Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.15 No.1 (Juni 2021) Hal. 1-12

STRUKTUR HEMIRING

Noviliani, Saman Abdurrahman, Na'imah Hijriati

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
Email: novinhibu99@gmail.com

ABSTRACT

Hemiring is a non-empty set R which is equipped with the addition operation "$+$" and the multiplication operation "$\cdot$" and satisfied four conditions, namely: $(R,+)$ is a commutative monoid with an identity element of 0, $(R,\cdot)$ a semigroup, satisfied distributive properties the multiplication over addition on both sides, and satisfied $0\cdot\tau=0=\tau\cdot 0$ for each $\tau\in R$. There are several types of hemiring such as idempotent hemiring, zerosumfree hemiring, simple hemiring and others. In this paper, it discusses the sufficient and necessary conditions of a hemiring that is said to be commutative and said to be simple, prove the characteristics of the operation in zerosumfree hemiring, idempotent hemiring, and simple hemiring.

Keywords: *hemiring, commutative, zerosumfree, idempotent, simple hemiring.*

ABSTRAK

Hemiring adalah suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan "$+$" dan operasi perkalian "$\cdot$" dan memenuhi empat kondisi yaitu : $(R,+)$ adalah monoid komutatif dengan elemen identitas $0, (R,\cdot)$ adalah semigrup, berlaku sifat distributif operasi perkalian terhadap penjumlahan di kedua sisi, dan berlaku $0\cdot\tau= 0 =\tau\cdot 0$ untuk setiap$\tau\in R$. Terdapat beberapa jenis dari hemiring seperti hemiring idempoten, hemiring *zerosumfree*, hemiring simpel dan lainnya. Dalam artikel ini membahas mengenai syarat cukup dan syarat perlu dari suatu hemiring dikatakan komutatif dan dikatakan simpel, pembuktian sifat-sifat operasi pada hemiring *zerosumfree*, hemiring idempoten, dan hemiring simpel.

Kata Kunci*:* hemiring, komutatif, *zerosumfree*, idempoten, hemiring simpel.

1. LATAR BELAKANG

Pada tahun 1943 Vandiver memperkenalkan semiring. Semiring adalah generalisasi dari ring dengan elemen satuan karena semiring tidak memiliki invers pada operasi penjumlahan. Pada perkembangan selanjutnya, Grillet dan Grillet 1971 [6], 1972 [7] meneliti *ideal-free* dan semisimple semiring menggunakan teknik teori semigrup. Selanjutnya, hemiring adalah semiring tanpa elemen satuan pada operasi perkalian. Hemiring juga bisa dikatakan sebagai generalisasi dari ring yaitu pada operasi penjumlahan merupakan monoid komutatif. Pada tahun 2007 Zhan dan kawan-kawan [8] menemukan konsep dari *h-hemiregularity* dari hemiring dan meneliti beberapa sifat di teori *fuzzy*. Yin dan kawan-kawan [9] menemukan notasi hemiring *h-semisimple* dan karakterisasi dengan ideals *fuzzy* di tahun 2008. *S*elanjutnya, M. Gulistan dan kawan-kawan [10] mengkarakterisasi *gamma* hemiring dalam *level-cut* dari generalisasi *fuzzy* di tahun 2015. Selain yang telah disebutkan sebelumnya, masih terdapat banyak peneliti yang mempelajari tentang hemiring, salah satunya Golan yang menyebutkan dalam bukunya beberapa jenis dari hemiring yaitu hemiring komutatif, hemiring idempoten, hemiring *zerosumfree*, hemiring simpel dan lainnya. Hemiring komutatif adalah hemiring yang memiliki sifat komutatif pada operasi perkalian. Hemiring idempoten yaitu saat setiap elemen hemiring merupakan elemen idempoten. Jika hanya penjumlahan dua elemen nol yang menghasilkan nol pada hemiring maka hemiring tersebut disebut hemiring *zerosumfree*. Selanjutnya, hemiring disebut hemiring simpel jika elemen satuan dijumlahkan dengan setiap elemen yang lain di hemiring menghasilkan elemen satuan tersebut.

Dalam artikel ini membahas mengenai struktur hemiring ini yaitu dengan membuktikan beberapa proposisi, teorema, dan lemma terkait hemiring komutatif, hemiring *zerosumfree*, hemiring idempoten, dan hemiring simpel.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner yang besifat assositif disebut semigrup, dan semigrup yang memiliki elemen identitas disebut monoid [1]. Lebih lanjut, monoid dikatakan komutatif karena memiliki operasi biner yang komutatif. Berikut diberikan definisi semigrup dan monoid komutatif.

Definisi 2.1 [2] Suatu himpunan yang tak kosong R, dilengkapi oleh operasi pertama yaitu penjumlahan "$+$" dan operasi kedua yaitu perkalian "$\cdot$" disebut hemiring jika memenuhi kondisi berikut.

1. $(R, +)$ merupakan monoid komutatif,
2. R dengan operasi perkalian adalah semigrup,
3. Berlaku sifat distributif operasi perkalian terhadap penjumlahan di kedua sisi,
4. Berlaku $0 \cdot \tau = 0 = \tau \cdot 0$ untuk setiap $\tau \in R$.

