Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
Vol.9 No.1 (2015) Hal. 1-11

TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG NORM-2 BERDIMENSI HINGGA

Moh. Januar I. Burhan

Program Studi Matematika Institut Teknologi Kalimantan
Kampus ITK Karang Joang, Balikpapan 76127
email: januarismail@itk.ac.id,

ABSTRAK

Pada makalah ini, akan dibahas Teorema Titik Tetap di ruang norm-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ berdimensi hingga yang merupakan perbaikan dari Teorema Titik Tetap yang dibahas Gunawan di [2]. Dengan mendefinisikan norm $\|\cdot\|_1^*$ yang diturunkan dari norm-2 $\|\cdot,\cdot\|$, diperoleh hubungan kekonvergenan barisan di ruang $(X, \|\cdot\|_1^*)$ dan ruang $(X, \|\cdot,\cdot\|)$. Hasil ini akan digunakan untuk membuktikan Teorema Titik Tetap tersebut.

Kata kunci : norm - 2, norm, teorema titik tetap.

1. PENDAHULUAN

Konsep dari Ruang metrik-2 dan ruang norm-2 dikenalkan oleh $G\ddot{a}hler$ pada pertengahan tahun 1960. Setelahnya, banyak para peneliti membahas kedua ruang tersebut dengan hasil yang berbeda.

Pada tahun 2001, H. Gunawan dan M. Mashadi di [2] membahas mengenai ruang norm-2 berdimensi hingga yang mana salah satu hasil yang diperoleh adalah mengenai teorema titik tetap dengan hipotesis menggunakan sebarang vektor x.

Teorema titik tetap pada ruang Norm-2 lengkap tersebut diformulasikan sebagai berikut :

Teorema 1.1. *Misalkan* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *adalah ruang Banach*-2. *misalkan* T *adalah pemetaan kontraktif pada* X *dan sedemikian hingga*

$$\|Tx - Ty, z\| \leq k\|x - y, z\|$$

untuk setiap $x, y, z \in X$, *dimana* k *adalah konstanta pada* $(0,1)$. *Maka* T *memiliki titik tetap yang tunggal di* X.

Pada makalah ini, akan ditunjukkan bahwa setiap ruang norm-2 khususnya ruang norm-2 berdimensi hingga adalah ruang norm yang dilengkapi dengan suatu norm yang diturunkan dari norm-2. Lebih lanjut, fakta ini digunakan untuk membuktikan Teorema Titik Tetap pada ruang norm-2 berdimensi hingga yang lebih umum versi Gunawan di [2] dengan merubah hipotesis Teorema Titik tetap tersebut hanya menggunakan sebarang 2 buah vektor bebas linear.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Ruang Norm

Norm dari suatu vektor merupakan perumuman dari konsep panjang vektor yang telah kita kenal sebelumnya. Pada bagian ini akan diperkenalkan lebih jauh mengenai definisi norm beserta sifat-sifatnya.

Definisi 2.1.1. *Misalkan X adalah ruang vektor real. Norm pada X didefenisikan sebagai suatu pemetaan $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$, yang memenuhi sifat di bawah ini*

1. $\|x\| \geq 0$*;* $\|x\| = 0$ *jika dan hanya jika* $x = 0$*;*

2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$*, untuk setiap* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*, untuk setiap* $x, y \in X$*;*

Pasangan $(X, \|\cdot\|)$ *disebut ruang norm.*

Contoh 2.1.2. Salah satu contoh ruang norm adalah ruang Euclid $\mathbb{R}^n$ dengan norm yang didefinisikan sebagai

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Contoh dapat yang lain dapat dilihat pada [4] dan [5].

2.2. Kekonvergenan dalam Norm

Pada subbab ini diperkenalkan mengenai definisi barisan konvergen dan barisan Cauchy dalam norm. Konsep ini merupakan hal yang penting dalam menentukan kelengkapan pada suatu ruang norm.

Definisi 2.2.1. *Misalkan $(x(k))$ barisan di X, maka*

1. *Barisan $(x(k))$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ dalam norm apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\|x(k) - x\| < \varepsilon$ untuk setiap $k \geq n_0$.*
2. *Barisan $(x(k))$ dikatakan barisan Cauchy apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\|x(k) - x(l)\| < \varepsilon$ untuk setiap $k, l \geq n_0$.*

Pada ruang norm $(X, \|\cdot\|)$, barisan konvergen memiliki beberapa fakta – fakta yang serupa dengan barisan konvergen yang berapa di himpunan bilangan real.

