Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.12 No.2 (Desember 2018) Hal. 12-18

SIFAT KEPRIMAAN MODUL SEDERHANA CHEN UNTUK GRAF A_∞

Risnawita, Irawati, Intan Muchtadi-Alamsyah
Kelompok Keahlian Aljabar, FMIPA Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha no. 10 Bandung, Indonesia
E-mail: risnawita@yahoo.com

ABSTRACT

Let K be a field, E is a directed graph. Let $A_\sim$ is a directed line graph. Suppose that $V_{[p]}$ is a class of Chen simple module for the Leavitt path algebra $(LK\ (E))$, with [p] being equivalent classes containing an infinite path. An infinite path p is an infinite sequence from the sides of a graph. In this paper it will be shown that $V_{[p]}$is not a prime module of the Leavitt path algebra for graph A_∞.

Keywords : Leavitt path algebra, Graph $A_\sim$, Chen simple modules, Prime modules

ABSTRAK

Misalkan K suatu lapangan, E suatu graf berarah. Diberikan $A_\sim$ suatu graf garis berarah. Misalkan $V_{[p]}$ suatu kelas modul sederhana Chen atas aljabar lintasan Leavitt $(LK\ (E))$, dengan $[p]$ merupakan kelas-kelas ekivalen yang memuat suatu lintasan tak berhingga. Suatu lintasan tak berhingga p adalah suatu barisan tak berhingga dari sisi-sisi pada graf. Dalam tulisan ini akan ditunjukan bahwa $V_{[p]}$ bukan merupakan modul prima atas aljabar lintasan Leavitt untuk graf A_∞.

Kata kunci: *Aljabar lintasan Leavitt, Graf $A_\sim$, Modul sederhana Chen, Modul Prima.*

1. PENDAHULUAN

Konsep prima dalam struktur aljabar pada awalnya dikembangkan melalui struktur ideal pada gelanggang. Pada tahun 1871 Dedekind mulai memperkenalkan konsep ideal prima [15]. Kemudian konsep ideal prima diperluas menjadi konsep gelang-gang prima. Konsep modul prima yang dikemukakan oleh J.M Dauns pada tahun 1978 berawal dari pendefinisian struktur ideal prima di gelanggang. Misalkan R gelanggang, I merupakan ideal prima jika untuk setiap $a \in b$ di gelanggang R, ab di I mengakibatkan a di I atau b di I. Kemudian dari pendefinisian ideal prima didefinisikan submodul prima. Misalkan M adalah modul kiri atas gelanggang R(ditulis M R-modul), submodul $N \neq M$ dikatakan prima apabila $rm \in N$ dengan $r \in R$ dan $m \in M$ mengakibatkan rm di N atau r di $(N : M) = \{r \in R: rM \subseteq N\}$. Modul M dikatakan modul prima jika submodul 0 merupakan submodul prima pada M yaitu untuk setiap r unsur di R dan m di M sehingga $rm = 0$ maka r di $Ann(M)$ atau $m = 0$, dengan $Ann(M)$ pembuat nol dari M yaitu himpunan semua r unsur di R yang mengakibatkan $rM = 0$. Di lain pihak pengembangan konsep dari gelanggang herediter Noether prima (HNP) menjadi modul HNP telah dilakukan dalam [10] dan [11]. Lebih lanjut dalam [9] dan [18] telah dilakukan karakterisasi submodul prima. Lomp dan Pena telah mengkaji tentang himpunan pembuat nol pada suatu modul prima [5] . Penelitian lainnya tentang modul prima yaitu modul koprima dan komodul prima[14]. Sementara itu konsep prima juga berkembang pada aljabar lintasan.

Aljabar lintasan merupakan suatu aljabar atas suatu lapangan K yang basisnya merupakan himpunan semua lintasan pada kuiver. Kuiver dalam hal ini dipandang sebagai graf berarah yang terdiri dari himpunan titik E^0, himpunan sisi E^1 serta dua pemetaan $r, s : E^1 \to E^0$ yang memetakan setiap sisi $e \in E^1$ ke titik ujungnya $r(e)$ dan ke titik sumbernya $s(e)$[12]. Penelitian tentang aljabar lintasan juga telah banyak dilakukan. Setiap aljabar berdimensi hingga dapat digambarkan sebagai suatu kuiver dan sebaliknya[12]. Pada tahun 2008 Aranda Pino mengkaji tentang syarat perlu dan cukup suatu aljabar lintasan bersifat semiprima [2]. Dengan memandang kuiver sebagai suatu graf berarah maka kuiver dapat diperluas dengan memandang arah sebaliknya dari setiap sisi pada kuiver tersebut. Ara, Moreno dan Pardo mende nisikan suatu aljabar lintasan Leavitt merupakan suatu aljabar lintasan pada graf perluasan yang memenuhi relasi Cuntz-Krieger[20]. Kemudian Aranda Pino dan Abrams juga mende nisikan aljabar lintasan Leavitt adalah suatu aljabar yang analog dengan graf C -aljabar [1].