Analog dengan ring, pada konsep hemiring terdapat juga pengertian elemen satuan, subhemiring dan hemiring komutatif yang dinyatakan berturut-turut sebagai berikut

Definisi 2.2 [5] Diberikan hemiring R. Elemen $1 \in R$ dengan $1 \neq 0$ disebut elemen satuan dari R jika memenuhi $1 \cdot \tau = \tau = \tau \cdot 1$ untuk setiap $\tau \in R$. Selanjutnya, jika hemiring mempunyai elemen satuan disebut hemiring dengan elemen satuan.

Teorema 2.3 [3] Jika terdapat suatu elemen identitas pada operasi biner maka elemen identitas tersebut tunggal.

Definisi 2.4 [5] Diberikan hemiring R. Himpunan bagian yang tak kosong A dari R disebut subhemiring dari R jika memuat nol dan tertutup terhadap operasi penjumlahan serta operasi perkalian dari R.

Definisi 2.5 [5] Suatu hemiring R dikatakan komutatif jika pada $(R,\cdot)$ memenuhi $\tau \cdot \eta = \eta \cdot \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$.

Selanjutnya, berikut diberikan beberapa jenis hemiring.

Definisi 2.6 [2] Sebuah hemiring $(R,+,\cdot)$ disebut hemiring *zerosumfree* jika terdapat $\tau, \tau' \in R$ yang memenuhi $\tau + \tau' = 0$ maka $\tau = \tau' = 0$.

Definisi 2.7 [2] Suatu elemen τ dari hemiring R disebut elemen idempoten penjumlahan jika $\tau + \tau = \tau$ untuk setiap $\tau \in R$. Selanjutnya himpunan semua elemen idempoten penjumlahan dari R dinotasikan dengan $I^{+}(R)$. Hemiring R dikatakan idempoten penjumlahan jika $I^{+}(R) = R$.

Definisi 2.8 [2] Suatu elemen τ dari hemiring R disebut elemen idempoten perkalian jika $\tau^2 = \tau$ untuk setiap $\tau \in R$. Selanjutnya himpunan semua elemen idempoten perkalian dari R dinotasikan menjadi $I^{\times}(R)$. Hemiring R dikatakan idempoten perkalian jika $I^{\times}(R) = R$.

Definisi 2.9 [2] Suatu elemen τ dari hemiring R disebut elemen idempoten jika τ adalah elemen idempoten penjumlahan sekaligus elemen idempoten perkalian. Selanjutnya himpunan dari semua elemen yang idempoten di R dinotasikan dengan $I(R)$. Hemiring R dikatakan idempoten jika idempoten penjumlahan sekaligus idempoten perkalian, yaitu $I(R) = I^{+}(R) = I^{\times}(R) = R$.

Definisi 2.10 [2] Suatu elemen τ dari hemiring R disebut elemen almost idempoten jika $\tau = \tau^2$, dan hemiring R dikatakan *almost* idempoten jika setiap elemennya merupakan *almost* idempoten.

Definisi 2.11 [5] Suatu elemen ζ dari hemiring R dikatakan *infinity* jika $\zeta + \tau = \zeta$ untuk setiap $\tau \in R$.

Definisi 2.12 [5] Hemiring R dengan elemen satuan 1 adalah simpel jika 1 adalah *infinity*.

3. METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, langkah–langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Menjelaskan teorema ketunggalan identitas, definisi *rectangular band* terhadap $(R,+)$, *rectangular band* terhadap semigrup $(R,\cdot)$, hemiring, idempoten penjumlahan, idempoten perkalian, idempoten, *almost* idempoten dan hemiring simpel.
2. Menentukan syarat cukup dan syarat perlu suatu himpunan tak kosong merupakan hemiring komutatif.

3. Menentukan syarat cukup suatu hemiring bersifat *zerosumfree,* idempoten, dan membuktikan sifat-sifat operasi pada hemiring *zerosumfree,* hemiring idempoten.
4. Menentukan syarat cukup, syarat perlu suatu hemiring merupakan hemiring simpel dan membuktikan sifat-sifat operasi pada hemiring simpel.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hemiring Komutatif

Berikut ini merupakan syarat perlu dan syarat cukup suatu hemiring bersifat komutatif.

Proposisi 4.1.1 Diberikan himpunan yang tak kosong R dan dilengkapi operasi biner $+$ serta $\cdot$ sedemikian sehingga 1 dan 0 termuat di R. Himpunan R merupakan hemiring komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $\zeta, \eta, \vartheta, \upsilon, \omega \in R$ dipenuhi:

1. $\zeta + 0 = \zeta = 0 + \zeta$,
2. $\zeta \cdot 1 = \zeta$,
3. $0 \cdot \zeta = 0$,
4. $[(\zeta \cdot \omega + \eta) + \vartheta] \cdot \upsilon = \upsilon \cdot \eta + [\zeta \cdot (\omega \cdot \upsilon) + \vartheta \cdot \upsilon]$.