Proposisi 2.2.2. *Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang norm. Maka limit dari suatu barisan $(x(k))$ yang konvergen adalah tunggal.*

Teorema 2.2.3. *Jika barisan $(x(k))$ konvergen dalam norm maka $(x(k))$ adalah barisan Cauchy.*

Selanjutnya hal yang perlu diingat adalah konsep dari kelengkapan suatu ruang, di sini barisan Cauchy memiliki peranan yang sangat penting. Dapat digambarkan pada definisi di bawah ini.

Definisi 2.2.4. *Ruang norm* $(X, \|\cdot\|)$ *dikatakan lengkap, jika setiap barisan Cauchy* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* $(X, \|\cdot\|)$. *Ruang norm yang lengkap disebut ruang Banach.*

2.3. Ekivalensi antara dua norm

Selanjutnya kita akan membahas mengenai ekuivalensi antara dua buah norm pada ruang vektor X. Konsep ini dimotivasi oleh fakta bahwa, ekuivalensi norm pada ruang vektor X mendefinisikan topologi yang sama untuk X.

Definisi 2.3.1. *Dua buah norm* $\|\cdot\|_1$ *dan* $\|\cdot\|_2$ *atas ruang vektor* X *dikatakan ekuivalen, jika terdapat bilangan positif* α *dan* β *sedemikian sehingga untuk setiap* $x \in X$ *berlaku*

$$\alpha\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2.$$

Akibatnya diperoleh fakta ekuivalensi norm secara barisan yang disajikan berbentuk proposisi di bawah ini.

Proposisi 2.3.2. *Misalkan* X *adalah ruang vektor dan misalkan dua norm* $\|\cdot\|_1$ *dan* $\|\cdot\|_2$ *ekuivalen yang terdefinisi di* X, *maka untuk* $k \to \infty$, $\|x(k) - x\|_1 = 0$ *mengakibatkan* $\|x(k) - x\|_2 = 0$, *dan sebaliknya.*

2.4. Ruang norm berdimensi hingga

Pada ruang vektor X berdimensi hingga, norm yang didefinisikan di dalamnya ekuivalen satu dengan yang lainnya. Pada subbab ini kita akan membahas tentang ekuivalensi tersebut. Untuk itu, dimulai dengan membahas lema berikut ini.

Lemma 2.4.1. *Misalkan* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *adalah himpunan dari vektor - vektor yang bebas linear di ruang norm* $(X, \|\cdot\|)$ *berdimensi hingga. Maka terdapat bilangan* $c > 0$ *sedemikian hingga untuk setiap skalar* $\alpha_1, \ldots, \alpha\_\{n\}$ *diperoleh*

$$\|\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|).$$

Bukti : Lihat di [4]. ■

Teorema 2.4.2. *Pada ruang vektor* X *berdimensi hingga, sebarang norm* $\|\cdot\|$ *ekuivalen dengan norm* $\|\cdot\|_0$ *yang lain.*

Bukti : Lihat di [4]. ■

Selain teorema di atas, selanjutnya akan dibahas mengenai kelengkapan ruang norm berdimensi hingga. Hal tersebut tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 2.4.3. *Setiap ruang norm* $(X, \|\cdot\|)$ *berdimensi hingga merupakan ruang Banach.*

Bukti : Lihat di [4]. ■

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur. Metodologi yang digunakan adalah mengumpulkan bahan penelitian dari buku – buku dan jurnal – jurnal yang membahas konsep ruang norm dan konsep ruang norm-n khususnya untuk $n = 2$, dan selanjutnya melakukan kajian terhadap konsep – konsep tersebut untuk mengkonstruksi norm yang diperoleh dari norm-2. Selanjutnya norm yang diperoleh menjadi alat untuk membuktikan teorema titik tetap di ruang Norm-2 berdimensi hingga sebagai perbaikan teorema titik tetap yang dibahas H. Gunawan di [2] dan perumuman di [1], [3].