Penelitian tentang aljabar lintasan Leavitt atas suatu lapangan ini juga telah banyak dilakukan. Aranda Pino, dkk pada tahun 2007 telah mengkaji syarat perlu dan cukup suatu graf E sehingga aljabar lintasan Leavitt atas suatu lapangan K merupakan aljabar berdimensi hingga. Penelitian tentang aljabar lintasan Leavitt yang bersifat prima juga telah banyak dilakukan[3]. Ranggaswami mengkaji tentang karakterisasi ideal prima dari aljabar lintasan Leavitt dari sebarang graf[16]. Ara dan Rangaswamy juga telah membuktikan bahwa modul sederhana atas aljabar lintasan Leavitt merupakan modul yang disajikan secara hingga [19]. Kemudian jika diberikan aljabar lintasan Leavitt L dan suatu S L-modul sederhana, Rangaswamy menghitung kardinalitas himpunan semua L-modul sederhana atas aljabar lintasan Leavitt yang isomorf dengan S[17]. Lebih lanjut dalam [21] telah dibuktikan bahwa modul prima atas aljabar lintasan dari graf pohon dan graf $\tilde{A}$ hanyalah modul sederhana. Dalam tulisan ini akan dibahas tentang sifat keprimaan dari modul sederhana Chen tipe $V_{[p]}$.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 ALJABAR LINTASAN DAN ALJABAR LINTASAN LEAVITT

Dalam bagian ini akan dijelaskan teori dasar mengenai aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt.

Definisi 2.1.1 Suatu graf (berarah) $E = (E^0, E^1, r, s)$ adalah empat terurut yang terdiri atas himpunan E^0 yang unsurnya dinamakan titik, himpunan E^1 yang unsurnya dinamakan panah, pemetaan $s : E^1 \to E^0$ dan pemetaan $r : E^1 \to E^0$. Untuk setiap $\alpha \in E^1$, titik $s(\alpha) \in E^0$ dinamakan titik awal dari α dan $r(\alpha)$ dinamakan titik akhir dari α.

Suatu panah $\alpha \in E^1$dengan titik awal $a = s(\alpha)$ dan titik akhir $b = r(\alpha)$ dapat dituliskan menjadi $\alpha : a \to b$. Sedangkan suatu graf $E = (E^0, E^1, r, s)$ dapat ditulis secara singkat menjadi E.

Dalam pembahasan ini, graf (berarah) yang dimaksud adalah graf tanpa pembatasan banyaknya panah antara dua titik, dan tanpa pembatasan akan adanya loop atau cycle berarah.

Berikut diberikan definisi aljabar lintasan.

Definisi 2.1.2. Misalkan K suatu lapangan dan E suatu graf. Aljabar lintasan KE dari E adalah K-aljabar dengan basis ruang vektornya adalah himpunan semua lintasan $(a|\alpha_1, \cdots, \alpha_l|b)$ dengan panjang $l \geq 0$ di E dan perkalian antara dua vektor basis $(a|\alpha_1, \cdots, \alpha_l|b)$ dan $(c|\beta_1, \cdots, \beta_k|d)$ dari KE didefinisikan oleh:

$(a|\alpha_1, \cdots, \alpha_l|b)(c|\beta_1, \cdots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \beta_1, \cdots, \beta_k|d)$ dimana δ_{bc} adalah fungsi Kronecker delta. Dengan kata lain hasil perkalian dua lintasan $\alpha_1 \cdots \alpha_l$ dan $\beta_1 \cdots \beta_k$ sama dengan nol jika $r(\alpha_l) \neq s(\beta_1)$ dan sama dengan lintasan $\alpha_1 \cdots \alpha_l \ \beta_1 \cdots \beta_k$ jika $r(\alpha_l) = s(\beta_1)$. Perkalian dua unsur basis diperluas untuk sebarang unsur KE dengan aturan distributif.