Bukti : ($\Longrightarrow$) Karena R merupakan hemiring komutatif dan $1 \in R$, berdasarkan Definisi 2.2, kondisi 2 dipenuhi dan berdasarkan Definisi 2.1 dipenuhi kondisi 1 dan 3. Selanjutnya hanya perlu membuktikan kondisi 4. Diambil $\zeta, \eta, \vartheta, \upsilon, \omega \in R$

$$\begin{aligned}[(\zeta \cdot \omega + \eta) + \vartheta] \cdot \upsilon &= \eta \cdot \upsilon + [\zeta \cdot (\omega \cdot \upsilon) + \vartheta \cdot \upsilon] \\ &= \upsilon \cdot \eta + [\zeta \cdot (\omega \cdot \upsilon) + \vartheta \cdot \upsilon].\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Pertama akan dibuktikan operasi perkalian dan operasi penjumlahan bersifat komutatif di R. Diambil sebarang $\zeta, \eta \in R$

$$\begin{aligned}\zeta + \eta &= [(\zeta \cdot 1 + \eta) + 0] \cdot 1 \\ &= 1 \cdot \eta + [\zeta \cdot (1 \cdot 1) + 0 \cdot 1] = \eta + \zeta, \text{ dan}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta \cdot \zeta &= [(0 \cdot 0 + \eta) + 0] \cdot \zeta \\ &= \zeta \cdot \eta + [0 \cdot (0 \cdot \zeta) + 0 \cdot \zeta] = \zeta \cdot \eta.\end{aligned}$$

Jadi operasi penjumlahan serta operasi perkalian di R bersifat komutatif.

Selanjutnya akan dibuktikan sifat asosiatif pada operasi penjumlahan dan operasi perkalian. Diambil sebarang $\zeta, \eta, \vartheta, \upsilon \in R$

$$\begin{aligned}(\zeta + \eta) + \vartheta &= [(\eta \cdot 1 + \zeta) + \vartheta] \cdot 1 \\ &= 1 \cdot \zeta + [\eta \cdot (1 \cdot 1) + \vartheta \cdot 1] = \zeta + (\eta + \vartheta), \text{ dan}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\zeta \cdot \upsilon) \cdot \vartheta &= [(\zeta \cdot \upsilon + 0) + 0] \cdot \vartheta \\ &= \vartheta \cdot 0 + [\zeta \cdot (\upsilon \cdot \vartheta) + 0 \cdot \vartheta] = \zeta \cdot (\upsilon \cdot \vartheta).\end{aligned}$$

Jadi operasi penjumlahan serta operasi perkalian bersifat asosiatif di R.

Selanjutnya akan dibuktikan sifat distributif. Diberikan sebarang $\zeta, \eta, \vartheta \in R$

$$\begin{aligned}(\zeta + \eta) \cdot \vartheta &= [(\zeta \cdot 1 + \eta) + 0] \cdot \vartheta \\ &= \vartheta \cdot \eta + [\zeta \cdot (1 \cdot \vartheta) + 0 \cdot \vartheta]\end{aligned}$$

$= \eta \cdot \vartheta + \zeta \cdot \vartheta = \zeta \cdot \vartheta + \eta \cdot \vartheta$.

Jadi berlaku sifat distributif di R. Jadi berdasarkan hasil analisa di atas R merupakan hemiring komutatif.■

4.2 Hemiring *Zerosumfree* dan Hemiring Idempoten

Propsosisi berikut merupakan syarat cukup suatu hemiring bersifat *zerosumfree.*

Proposisi 4.2.1 Diberikan hemiring R dengan elemen satuan. Jika $\varrho = \varrho + 1$ untuk suatu $\varrho \in R$ maka R merupakan *zerosumfree*.

Bukti: Diambil sebarang $\tau, \tau', \varrho \in R$ dengan $\varrho = \varrho + 1$ dan $\tau + \tau' = 0$. Karena berdasarkan Definisi 2.1, $0 \in R$ dan berlaku $\tau \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \tau$ untuk setiap $\tau \in R$.

$$
\begin{aligned}
0 = 0 \cdot \varrho &= (\tau + \tau') \cdot \varrho \\
&= \tau \cdot \varrho + \tau' \cdot \varrho \\
&= \tau \cdot (\varrho + 1) + \tau' \cdot (\varrho + 1) \\
&= \tau \cdot (\varrho + 1) + \tau' \cdot (\varrho + 1 + 1) \\
&= \tau \cdot \varrho + \tau + \tau' \cdot \varrho + \tau' + \tau' \\
&= (\tau + \tau') + \tau' + (\tau + \tau') \cdot \varrho \\
&= 0 + \tau' + 0 \cdot \varrho = \tau'.
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, $\tau' = 0$, yang mengakibatkan $0 = \tau + \tau' = \tau + 0 = \tau$ atau dapat ditulis $\tau = \tau' = 0$. Jadi terbukti R merupakan *zerosumfree.*■

Proposisi berikut membahas mengenai hubungan antara hemiring idempotent perkalian dengan idempotent penjumlahan.

Proposisi 4.2.2 Jika hemiring idempoten perkalian R yang memenuhi kondisi $\tau + \tau \cdot \eta + \tau = \tau = \tau + \eta \cdot \tau + \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$, maka R merupakan idempoten penjumlahan dan dalam penjumlahan memenuhi kondisi $\tau \cdot \eta + \eta \cdot \tau = \tau \cdot \eta$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$.