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas secara umum mengenai definisi dan sifat-sifat ruang norm-2 berdimensi hingga. Lebih lanjut, diperoleh hubungan kekonvergenan barisan di ruang norm-2 $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ dengan ruang norm $(X, \|\cdot\|_1^*)$. Hasil ini digunakan untuk membuktikan Teorema Titik Tetap di ruang norm-2 berdimensi hingga.

4.1 Ruang Norm-2

Pada Subbab 2.3 kita telah mendefinisikan beberapa konsep mengenai ekuivalensi, kekonvergenan dan kelengkapan pada ruang norm. Pada bagian ini, kita akan membahas konsep tersebut pada ruang norm-2.

Definisi 4.1.1. *Misalkan X adalah ruang vektor real. Norm-2 adalah fungsi $\|\cdot,\cdot\|: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi empat kondisi di bawah ini*
1. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linear;
2. $\|x, y\| = \|y, x\|$ untuk setiap $x, y \in X$;
3. $\|x, \alpha y\| = |\alpha|\|x, y\|$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ untuk setiap $x, y, z \in X$.
Pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut suatu ruang norm-2.

Akibat definisi di atas dapat diperoleh dua fakta yang disajikan oleh satu proposisi.
Proposisi 4.1.2. *Jika $(X, \|.,.\|)$ adalah ruang norm-2, maka*
1. $\|x, y\| \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$.
2. $\|x, \alpha x + y\| = \|x, y\|$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.
Bukti : Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$,
1. Akan ditunjukkan bahwa $\|x, y\| \geq 0$. Perhatikan bahwa,
$$0 = \|x, 0\| = \|x, y - y\| \leq \|x, y\| + \|x, -y\| = \|x, y\| + \|x, y\| = 2\|x, y\|.$$
Maka diperoleh $\|x, y\| \geq 0$.
2. Akan ditunjukkan bahwa $\|x, \alpha x + y\| = \|x, y\|$. Perhatikan,
(i) $\|x, \alpha x + y\| \leq \|x, \alpha x\| + \|x, y\| = |\alpha|\|x, x\| + \|x, y\| = \|x, y\|$.
Selanjutnya,
$$\text{(ii) } \|x, y\| = \|x, y + \alpha x - \alpha x\| \leq \|x, y + \alpha x\| + \|x, -\alpha x\|$$
$$\leq \|x, y + \alpha x\| + |-\alpha|\|x, x\|$$
$$= \|x, y + \alpha x\|.$$
Dari (i) dan (ii) dapat diperoleh $\|x, \alpha x + y\| = \|x, y\|$. ■

4.2. Kekonvergenan dan Kelengkapan

Pada ruang norm-2 definisi mengenai kekonvergenan barisan dan barisan Cauchy tidak jauh berbeda dengan definisi pada ruang norm.

Definisi 4.2.1. *Barisan* $(x(k))$ *di ruang norm*-2 $(X, \| \cdot,\cdot \|)$ *dikatakan konvergen ke* x *di dalam* $(X, \| \cdot,\cdot \|)$ *apabila untuk setiap* $z \in X$ *berlaku :*

$$lim_{k \to \infty} \|x(k) - x, z\| = 0,$$

yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $k \geq n_0$ *berlaku* $\|x(k) - x, z\| < \varepsilon$, *dimana* x *disebut limit barisan* $(x(k))$.

Seperti pada ruang norm, barisan pada ruang norm-2 memiliki fakta – fakta yang serupa, hal tersebut dituliskan sebagai berikut.

Teorema 4.2.2. *Limit dari suatu barisan yang konvergen di ruang norm*-2$(X, \| \cdot,\cdot \|)$ *senantiasa tunggal.*

Bukti : Andaikan x dan x' adalah limit dari $(x(k))$ dengan $x \neq x'$, menurut definisi untuk setiap $z \in X$ dan $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $\|x(k) - x, z\| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $k \geq n_0$, dan terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sehingga $\|x(k) - x', z\| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $k \geq n_1$. Pilih $n' = maks(n_0, n_1)$ sehingga untuk $k \geq n'$, maka

$$\|x - x', z\| = \|x - x(k) + x(k) - x', z\| \leq \|x - x(k), z\| + \|x(k) - x', z\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $x = x'$. Jadi kontradiksi dengan pengandaian. Haruslah limit barisan adalah tunggal. ∎

Definisi 4.2.3. *Barisan* $(x(k))$ *di ruang norm*-2 $(X, \| \cdot,\cdot \|)$ *disebut barisan Cauchy apabila, untuk setiap* $z \in X$. *Untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $k, l \geq n_0$ *berlaku* $\|x(k) - x(l), z\| < \varepsilon$.