Definisi 2.1.3. Suatu lintasan tak berhingga adalah suatu barisan tak berhingga dari sisi-sisi $p = e_1 e_2 \cdots e_n \cdots$, dengan $r(e_i) = s(e_{i+1}); \forall i$.

Definisi 2.1.4. Diberikan suatu lintasan tak berhingga $p = e_1 e_2 \cdots e_n \cdots$, $\forall n \geq 1$, $\tau_{\leq n}(p) = e_1 e_2 \cdots e_n$ dan $\tau_{>n}(p) = e_{n+1} e_{n+2} \cdots$. Dua lintasan tak berhingga p, q dikatakan ekivalen jika $\tau_{>n}(p) = \tau_{>m}(q)$untuk suatu bilangan bulat m, n.

Kelas-kelas ekivalen yang memuat suatu lintasan tak berhingga dinotasikan dengan $[p]$.

Berikutnya akan diperkenalkan aljabar lintasan Leavitt.

Graf E dapat diperluas dengan memandang arah sebaliknya dari sisi-sisi dalam E^1. Sisi dalam E^1 disebut sisi nyata dan sisi dengan arah berlawanan dari sisi nyata disebut sisi hantu. Himpunan semua sisi hantu dalam E dinyatakan dengan E_1^*. Graf E yang diperluas didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.5 Diberikan graf $E = (E^0, E^1, r, s)$. Graf perluasan E adalah graf baru $\hat{E} = (E^0, E^1 \cup E_1^*, r', s')$ dengan E_1^*=$\{e_1^* | e_1 \in E^1\}$ dan fungsi r', s' didefenisikan sebagai berikut $r'|_{E^1} = r$, $s'|_{E^1} = s$, $r'(e_1^*) = s(e_i)$ dan $s'(e_i^*) = r(e_i)$.

Jika $s^{-1}(v)$ adalah himpunan berhingga, $\forall v \in E^0$, maka graf E disebut graf baris hingga. Berikut ini beberapa istilah dalam graf yang akan digunakan, yaitu:

1. Jika $s(e) = v$ dan $r(e) = w$, maka dikatakan bahwa v memancarkan (emit) e, dan w menerima e atau e menuju w. Titik $v \in E^0$ disebut sumber jika v tidak menerima setiap sisi, dengan kata lain v sumber jika $v \neq r(e)$ untuk

setiap $e \in E^1$ atau $r^{-1}(v) = \emptyset$. Titik v disebut sink jika v tidak memancarkan sebarang sisi, artinya $v \neq s(e), \forall v \in E^0$.
2. Jika kardinalitas $s^{-1}(v) = \infty$ maka v disebut infinite emitter.
3. Jika v merupakan sink atau infinite emitter maka v disebut titik singular.

Untuk selanjutnya kita akan bekerja dengan graf baris hingga.

Definisi 2.1.6. Misalkan K suatu lapangan dan E merupakan graf baris hingga. Aljabar lintasan Leavitt dari E dengan koefisien di K didefinisikan sebagai aljabar lintasan atas graf perluasan $\hat{E}$, dengan relasi:

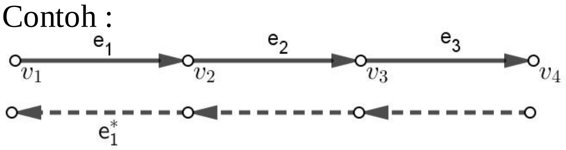
$(CK1) e^* f = \delta_{ef}\, r(e)$ untuk setiap $e, f \in E^1$

$(CK2) v = \sum_{\{e \in E^1 | s(e) = v\}} ee^*$ untuk setiap $v \in E^0$ bukan sink.

Aljabar ini dinotasikan dengan $L_K(E)$ (cukup disingkat dengan $L(E)$.

Syarat $(CK1)$ dan $(CK2)$ disebut relasi Cuntz-Krieger. Secara khusus syarat $(CK2)$ adalah relasi Cuntz-Krieger di v. Jika v sink maka kita tidak harus memiliki relasi $(CK2)$ di v. Syarat baris-hingga dibutuhkan untuk mende nisikan persamaan $(CK2)$.

Contoh :



Cara lain untuk mende nisikan aljabar Leavitt adalah sebagai berikut.