Bukti: Diberikan sebarang $\tau \in I^{\times}(R)$ sehinggap $\tau^2 = \tau$.

$$
\begin{aligned}
\tau + \tau &= (\tau + \tau)^2 \\
&= \tau^2 + \tau^2 + \tau^2 + \tau^2 \\
&= \tau + \tau^2 + \tau^2 + \tau \\
&= \tau + (\tau + \tau) \cdot \tau + \tau = \tau.
\end{aligned}
$$

Jadi τmerupakan elemen idempoten penjumlahan. Karena τ sebarang elemen di $I^{\times}(R)$ dan $I^{\times}(R) = R$ akibatnya $I^{\times}(R) = R = I^{+}(R)$. Selanjutnya, akan dibuktikan $\tau \cdot \eta + \eta \cdot \tau = \tau \cdot \eta$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$. Diberikan $\tau, \eta \in I(R)$.

$$
\begin{aligned}
\tau \cdot \eta + \eta \cdot \tau &= \tau \cdot \eta + \tau \cdot \eta + \eta \cdot \tau \\
&= \tau \cdot \eta + \eta \cdot \tau + \tau \cdot \eta \\
&= (\tau \cdot \eta + \eta \cdot \tau + \tau \cdot \eta)^2 \\
&= \tau \cdot \eta \cdot (\tau \cdot \eta + \eta \cdot \tau + \tau \cdot \eta) + \eta \cdot \tau \cdot (\tau \cdot \eta + \eta \cdot \tau + \tau \cdot \eta) \\
&\quad + \tau \cdot \eta \cdot (\tau \cdot \eta + \eta \cdot \tau + \tau \cdot \eta) \\
&= [(\tau \cdot \eta)^2 + \tau \cdot \eta^2 \cdot \tau + (\tau \cdot \eta)^2] + [\eta \cdot \tau^2 \cdot \eta + (\eta \cdot \tau \cdot \eta) \cdot \tau + \\
&\quad \eta \cdot \tau^2 \cdot \eta] + [(\tau \cdot \eta)^2 + (\tau \cdot \eta^2) \cdot \tau + (\tau \cdot \eta)^2]
\end{aligned}
$$

$$= [\tau \cdot \eta + (\tau \cdot \eta) \cdot \tau + \tau \cdot \eta] + [\eta \cdot \tau \cdot \eta + (\eta \cdot \tau \cdot \eta) \cdot \tau + \eta \cdot \tau \cdot \eta] + [\tau \cdot \eta + (\tau \cdot \eta) \cdot \tau + \tau \cdot \eta].$$

Karena *R* memenuhi kondisi $\tau + \tau \cdot \eta + \tau = \tau = \tau + \eta \cdot \tau + \tau$, sehingga

$$[\tau \cdot \eta + (\tau \cdot \eta) \cdot \tau + \tau \cdot \eta] + [\eta \cdot \tau \cdot \eta + (\eta \cdot \tau \cdot \eta) \cdot \tau + \eta \cdot \tau \cdot \eta] + [\tau \cdot \eta + (\tau \cdot \eta) \cdot \tau + \tau \cdot \eta] = \tau \cdot \eta + \eta \cdot (\tau \cdot \eta) + \tau \cdot \eta = \tau \cdot \eta.$$

Terbukti *R* merupakan idempoten penjumlahan dan memenuhi kondisi

$$\tau \cdot \eta + \eta \cdot \tau = \tau \cdot \eta. \blacksquare$$

Suatu semigrup $(R,*)$ yang memenuhi $\tau = \tau * \eta * \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$ disebut *rectangular band* [4]. Berikut ini merupakan syarat perlu suatu hemiring bersifat *almost* idempoten yang dihubungkan dengan sifat *rectangular band*.

Teorema 4.2.3 Diberikan suatu hemiring *R* dengan elemen satuan yang memenuhi $\tau + \eta = 1$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$. Jika $(R, +)$ *rectangular band* maka *R* merupakan hemiring *almost* idempoten.

Bukti : Untuk membuktikan *R* merupakan *almost* idempoten, cukup ditunjukkan $\tau + \tau^2 = \tau^2$ untuk setiap $\tau \in R$. Berdasarkan yang diketahui, $\tau + \eta = 1$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$.

$$\begin{aligned} 1 &= \tau + \eta \\ \tau &= \tau^2 + \tau \cdot \eta && \text{(dikali dengan } \tau \text{ pada kedua ruas)} \\ \tau^2 + \tau &= \tau^2 + \tau \cdot \eta + \tau^2 && \text{(kedua ruas ditambah } \tau^2\text{)} \\ &= \tau \cdot (\tau + \eta + \tau) \\ &= \tau^2 \end{aligned}$$

Jadi τ terbukti *almost idempoten.* Selanjutnya dengan cara yang sama akan dibuktikan η *almost idempoten.*

$$\begin{aligned} \tau + \eta &= 1 \\ \tau \cdot \eta + \eta^2 &= \eta \\ \eta^2 + \tau \cdot \eta + \eta^2 &= \eta^2 + \eta \\ (\eta + \tau + \eta) \cdot \eta &= \eta^2 + \eta \\ \eta^2 &= \eta^2 + \eta. \end{aligned}$$

Karena telah terbukti τ dan η merupakan *almost idempoten* untuk setiap $\tau, \eta \in R$. Jadi dapat disimpulkan *R* merupakan hemiring *almost idempoten.* ■

Selanjutnya akan dibahas sifat yang terdapat pada operasi penjumlahan di hemiring

Proposisi 4.2.4 Jika $(R, +, \cdot)$ merupakan hemiring maka untuk setiap $\tau, \eta \in R$ memenuhi $\tau + \tau \cdot \eta = \tau$ jika dan hanya jika $\tau \cdot \eta = 0$.

