta v,\beta v), \frac{1}{2}[d(\gamma u,\beta v)+d(\alpha u,\delta v)]\right)\\ &\quad - \psi_2(d(\gamma u,\delta v))\\ &= \psi_1(d(z,z), d(z,z), d(z,\beta v), \frac{1}{2}[d(z,\beta v)+d(z,\delta v)]) - \psi_2(d(z,z))\\ &= \psi_1(0_E, 0_E, d(z,\beta v), \frac{1}{2}d(z,\beta v))\end{aligned}$$

ψ_1 naik kuat berdasarkan variabel pertama, sehingga $d(z,\beta v) \leq_E 0_E$, yaitu

$$Tv = z \tag{4.9}$$

Diperoleh $\delta v = \beta v = z$, sehingga v adalah *coincidence point* pada δ dan β.

Langkah 2 : Menunjukkan eksistensi titik tetap persekutuan empat pemetaan

Karena pasangan $\{\alpha,\gamma\}$ *kompatibel lemah*, dari persamaan (4.8), diperoleh $\alpha z = \alpha\gamma u = \gamma\alpha u = \gamma z$. Misalkan $\alpha z = z$. Dari persamaan (4.1), diperoleh

$$\begin{aligned}\Phi_1(d(\alpha z,\beta x_{2n+1})) &\leq_E \psi_1(d(\gamma z,\delta x_{2n+1}), d(\gamma z,\alpha z), d(\delta x_{2n+1},\beta x_{2n+1}),\\ &= \psi_1(d(\alpha z,\delta x_{2n+1}), 0_E, d(\delta x_{2n+1},\beta x_{2n+1}),\\ &\quad \tfrac{1}{2}[d(\alpha z,\beta x_{2n+1})+d(\alpha z,\delta x_{2n+1})]) - \psi_2(d(\alpha z,\delta x_{2n+1})\end{aligned} \tag{4.10}$$

Pada limit dengan batas $\to +\infty$, diperoleh

$$\begin{aligned}\Phi_1(d(\alpha z,z)) &\leq_E \psi_1\big(d(\alpha z,z), 0_E, 0_E, d(\alpha z,z)\big) - \psi_2(d(\alpha z,z))\\ &\leq_E \Phi_1(d(\alpha z,z)) - \psi_2(d(\alpha z,z)).\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\psi_2\big(d(\alpha z,z)\big) \in P \cap (-P) = \{0_E\}$. Maka diperoleh

$$\alpha z = z = \gamma z \tag{4.11}$$

Karena pasangan $\{\beta,\delta\}$ *kompatibel lemah*, dari persamaan (4.9), diperoleh $\beta z = \beta\delta v = \delta\beta v = \delta z$. Misalkan $\beta z = z$. Maka berdasarkan persamaan (4.1), diperoleh

$$\begin{aligned}\Phi_1(d(z,\beta z)) = \Phi_1(d(\alpha z,\beta z)) &\leq_E \psi_1(d(\gamma z,\delta z), d(\gamma z,\alpha z), d(\delta z,\beta z),\\ &\quad \tfrac{1}{2}[d(\gamma z,\beta z)+d(\alpha z,\delta z)]) - \psi_2(d(\gamma z,\delta z))\\ &= \psi_1(d(z,\beta_z), 0_E, 0_E, d(z,\beta_z)) - \psi_2\big(d(z,\beta_z)\big)\\ &\leq_E \Phi_1(d(z,\beta z)) - \psi_2\big(d(z,\beta z)\big).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Akibatnya, $\psi_2\big(d(z,\beta z)\big) \in P \cap (-P) = \{0_E\}$. Maka diperoleh

$$\beta z = z = \delta z. \tag{4.13}$$

Selanjutnya, dengan menggabungkan persamaan (4.11) dan persamaan (4.13), dapat disimpulkan

$$z = \gamma z = \alpha z = \beta z = \delta z,$$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 35-45

Jadi *z* merupakan titik tetap persekutuan pada ke empat pemetaan γ,δ,α dan β.

Langkah 3 : Menunjukkan ketunggalan titik tetap persekutuan empat pemetaan

Diasumsikan dengan suatu pernyataan yang bertentangan, yaitu $\alpha u = \beta u = \gamma u = \delta u = u$ dan $\alpha v = \beta v = \gamma v = \delta v = v$ tetapi $u \neq v$. Dengan asumsi tersebut, *x* dapat digantikan dengan u dan *y* dapat digantiakan dengan *v* pada persamaan (4.1) untuk memperoleh

$$\begin{aligned}\Phi_1(d(u,v)) &= \Phi_1(d(\alpha u,\beta v))\\ &\leq_E \psi_1(d(\gamma u,\delta v), d(\gamma u,\alpha u), d(\delta v,\beta v), \tfrac{d(\gamma u,\beta v)+d(\alpha u,\delta v)}{2}\\ &\quad -\psi_2\big(d(\gamma u,\delta v)\big)\\ &= \psi_1(d(u,v), 0_E, 0_E, d(u,v)) - \psi_2\big(d(u,v)\big)\\ &\leq_E \Phi_1\big(d(u,v)\big).\end{aligned}$$

Sebuah kontradiksi, jadi $u = v$. dapat kita simpulkan bahwa α, β, γ, dan δ hanya memiliki satu titik tetap persekutuan pada *X*. ∎

5. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini dapat disimpulkan bahwa titik tetap persekutuan dengan cone regular dari empat pemetaan α, β, γ dan δ yang memenuhi ketaksamaan

$$\Phi_1\big(d(\alpha x,\beta y)\big) \leq \psi_1\Big(d(\gamma x,\delta y), d(\gamma x,\alpha x), d(\delta y,\beta y), \tfrac{1}{2}[d(\gamma x,\beta y) + (\delta y,\alpha x)]\Big) - \psi_2\big(d(\gamma x,\delta y)\big)$$

dan pasangan $\{\alpha,\gamma\}$ dan $\{\beta,\delta\}$ pemetaan kompatibel lemah maka pemetaan α, β, γ dan δ memiliki titik tetap persekutuan yang tunggal.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abbas, M. & G. Jungck. 2007. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.341*: 416-420.
[2] Alimohammady, M., J. Balooee, S. Radojevic, V. Rakocevic, M. Roohi. 2011. Conditions of regularity in cone metric spaces. *Applied Mathematics and ComputationElsevier.217*: 6359-6363.
[3] Bartle, R. G., & D. R . Shelbert. 2000. *Introductory to Real Analysis.*Edisi ke-3. John Wiley dan Sons. Inc, New York.
[4] Binayak S. Choudhury and N Metiya, Fixed Points Of Weak Contraction in Cone Metric Spaces, Nonlinier Anal. 72(2010)1589-1593. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2009.08.040
[5] Guang, H.L & Z. Xian. 2006. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.**332***: 1468–1476.
[6] H. Aydi, H. K. Nashine. 2012. Common Fixed Point for Generalized Contractive Mappings in Cone Metric Space. Vol. 2012, *Article ID jnaa-00133, p. 12, doi : 10.5899/2012/jnaa-00133.*

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.2 (Desember 2019) Hal. 35-45

[7] Kreyszig, E. 1978.*Introductory Functional Analysis with Applications.*University of Windsor, Canada
[8] Munkres, J.R. 2000. *Topology*. Edisi ke-2. Massachusetts Institute of Technology, United States of America
[9] Song, Guangxing, Sun, Xiaoyan, Zhao, Yian, dan Wang, Guatao. 2010. New Common Fixed Point Theorems for Maps on Cone Metric Space. *Applied Mathematics Latters 23 1033-1037.*