Definisi 2.1.7. Diberikan graf $E = (E^0, E^1, r, s)$, aljabar lintasan Leavitt dari graf E dengan koefisien di K adalah K-aljabar yang dibangun oleh himpunan $\{ v : v \in E^0\}$ dan himpunan sisi $\{ e, e^* : e \in E^1\}$ yang memenuhi kondisi berikut:

1. $s(e)e = e = er(e)$, untuk setiap $e \in E^1$.
2. $r(e)e = e = e\, s(e)$,untuk setiap $e \in E^1$.
3. $(CK1) e^* f = \delta_{ef}\, r(e)$ untuk setiap $e, f \in E^1$.
4. $(CK2) v = \sum_{\{e \in E^1 | s(e) = v\}} ee^*$ untuk setiap $v \in E^0$ bukan sink.

2.2 MODUL PRIMA DAN MODUL SEDERHANA CHEN $V_{[p]}$

Berikut ini akan diberikan definisi dari modul prima dan modul sederhana Chen. Dalam [23] modul sederhana didefenisikan dengan menggunakan lintasan tak berhingga.

Definisi 2.2.1. Misalkan M adalah modul kiri atas ring R, submodul $N \neq M$ disebut prima apabila $rm \in N$ dengan $r \in R$ dan $m \in M$ mengakibatkan $m \in N$ atau $r \in (N : M) = \{r \in R : rM \subseteq N\}$.

Definisikan $Ann(M)$, pembuat nol dari M sebagai:

$$Ann(M) := \{r \in R : rm = 0, \text{ untuk setiap } m \in M\}$$

Dari definisi submodul prima di atas maka modul M dikatakan modul prima jika submodul 0 merupakan submodul prima pada M yaitu jika $rm = 0$ dengan $r \in R$ dan $m \in M$ maka $r \in Ann(M)$ $atau$ $m = 0$.

Teorema 2.2.2. Misalkan K suatu lapangan dan A_∞ graf

Modul Prima tak terdekomposisi atas aljabar lintasan KA_∞ hanyalah modul sederhana tak terdekomposisi.

Bukti. lihat[21]

Selanjutnya akan diberikan defenisi dari modul sederhana Chen.

Definisi 2.2.3. Misalkan $V_{[p]}$ merupakan K-ruang vektor dengan basisnya $\{q : q \in [p]\}$, didefinisikan untuk setiap titik u dan sisi e di E. Transformasi linier P_u, S_e, S_e^* pada $V_{[p]}$ didenisikan sebagai berikut:

$$P_u(p) = \begin{cases} p\ , jika\ u = s(p) \\ 0, lainnya \end{cases}$$

$$S_e(p) = \begin{cases} ep, jika\ r(e) = s(p) \\ 0, lainnya \end{cases}$$

$$S_e^*(p) = \begin{cases} p', jika\ p = ep' \\ 0, lainnya \end{cases}$$

Endomorfisma $\{P_u,\ S_e,\ S_e^*:\ \mathrm{u} \in E^0, e \in E^1\}$memenuhi relasi 1-4 dari aljabar lintasan Leavitt. Berikutnya dapat dibuat suatu homomorfisma aljabar

$$\varphi{:}\mathrm{L} \to \mathrm{End}_K\ V_{[p]}.$$

Untuk setiap titik u $\in E^0$ dan sisi $e \in E^1$, maka

$$\varphi: u \to P_u,\ \ \varphi: e \to S_e,\ \ \varphi: e^* \to S_e^*.$$

Sehingga melalui homomorfisma φ dapat diperiksa bahwa $V_{[p]]}$ merupakan modul sederhana.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan dilakukan melalui studi literatur. Prosedur yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan menggunakan teorema pada aljabar lintasan untuk melihat sifat keprimaan dari modul sederhana Chen tipe $V_{[p]}$.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam Teorema 2.2.2 telah dibuktikan bahwa modul sederhana atas aljabar lintasan dari graf A_∞ merupakan modul prima, namun pada modul sederhana Chen tipe $V_{[p]}$ tidak berlaku.

Contoh penyangkal:

Ambil $m = p_1 + p_2$, $r = 5v_1 + 3v_2 - 5e_1 - 3e_1^*$, jelas $m \neq 0$. Dengan menggunakan Definisi 2.2.1 dan Definisi 2.2.3 diperoleh

$$
\begin{aligned}
rm &= 5\varphi(v_1) + 3\varphi(v_2) \\
&= \left(5\,P_{v_1} + 3\,P_{v_2} - 5S_{e_1} - 3S_{e_1^*}\right)(\,p_1 + p_2) \\
&= 5p_1 - 3p_2 + 3p_2 - 5p_1 = 0
\end{aligned}
$$

Tetapi $rp_1 = (5v_1 + 3v_2 - 5e_1 - 3e_1^*)p_1 = 5p_1 - 3p_2 \neq 0.$

Dengan demikian terdapat $r \in L(E)$, $m \in V_{[p]}$ dengan rm=0, namun $rM \neq 0$.