Bukti : $(\Rightarrow)$ Karena *R* memuat unsur identitas penjumlahan, yaitu 0 dan berdasarkan Teorema 2.3 elemen identitas bersifat tunggal. Berarti untuk setiap

$\tau \in R$ berlaku $\tau + 0 = 0 + \tau = \tau$. Akibatnya $\tau + \tau \cdot \eta = 0$, jika dan hanya jika $\tau \cdot \eta = 0$.
($\Leftarrow$) Karena untuk setiap $\tau, \eta \in R$ berlaku $\tau \cdot \eta = 0$, dan untuk setiap $\tau \in R$ berlaku $\tau + 0 = \tau$. Akibatnya $\tau + \tau \cdot \eta = \tau$.■

Pada lemma berikut akan dibahas mengenai elemen idempoten penjumlahan.

Lemma 4.2.5 Jika τ dan η merupakan elemen idempoten penjumlahan dari hemiring R, maka $\tau \cdot \eta$ merupakan elemen idempoten penjumlahan di R.
Bukti : Karena τ dan η merupakan elemen idempoten penjumlahan dari hemiring R, berarti $\tau + \tau = \tau$ dan $\eta + \eta = \eta$. Selanjutnya, dengan menggunakan sifat distributif, diperoleh

$$\tau \cdot \eta + \tau \cdot \eta = \tau \cdot (\eta + \eta) = \tau \cdot \eta.$$

Jadi $\tau \cdot \eta$ merupakan elemen idempoten penjumlahan.■

Selanjutnya akan dibahas dua elemen idempoten penjumlahan adalah sama jika memenuhi syarat yang akan diuraikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 4.2.6 Jika τ, η, ϑ dan υ merupakan elemen dari hemiring idempoten penjumlahan R maka $\tau + \vartheta = \eta$ dan $\eta + \upsilon = \tau$, maka $\tau = \eta$.
Bukti : Diberikan a elemen dari R sehingga $\tau + \tau = \tau$.

$$\begin{aligned}\tau = \tau + \tau &= \tau + \eta + \upsilon \\ &= \tau + \tau + \vartheta + \upsilon \\ &= \tau + \vartheta + \upsilon \\ &= \eta + \upsilon + \vartheta + \upsilon \\ &= \eta + \upsilon + \upsilon + \vartheta \\ &= \eta + \upsilon + \vartheta = \tau + \vartheta = \eta. \blacksquare\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibahas hubungan hemiring R *rectangular band* dengan idempoten perkalian pada proposisi berikut.

Proposisi 4.2.7 Jika $(R,\cdot)$ *rectangular band* maka $\tau \cdot \eta$ merupakan idempoten perkalian untuk setiap $\tau, \eta \in R$.
Bukti : Hemiring $(R,\cdot)$ merupakan *rectangular band*, akibatnya untuk setiap $\tau, \eta \in R$ memenuhi $\tau \cdot \eta \cdot \tau = \tau$.

$$\begin{aligned}(\tau \cdot \eta)^2 &= \tau \cdot \eta \cdot \tau \cdot \eta \\ &= (\tau \cdot \eta \cdot \tau) \cdot \eta \\ &= \tau \cdot \eta.\end{aligned}$$

Jadi terbukti $a \cdot b$ merupakan elemen idempoten perkalian.■

4.3 Hemiring Simpel

Pada subbab ini diberikan syarat perlu dan cukup dari hemiring simpel

Proposisi 4.3.1 Diberikan hemiring R dengan elemen satuan. Pernyataan berikut adalah ekuivalen pada hemiring R.

(1) R merupakan simpel,

(2) $\tau = \tau \cdot \eta + \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$,
(3) $\tau = \eta \cdot \tau + \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$.
Bukti : $(1) \Rightarrow (2)$. Diberikan sebarang $\tau, \eta \in R$. Karena R merupakan hemiring simpel sehingga $\eta + 1 = 1$.

$$\tau = \tau \cdot 1 = \tau \cdot (\eta + 1) = \tau \cdot \eta + \tau.$$

Jadi terbukti $(1) \Rightarrow (2)$.
$(2) \Rightarrow (3)$. Diberikan $\tau, \eta \in R$.

$$\tau = \tau \cdot \eta + \tau = \tau \cdot (\eta + 1).$$

Karena R memuat elemen satuan 1 yang merupakan elemen identitas pada operasi perkalian dan berdasarkan Teorema 2.3 elemen identitas bersifat tunggal, berarti untuk $\tau = \tau \cdot (\eta + 1)$ mengakibatnya $\eta + 1 = 1$.

$$\tau \;\; = 1 \cdot \tau = (\eta + 1) \cdot \tau = \eta \cdot \tau + \tau.$$

Jadi terbukti $(2) \Rightarrow (3)$.
$(3) \Rightarrow (1)$. Diberikan sebarang $\eta \in R$.

$$\eta + 1 = \eta \cdot 1 + 1 = 1.$$

Jadi terbukti $(1) \Rightarrow (3)$.
Jadi berdasarkan hasil analisa di atas pernyataan (1), (2), dan (3) ekuivalen pada hemiring dengan elemen satuan. ∎

Proposisi berikut membahas mengenai hubungan antara hemiring simpel dengan hemiring idempoten penjumlahan.