Teorema 4.2.4. *Jika barisan* $(x(k))$ *konvergen, maka* $(x(k))$ *merupakan barisan Cauchy.*

Bukti : Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, barisan $(x(k))$ konvergen ke $x \in X$ artinya untuk setiap $z \in X$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $k \geq n_0$ berlaku $\|x(k) - x, z\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Maka

$$\|x(k) - x(l), z\| = \|x(k) - x + x - x(l), z\| \leq \|x(k) - x, z\| + \|x - x(l), z\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ untuk setiap } k, l \geq n_0.$$

Jadi $(x(k))$ merupakan barisan Cauchy di ruang norm-2. ∎

Definisi 4.2.5. *Ruang norm*-2 $(X, \| \cdot,\cdot \|)$ *dikatakan lengkap, jika setiap barisan Cauchy* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* $(X, \| \cdot,\cdot \|)$. *Ruang norm*-2 *yang lengkap disebut ruang Banach*-2.

4.3. Teorema Titik Tetap di Ruang Norm-2 Berdimensi Hingga

Subbab ini membahas hasil dari pengamatan yang diperoleh. Dimulai dengan memperkenalkan terlebih dahulu Teorema Titik Tetap versi Gunawan dan Mashadi di [2] sebagai berikut.

Teorema 4.3.1. *Misalkan* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *adalah ruang Banach*-2. *Misalkan* T *adalah pemetaan kontraktif pada* X *sehingga*

$$\|Tx - Ty, z\| \leq k\|x - y, z\|$$

untuk setiap $x, y, z \in X$, *dimana* k *adalah konstanta pada* $(0,1)$. *Maka* T *memiliki titik tetap yang tunggal di* X.

Selanjutnya akan dibuktikan Teorema Titik Tetap dengan mereduksi hipotesis "untuk setiap z" menjadi "untuk dua buah vektor yang bebas linear", pada ruang vektor X berdimensi d dimana $2 \leq d < \infty$ (yakni X berdimensi hingga). Tetapi sebelumnya, kita mulai dengan pembahasan sebagai berikut. mengenai pendefinisian norm yang diturunkan dari norm-2 dan basis bagi X. Misal $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ adalah ruang norm-2 dan misalkan pula $\{b_1, b_2, \ldots, b_d\}$ adalah basis bagi X.

Lemma 4.3.2. *Barisan* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* X *jika dan hanya jika* $lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, b_i\| = 0$ *untuk setiap* $i = 1\ldots d$.
Bukti : (⇒) Misalkan barisan $(x(k))$ konvergen ke x di X. Untuk setiap $z \in X$, maka $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, z\| = 0$.
Akibatnya $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, b_i\| = 0$ untuk setiap $i = 1\ldots d$. Karena $b_i \in X$, untuk setiap $i = 1\ldots d$.
(⇐) Misalkan $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, b_i\| = 0$ untuk setiap $i = 1\ldots d$. Ambil sebarang $z \in X$. Perhatikan bahwa $||x(k) - x, z|| \leq \sum_{i=1}^{d} |a_i|\|x(k) - x, b_i\|$.
Jadi untuk $n \to \infty$ ruas kanan bernilai nol, akibatnya ruas kiri bernilai nol. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, z\| = 0$. Jadi $(x(k))$ konvergen ke x di X. ■