5. KESIMPULAN

Dalam Teorema 2.2.2 telah dibuktikan bahwa modul sederhana atas aljabar lintasan dari graf A_∞ merupakan modul prima, namun pada modul sederhana Chen tipe $V_{[p]}$ bukan merupakan modul prima.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Abrams, G. and Aranda Pino, G. 2005, *The Leavitt path algebra of a graph, Journal of Algebra*, 293, 319{334.

[2] Aranda Pino, G., Barquero, D. M., Gonzales, C. M. and Siles Molina, M. 2008, *The Socle of Leavitt Path Algebra*, Journal of Pure and Applied Algebra, 3, 500{509.

[3] Aranda Pino, G, E. Pardo, M. S. M. 2009, *Prime Spectrum and Primitive Leavitt Path Algebra*, Indiana. Univ. Math. Journal, 58, 869{890.

[4] A.P. Santika and I. Muchtadi-Alamsyah, *The p-regular subspaces of symmetric Nakayama algebras and algebras of dihedral and semi-dihedral type*, JP Journal of Algebra Number Theory and Applications vol 27 No 2 (2012), 131-142.

[5] C Lomp and A. J. Pena, 2000. *A Note on Prime Modules*, vol 8, 1,31-42. Divul-gaciones Matematicas.

[6] Dauns, John, *Modules and Rings*,1994, cambride university press.

[7] D. Kariman, I.M.Maris, Risnawita, *Dual Right Serial Algebras*, in Advances in Algebraic Structures, Proceeding International Conference in Algebra, World Scienti c, 2012.

[8] Faisal, I. Muchtadi-Alamsyah, *Characterization of Nakayama m-Cluster Tilted Algebra of Type An*, accepted in Journal of Indonesian Math. Soc.

[9] I.G.A.W.Wardhana, P.Astuti, I. Muchtadi-Alamsyah, *On almost prime submod-ules of a module over a principal ideal domain*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications vol 38 Issue 2 (2016), 121-128.

[10] Irawati (2004), *Struktur Modul di Sekitar Modul Dibangun secara Hingga atas Gelanggang HNP dan Generalisasi Gelanggang HNP*, Disertasi, Departemen Matematika ITB.

[11] Irawati, *The generalization of HNP ring and nitely generated modules over HNP ring*, International Journal of Algebra vol 5 no 13 (2011), 611-626.

[12] I.Assem, D.Simson, A.Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1*, London Mathematical Society Student Texts 65, Cam-bridge University Press, 2006.

[13] I.Muchtadi-Alamsyah, *Braid action on derived category of Nakayama algebras*, Communication in Algebra vol. 36 Issue 07 (2008) 2455-2569.

[14] I. E. Wijayanti, *Coprime Modules and Comodules*. Journal of Algebra, 2006, vol 305, number 2,937-948.

[15] Kleiner, I, *a History of Abstract Algebra*,2000. Berlin.

[16] Kulumani M.Rangaswamy, *The Theory of Prime Ideal of Leavitt Path Algebra over arbitrary Graph(2013)* , Journal of Algebra.

[17] Kulumani M.Rangaswamy, *On simple modules over Leavitt path algebras*, Journal of Algebra (2015), 239-258.

[18] K. Saleh, P.Astuti, I. Muchtadi-Alamsyah, *On the structure of nitely gener-ated primary modules*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications vol 38 Issue 5 (2016), 519-533.

[19] Pere Ara, Kulumani M.Rangaswamy, *Finitely presented simple modules over Leavitt path algebras*, Journal of Algebra (2014), 333-352.

[20] P. Ara, M. A. Gonzallez-Barroso 2004, *Fractional Skew Monoid Rings*, Journal of Algebra, 278, 104{106.

[21] Risnawita, Irawati, I. Muchtadi-Alamsyah, *Prime module over path algebra of tree and graph* $\tilde{A}$(submitted)

[22] Roman, S., Advance Linier Algebra,2007. In : *Graduated Text In Mathematics*, vol 135, Birkhauser Boston, New York, 2007.

[23] X.W. Chen, *Irreducible representations of Leavitt path algebras*, Forum Math. 20 (2012) http://dx.doi.org/10.1515/forum-2012-0020