Proposisi 4.3.2 Jika R hemiring simpel maka R merupakan hemiring idempoten penjumlahan.
Bukti : Diberikan sebarang $\tau \in R$. Karena $(R, +, \cdot)$ merupakan hemiring simpel sehingga 1 merupakan *infinity*, berarti untuk setiap $\tau \in R$ berlaku

$$\begin{aligned} \tau &= \tau \cdot 1 \\ &= \tau \cdot (1 + 1) = \tau + \tau. \end{aligned}$$

Jadi, R merupakan hemiring idempoten penjumlahan. ∎

Selanjutnya teorema berikut akan membahas mengenai kondisi yang ekuivalen dengan pernyataan hemiring simpel yang sekaligus hemiring idempoten perkalian.

Teorema 4.3.3 Diberikan hemiring R dengan elemen satuan. Pernyataan berikut merupakan ekuivalen.
(1) R simpel dan idempoten perkalian,
(2) $(\tau + \eta) \cdot (\tau + \vartheta) = \tau + \eta \cdot \vartheta$ untuk setiap $\tau, \eta, \vartheta \in R$,
(3) $\tau + \eta = \tau$ jika dan hanya jika $\tau \cdot \eta = \eta = \eta \cdot \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$.
Bukti : $(1) \Rightarrow (2)$. Diambil sebarang $\tau, \eta, \vartheta \in R$.

$$\begin{aligned} (\tau + \eta) \cdot (\tau + \vartheta) &= (\tau + \eta) \cdot \tau + (\tau + \eta) \cdot \vartheta = (\tau^2 + \eta \cdot \tau) + (\tau \cdot \vartheta + \eta \cdot \vartheta) \\ &= (\tau + \eta \cdot \tau) + (\tau \cdot \vartheta + \eta \cdot \vartheta) = \tau + (\tau \cdot \vartheta + \eta \cdot \vartheta) \\ &= (\tau + \tau \cdot \vartheta) + \eta \cdot \vartheta = \tau + \eta \cdot \vartheta. \end{aligned}$$

Jadi terbukti (1) $\Rightarrow$ (2).
(2) $\Rightarrow$ (3).
($\Rightarrow$) Diambil sebarang $\tau, \eta \in R$. Terdapat $0 \in R$ yang berdasarkan Definisi 2.1 merupakan elemen identitas di R.

$$\tau \cdot \eta = (\tau + \eta) \cdot (\eta + 0) = (\eta + \tau) \cdot (\eta + 0) = \eta + \tau \cdot 0 = \eta,$$

dan

$$\eta \cdot \tau = (\eta + 0) \cdot (\tau + \eta) = (\eta + 0) \cdot (\eta + \tau) = \eta + 0 \cdot \tau = \eta.$$

Jadi, terbukti jika $\tau + \eta = \tau$ maka $\tau \cdot \eta = \eta = \eta \cdot \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$.
($\Leftarrow$) Diberikan $\tau, \eta \in R$.

$$\eta + \tau = \eta + 1 \cdot \tau = (\eta + 1) \cdot (\eta + \tau).$$

Karena R memuat elemen satuan 1 yang merupakan elemen identitas pada operasi perkalian dan berdasarkan Teorema 2.3 elemen identitas bersifat tunggal, akibatnya untuk $\eta + \tau = (\eta + 1) \cdot (\eta + \tau)$ berlaku $\eta + 1 = 1$.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + \eta & & \\ 1 \cdot \tau &= (1 + \eta) \cdot \tau & & \text{(dikali dengan } \tau) \\ \tau &= \tau + \eta \cdot \tau & & \text{(sifat distributif)} \\ &= \tau + \eta. & & (\tau \cdot \eta = \eta = \eta \cdot \tau) \end{aligned}$$

Jadi terbukti jika $\tau \cdot \eta = \eta = \eta \cdot \tau$ maka $\tau + \eta = \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$.
Jadi terbukti (2) $\Rightarrow$ (3).
(3) $\Rightarrow$ (1). Diketahui $\tau + \eta = \tau$ jika dan hanya jika $\tau \cdot \eta = \eta = \eta \cdot \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$. Akan dibuktikan R idempoten perkalian dan R simpel.

a. Diambil sebarang $\eta \in R$. Karena $1 \in R$ merupakan elemen satuan, sehingga berlaku $1 \cdot \eta = \eta = \eta \cdot 1$. Selanjutnya, berdasarkan yang diketahui berlaku $1 + \eta = 1$. Karena b sebarang elemen di R akibatnya R simpel.
b. Diambil sebarang $\tau \in R$. Karena R terbukti simpel, akibatnya berdasarkan Proposisi 4.3.2, R idempoten penjumlahan sehingga berlaku $\tau + \tau = \tau$. Selanjutnya, dari yang diketahui karena $\tau + \tau = \tau$ sehingga didapatkan $\tau^2 = \tau$. Jadi R merupakan idempoten perkalian.