Hal yang sama untuk barisan Cauchy,
Lemma 4.3.3. *Barisan* $(x(k))$ *Cauchy di* X *jika dan hanya jika* $lim_{k\to\infty} \|x(k) - x(l), b_i\| = 0$ *untuk setiap* $i = 1\ldots d$.
Bukti : (⇒) Misalkan $(x(k))$ Cauchy di X, akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x(l), b_i\| = 0$$

untuk setiap $i = 1\ldots d$. Karena $b_i \in X$, untuk setiap $i = 1\ldots d$, maka menurut definisi diperoleh $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x(l), b_i\| = 0$ untuk setiap $i = 1\ldots d$.
(⇐) Misalkan $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x(l), b_i\| = 0$untuk setiap $i = 1\ldots d$. Ambil sebarang $z \in X$, perhatikan

$$||x(k) - x(l), z|| \leq \sum_{i=1}^{d} |a_i|\|x(k) - x(l), b_i\|.$$

Akibatnya untuk $k, l \to \infty$, diperoleh $\|x(k) - x(l), z\| = 0$. Jadi $(x(k))$ adalah barisan Cauchy di X. ■

Akibatnya diperoleh bahwa,
Akibat 4.3.4. *Barisan* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* X *jika dan hanya jika*

$$lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, b_i\| = 0,$$

dan barisan $(x(k))$ *Cauchy di* X *jika dan hanya jika*

$$lim_{k\to\infty} \|x(k) - x(l), b_i\| = 0.$$

Bukti : Tanpa mengurangi keumuman, hanya akan ditunjukkan arah ($\Leftarrow$) karena arah sebaliknya jelas menurut definisi. Menurut **Lema** <ref>lema1</ref> dan <ref>lema2</ref>, serta fakta bahwa untuk setiap $z \in X$ diperoleh bahwa,

$$||x(k) - x, z|| \leq \sum_{i=1}^{d} |a_i| \|x(k) - x, b_i\| \leq c \sum_{i=1}^{d} \|x(k) - x, b_i\|$$

dengan $c = maks\{|a_i|\}$.
Jika $k \to \infty$, maka diperoleh ruas kiri bernilai nol. Dengan demikian $(x(k))$ konvergen ke x di X. Selanjutnya perhatikan pula bahwa,

$$||x(k) - x(l), z|| \leq \sum_{i=1}^{d} |a_i| \|x(k) - x(l), b_i\| \leq c \sum_{i=1}^{d} \|x(k) - x(l), b_i\|$$

dengan $c = maks\{|a_i|\}$.
Jika $k, l \to \infty$, diperoleh ruas kanan bernilai nol yang mengakibatkan ruas kiri bernilai nol. Dengan demikian $(x(k))$ Cauchy di X. ■

Selanjutnya diperoleh fakta bahwa dapat didefinsikan norm yang diturunkan dari norm-2 yang berhubungan dengan basis $\{b_1, b_2, \ldots, b_d\}$.

Proposisi 4.3.5. Misalkan $\{b_1, b_2, \ldots, b_d\}$ basis di X, maka $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} \|x, b_i\|$ adalah norm di X.
Bukti : Lihat [2]. ■

Apabila kita memilih basis yang lain, hal tersebut tidak terlalu berpengaruh terhadap norm yang dibentuk, karena di X yang berdimensi hingga sebarang norm ekuivalen dengan norm yang lain. Perhatikan bahwa secara umum untuk $1 \leq p < \infty$, dapat didefinisikan fungsi $\|\cdot\|_p$ di X dengan bentuk

$$\|\cdot\|_p = \left[\sum_{i=1}^{d} \|x, b_i\|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Seperti halnya norm $\|\cdot\|_1$ dapat pula diperiksa bahwa $\|\cdot\|_p$ merupakan norm di X. Akhirnya dengan menggunakan norm $\|\cdot\|_1$, Akibat 4.3.4. dapat dituliskan menjadi,

Akibat 4.3.6. *Barisan* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* X *jika dan hanya jika* $\lim_{k \to \infty} \|x(k) - x\|_1 = 0$ *dan barisan* $(x(k))$ *Cauchy di* X *jika dan hanya jika* $\lim_{k,l \to \infty} \|x(k) - x(l)\|_1 = 0$.
Bukti : Gunakan definisi $\|\cdot\|_1$ dan Akibat 4.3.4. ■

4.4. Norm yang diturunkan dari norm-2 dan dua buah vektor bebas linear

Bagian ini membahas mengenai pendefinisian norm yang diturunkan dari norm-2 dan dua buah vektor bebas linear di X. Perhatikan bila hasil pada Lema 4.3.2. dan Lema 4.3.3. kita batasi hanya untuk himpunan $\{a_1, a_2\}$ bebas linear maka diperoleh lema sebagai berikut.