Jadi terbukti (3) $\Rightarrow$ (1).
Jadi berdasarkan hasil analisa di atas pernyataan (1), (2), dan (3) ekuivalen pada hemiring dengan elemen satuan. ■

Teorema berikut membahas mengenai sub himpunan dari suatu hemiring simpel dan irisan dari dua subset hemiring simpel.

Teorema 4.3.4 Diberikan suatu hemiring simpel R. Untuk setiap elemen $\zeta \in R$ didefinisikan $S(\zeta) = \{0\} \cup \{\tau \in R : \tau + \zeta = 1\}$. Himpunan $S(\zeta)$ merupakan subhemiring dari R untuk setiap $\zeta \in R$, dan memenuhi $S(\zeta) \cap S(\eta) = S(\zeta \cdot \eta)$ untuk setiap $\zeta, \eta \in R$.

Bukti : Untuk membuktikan $S(\zeta)$ merupakan subhemiring dari R cukup ditunjukkan $S(\zeta)$ himpunan bagian yang tak kosong di R, memuat 0 dan $\tau + \tau'$, $\tau \cdot \tau' \in S(\zeta)$ untuk setiap $\tau, \tau' \in S(\zeta)$. Berdasarkan definisi keanggotaan $S(\zeta)$

diperoleh $S(\zeta)$ himpunan bagian dari R dan $0 \in S(\zeta)$ dengan kata lain $S(\zeta)$ merupakan himpunan bagian tak kosong di R. Diambil sebarang $\tau, \tau' \in S(\zeta)$ sehingga

$$\tau + \zeta = 1 = \tau' + \zeta.$$

Karena R merupakan hemiring simpel, berarti R memuat elemen satuan 1 yang merupakan elemen *infinity* dan akibatnya, berlaku $1 \cdot \zeta = \zeta = \zeta \cdot 1$.

$$\begin{aligned}(\tau + \tau') + \zeta &= \tau + \tau' + \zeta \cdot 1\\ &= \tau + \tau' + \zeta \cdot (1+1)\\ &= \tau + \tau' + \zeta + \zeta\\ &= (\tau + \zeta) + (\tau' + \zeta)\\ &= 1 + 1 = 1.\end{aligned}$$

Jadi $\tau + \tau' \in S(\zeta)$.
Diketahui R simpel dan $\zeta \in R$ sehingga berlaku $\zeta + 1 = 1$ untuk setiap $\zeta \in R$. Selanjutnya, dengan menggunakan sifat elemen satuan dan definisi anggota $S(\zeta)$, diperoleh

$$\begin{aligned}1 &= 1 + \zeta = 1 \cdot 1 + \zeta = (\tau + a) \cdot (\tau' + \zeta) + \zeta.\\ &= \tau \cdot \tau' + \tau \cdot \zeta + \zeta \cdot \tau' + (\zeta^2 + \zeta)\\ &= \tau \cdot \tau' + \tau \cdot \zeta + (\zeta \cdot \tau' + \zeta) + \zeta^2\\ &= \tau \cdot \tau' + (\tau \cdot \zeta + \zeta) + \zeta \cdot \tau' + \zeta^2\\ &= \tau \cdot \tau' + (\zeta + \zeta \cdot \tau') + \zeta^2 = \tau \cdot \tau' + (\zeta + \zeta^2) = \tau \cdot \tau' + \zeta.\end{aligned}$$

Jadi $\tau \cdot \tau' \in S(\zeta)$. Terbukti $S(\zeta)$ merupakan subhemiring dari R.
Selanjutnya, akan dibuktikan $S(\zeta) \cap S(\eta) = S(\zeta \cdot \eta)$ untuk setiap $\zeta, \eta \in R$. Diambil sebarang $\tau \in S(\zeta \cdot \eta)$ dan $\tau \neq 0$ sehingga berlaku $\tau + \zeta \cdot \eta = 1$.

$$\begin{aligned}1 &= 1 + \zeta = \tau + \zeta \cdot \eta + \zeta\\ &= \tau + \zeta.\end{aligned}$$

Jadi $\tau \in S(\zeta)$. Selanjutnya, dengan cara yang sama akan dibuktikan $\tau \in S(\eta)$.

$$\begin{aligned}1 &= 1 + \eta = \tau + \zeta \cdot \eta + \eta\\ &= \tau + \eta.\end{aligned}$$

Jadi $\tau \in S(\eta)$. Akibatnya $\tau \in S(\zeta) \cap S(\eta)$. ■

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dari penelitian ini didapatkan kesimpulan sebagai berikut.