Lemma 4.4.1. *Jika barisan* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* X *maka* $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, a_1\| = 0$ *dan* $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, a_2\| = 0$, *dimana* $\{a_1, a_2\}$ *bebas linear.*

Bukti : Misalkan barisan $(x(k))$ konvergen ke x di X. Untuk setiap $z \in X$ berlaku $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, z\| = 0$, karena $a_1, a_2 \in X$. Akibatnya $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x, a_i\| = 0$ untuk setiap $i = 1,2$. ■

Lemma 4.4.2. *Jika barisan* $(x(k))$ *Cauchy di* X *maka* $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x(l), a_1\| = 0$ *dan* $\lim_{k\to\infty} \|x(k) - x(l), a_2\| = 0$, *dimana* $\{a_1, a_2\}$ *bebas linear.*

Bukti : Pembuktian sama dengan bukti arah ($\Rightarrow$) dari Lema 4.3.3. ■

Lebih lanjut, akan didefinisikan norm baru yang diturunkan dari norm-2 dan himpunan bebas linear $\{a_1, a_2\}$ di X.

Proposisi 4.4.3. *Misalkan* $\{a_1, a_2\} \subset X$ *bebas linear, maka* $\|x\|_1^* = \|x, a_1\| + \|x, a_2\|$ *adalah norm di* X.

Bukti : Ambil sebarang $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukan bahwa $\|\cdot\|_1^*$ memenuhi sifat-sifat definisi norm.

1. Akan ditunjukkan bahwa $\|x\|_1^* \geq 0$ untuk setiap $x \in X$. Hal ini dapat dipenuhi karena norm-2 bersifat nonnegatif. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa,
   $\|x\|_1^* = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.
   ($\Leftarrow$) Misalkan $x = 0$, selanjutnya karena 0 dan a_i bergantung linear untuk setiap $i = 1,2$. Maka diperoleh
   $\|0\|_1^* = \|0, a_1\| + \|0, a_2\| = 0.$
   ($\Rightarrow$) Misalkan $\|x\|_1^* = 0$, maka
   $\|x\|_1^* = \|x, a_1\| + \|x, a_2\| = 0.$
   Hanya dipenuhi oleh $\|x, a_1\| = 0$ dan $\|x, a_2\| = 0$. Artinya $k_1 a_1 = x$, sehingga
   $\|k_1 a_1, a_2\| = |k_1| \|a_1, a_2\| = 0.$
   Maka hal ini hanya dipenuhi untuk $k_1 = 0$ maka $x = 0$.
2. Akan ditunjukkan bahwa $\|\alpha x\|_1^* = |\alpha| \|x\|_1^*$. Perhatikan,
   $\|\alpha x\|_1^* = \|\alpha x, a_1\| + \|\alpha x, a_2\| = |\alpha| \{\|x, a_1\| + \|x, a_2\|\} = |\alpha| \|x\|_1^*.$
3. Akan ditunjukkan bahwa $\|x + y\|_1^* \leq \|x\|_1^* + \|y\|_1^*$. Perhatikan bahwa,
   $\|x + y\|_1^* = \|x + y, a_1\| + \|x + y, a_2\|$
   $\leq \{\|x, a^1\| + \|y, a^1\|\} + \{\|x, a^2\| + \|y, a^2\|\}$
   $= \{\|x, a^1\| + \|x, a^2\|\} + \{\|y, a^1\| + \|y, a^2\|\}$
   $= \|x\|_1^* + \|y\|_1^*.$

   Dari ketiga sifat di atas kita simpulkan bahwa $\|x\|_1^*$ adalah norm di X. ■

Dengan menggunakan norm $\|\cdot\|_1^*$, maka Lema 4.4.1. dan Lema 4.4.2. dapat ditulis sebagai berikut.

Akibat 4.4.4. *Jika barisan* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* X *maka* $\lim \|x(k) - x\|_1^* = 0$ *dan jika barisan* $(x(k))$ *Cauchy di* X *maka* $\lim \|x(k) - x(l)\|_1^* = 0$.