1) Syarat cukup dan syarat perlu suatu himpunan yang tak kosong di R disebut hemiring komutatif yaitu $0,1 \in R$ dan untuk setiap $\zeta, \eta, \vartheta, \upsilon, \omega \in R$ dipenuhi : $\zeta + 0 = \zeta = 0 + \zeta$, $\zeta \cdot 1 = \zeta$, $0 \cdot \zeta = 0$, dan $[(\zeta \cdot \omega + \eta) + \vartheta] \cdot \upsilon = \upsilon \cdot \eta + [\zeta \cdot (\omega \cdot \upsilon) + \vartheta \cdot \upsilon]$.
2) Syarat cukup suatu hemiring merupakan *zerosumfree*, hemiring idempoten, hemiring *almost idempotent* dan sifat-sifat operasi pada hemiring adalah

a. Jika terdapat suatu elemen ϱ dari suatu hemiring R dengan elemen satuan 1 yang memenuhi $\varrho = \varrho + 1$ maka R disebut hemiring *zerosumfree*,
b. Jika R merupakan hemiring idempoten perkalian yang memenuhi kondisi $\tau + \tau \cdot \eta + \tau = \tau = \tau + \eta \cdot \tau + \tau$ untuk setiap τ dan η elemen dari R maka R disebut hemiring idempoten penjumlahan dan memenuhi kondisi $\tau \cdot \eta + \eta \cdot \tau = \tau \cdot \eta$,
c. Jika hasil penjumlahan setiap dua elemen di hemiring merupakan elemen satuan dan terhadap operasi penjumlahan merupakan *rectangular band* maka hemiring bersifat *almost* idempoten,
d. Untuk setiap τ, η elemen hemiring berlaku $\tau + \tau \cdot \eta = \tau$ jika dan hanya jika $\tau \cdot \eta = 0$,
e. Elemen hasil perkalian dari dua elemen idempoten penjumlahan merupakan elemen idempoten penjumlahan,
f. Untuk $\tau, \eta, \vartheta, \upsilon \in I^{+}(R)$ dengan $\tau + \vartheta = \eta$ dan $\eta + \upsilon = \tau$ didapatkan $\tau = \eta$,
g. Hasil perkalian dari dua elemen hemiring *rectangular band* terhadap operasi perkalian merupakan elemen idempoten perkalian.

3) Syarat cukup, syarat perlu suatu hemiring merupakan hemiring simpel dan sifat-sifat operasi pada hemiring simpel sebagai berikut.
   a. Suatu hemiring simpel merupakan hemiring idempoten penjumlahan.
   b. Berikut adalah kondisi yang ekuivalen pada hemiring dengan elemen satuan.
      (1) R adalah simpel,
      (2) $\tau = \tau \cdot \eta + \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$,
      (3) $\tau = \eta \cdot \tau + \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$.
   c. Pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen pada hemiring dengan elemen satuan.
      (1) R simpel dan idempoten perkalian,
      (2) $(\tau + \eta) \cdot (\tau + \vartheta) = \tau + \eta \cdot \vartheta$ untuk setiap $\tau, \eta, \vartheta \in R$,
      (3) $\tau + \eta = \tau$ jika dan hanya jika $\tau \cdot \eta = \eta = \eta \cdot \tau$ untuk setiap $\tau, \eta \in R$.
   d. Untuk setiap elemen $\zeta \in R$ terdapat $S(\zeta) = \{0\} \cup \{\tau \in R: \tau + \zeta = 1\}$ merupakan subhemiring dari R. Selanjutnya, $S(\zeta) \cap S(\eta) = S(\zeta \cdot \eta)$ untuk setiap $\zeta, \eta \in R$.

REFERENSI

[1]. Chowdhury, Kanak Ray, Abeda Sultana, Nirmal Kanti Mitra, and A F M Khodadad Khan. (2014). Some Structural Properties of Semirings. *Annals of Pure and Applied Mathematics*. Vol. 5 No.2. pp 158–67.

[2]. Golan, Jonathan S. (1999). *Semirings and their Applications*. Springer Netherlands.

[3]. Malik, D S, John N Mordeson, M.K Sen. (2007). *Introduction to Abstract Algebra*. USA.

[4]. Sulochana, N, and T Vasanthi. (2016). Structure of Some Idempotent Semirings. *Journal of Computer and Matehematical Sciences*. Vol. 7 No. 5. pp 294–301.

[5]. Ali, Md Yasin, Kanak Ray Chowdhury, Abeda Sultana, and Nirmal Kanti Mitra (2017). Some Structures of Hemirings. *Pure and Applied Mathematics Journal* Vol. 6 No.1. pp 45-50.

[6]. Grillet, M P, and P A Grillet. (1971). Completely 0 -simplesemiring". *Transaction of The American Mathematical Society*. Vol. 155. pp 19-33.

[7]. Grillet, M. P. (1972). Semisimple A-semigroupsa nd semirings. *Fundamenta Mathamaticae*. Vol. 76. pp 109-116.

[8]. Zhan, Jianming and Wiesław A. Dudek. (2007). Fuzzy h-ideals of hemirings. *Information Sciences* Vol. 177. pp. 876–886.

[9]. Yin, Y. Q. and H. X. Li. (2008). The Characterizations of h-hemiregular hemirings and h-intra hemirings, Inform. Sci. Vol. 178. pp. 3451–3464.

[10]. Gulistan, M, M. Shahzad, S. Ahmed and M. Ilyas. (2015). Characterization of Gamma Hemirings By Generalized Fuzzy Gamma Ideals. *Application and Applied Mathematics*. Vol. 10 No. 1. pp. 495-520.