Bukti : Gunakan definisi $\|\cdot\|_1^*$, akibat dari Lema 4.4.1. dan Lema 4.4.2. ■

4.5. Hubungan antara ruang norm-2 dan ruang norm berdimensi hingga

Pada Bab 2 telah dibahas bahwa sebarang norm pada X yang berdimensi hingga adalah ekuivalen dengan norm yang lainnya, sehingga dapat kita peroleh bahwa norm $\|\cdot\|_1$ ekuivalen dengan norm $\|x\|_1^*$ di X.

Proposisi 4.5.1. *Norm* $\|\cdot\|_1$ *ekuivalen dengan norm* $\|\cdot\|_1^*$ *di* X.
Bukti : Lihat Teorema 2.4.2. ■

Berdasarkan hasil di atas dan pembahasan sebelumnya diperoleh beberapa fakta mengenai hubungan kekonvergenan barisan.

Lema 4.5.2. *Misalkan* $(x(k))$ *barisan di* X *dan* $x \in X$, *maka*
1. *Barisan* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *jika dan hanya jika barisan* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* $(X, \|\cdot\|_1)$.
2. *Barisan* $(x(k))$ *Cauchy di* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *jika dan hanya jika barisan* $(x(k))$ *Cauchy di* $(X, \|\cdot\|_1)$.

Bukti : Gunakan Akibat 4.3.6. ■

Lemma 4.5.3. *Misalkan* $(x(k))$ *barisan di* X *dan* $x \in X$, *maka*
1. *Barisan* $(x(k))$ *konvergen ke x di* $(X, \|\cdot\|_1)$*jika dan hanya jika barisan* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* $(X, \|\cdot\|_1^*)$.
2. *Barisan* $(x(k))$ *Cauchy di* $(X, \|\cdot\|_1)$ *jika dan hanya jika barisan* $(x(k))$ *Cauchy di* $(X, \|\cdot\|_1^*)$.

Bukti : Misalkan $(x(k))$ barisan di X dan $x \in X$,
1. (⇒) Misalkan Barisan $(x(k))$ konvergen ke x di $(X, \|\cdot\|_1)$. Karena norm $\|\cdot\|_1$ ekuivalen dengan norm $\|\cdot\|_1^*$ di X, maka untuk setiap $y \in X$ terdapat $a, b > 0$ sehingga
$$a\|y\|_1 \le \|y\|_1^* \le b\|y\|_1.$$
Perhatikan bahwa $\|x(k) - x\|_1^* \le b\|x(k) - x\|_1$. Jika $k \to \infty$, maka ruas kanan bernilai nol mengakibatkan $\|x(k) - x\|_1^* = 0$. Dengan demikian $(x(k))$ konvergen ke x di $(X, \|\cdot\|_1^*)$. (⇐) Dibuktikan dengan cara yang serupa dan fakta bahwa
$$\|x(k) - x\|_1 \le \frac{1}{a}\|x(k) - x\|_1^* \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}.$$

2. (⇒) Misalkan Barisan $(x(k))$ Cauchy di $(X, \|\cdot\|_1)$. Norm $\|\cdot\|_1$ ekuivalen dengan norm $\|\cdot\|_1^*$ di X, maka untuk setiap $y \in X$ terdapat $a, b > 0$ sehingga
$$a\|y\|_1 \le \|y\|_1^* \le b\|y\|_1.$$
Perhatikan bahwa $\|x(k) - x(l)\|_1^* \le b\|x(k) - x(l)\|_1$. Jika $k, l \to \infty$, maka ruas kanan bernilai nol mengakibatkan $\|x(k) - x(l)\|_1^* = 0$.

   Dengan demikian $(x(k))$ Cauchy $(X, \|\cdot\|_1^*)$. (⇐) Dibuktikan dengan cara yang serupa dan fakta bahwa
$$\|x(k) - x(l)\|_1 \le \frac{1}{a}\|x(k) - x(l)\|_1^* \text{ untuk setiap } k, l \in \mathbb{N}.$$

Berdasarkan kedua hal di atas disimpulkan lema pun terbukti. ■

Akibat dari Lema 4.5.2. dan Lema 4.5.3. dapat diperoleh,
Akibat 4.5.4. *Misalkan* $(x(k))$ *barisan di* X *dan* $x \in X$, *maka*

1. *Barisan* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *jika dan hanya jika barisan* $(x(k))$ *konvergen ke* x *di* $(X, \|\cdot\|_1^*)$.
2. *Barisan* $(x(k))$ *Cauchy di* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *jika dan hanya jika barisan* $(x(k))$ *Cauchy di* $(X, \|\cdot\|_1^*)$.

Bukti : Gunakan Lema 4.5.2. dan Lema 4.5.3. ■

Lebih lanjut, berdasarkan Lema 4.5.2., Lema 4.5.3., dan Akibat 4.5.4 maka hubungan kekonvergenan barisan di ruang norm dan di ruang norm-2 berdimensi hingga dapat digambarkan dalam diagram berikut.

$$\begin{tikzcd} & (X, \|\cdot,\cdot\|) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ (X, \|\cdot\|_1) \arrow[ur, Rightarrow] & & (X, \|\cdot\|_1^*) \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Gambar 1. Diagram hubungan kekonvergenan barisan
di ruang norm dan di ruang norm-2.

4.6. Teorema Titik Tetap

Pada bagian ini akan dibahas hasil utama yang diperoleh, yaitu Teorema Titik Tetap di ruang norm-2 berdimensi hingga, dimulai dengan lema di bawah ini.

Lema 4.6.1. *Ruang* $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *adalah ruang Banach*-2.

Bukti : Untuk membuktikan lema tersebut dapat digunakan Akibat 4.5.4. Misalkan $(x(k))$ barisan di X dan $x \in X$. Ambil $(x(k))$ barisan Cauchy di $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ menurut Akibat 4.5.4, maka $(x(k))$ barisan Cauchy di $(X, \|\cdot\|_1^*)$. Karena $(X, \|\cdot\|_1^*)$ adalah ruang Banach (akibat Teorema 2.4.3.), maka $(x(k))$ konvergen di $(X, \|\cdot\|_1^*)$. Sebut $x(k) \to x \in (X, \|\cdot\|_1^*)$, sehingga menurut Akibat 4.5.4 maka $(x(k))$ konvergen ke x di $(X, \|\cdot,\cdot\|)$. Karena $(x(k))$ Cauchy dan konvergen ke x di $(X, \|\cdot,\cdot\|)$, dengan demikian kita simpulkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ ruang Banach-2. ■

Teorema 4.6.2. *(Teorema Titik Tetap) Misalkan* $\{a_1, a_2\} \subset X$ *himpunan bebas linear dan* T *adalah pemetaan kontraktif pada* X *sehingga*

$$\|Tx - Ty, a_i\| \leq C\|x - y, a_i\|$$

untuk setiap $x, y \in X$ *dan* $i = 1,2$, *dimana* C *adalah konstanta pada* $(0,1)$. *Maka* T *memiliki titik tetap yang tunggal di* X.

Bukti : Berdasarkan Teorema 2.4.3 maka $(X, \|\cdot\|_1^*)$ adalah ruang Banach. Selanjutnya dengan menggunakan norm $\|\cdot\|_1^*$ yang diturunkan dari norm-2 dan himpunan bebas linear $\{a_1, a_2\} \subset X$, pemetaan T memenuhi

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|_1^* &= \|Tx - Ty, a_1\| + \|Tx - Ty, a_2\| \\ &\leq C\|x - y, a_1\| + C\|x - y, a_2\| \\ &= C\{\|x - y, a_1\| + \|x - y, a_2\|\} \\ &= C\|x - y\|_1^* \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Jadi T kontraktif terhadap norm $\|\cdot\|_1^*$. Karena $(X, \|\cdot\|_1^*)$ adalah ruang Banach, maka menurut Teorema Titik Tetap untuk ruang Banach T mempunyai titik tetap yang tunggal di X. ■

DAFTAR PUSTAKA

[1] H. Gunawan. The space of p-summable sequences and its natural n-norm, *Bull. Austral. Math. Soc*. 64 (2001), 137-147.

[2] H. Gunawan and M. Mashadi. On finite-dimensional 2-normed space, *Soochow J. Math*. 27 (2001), 321-329.

[3] H. Gunawan and M. Mashadi. On n-normed spaces, *Int. J. Math. Sci*. 27 (2001), 321-329.

[4] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Application*, John Wiley & Sons Inc, New York, 1978.

[5] N. Young. *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.