Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.15 No.1 (Juni 2021) Hal. 13-26

BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* PADA GRAF-*H*

Ayu Nanie Maretha, M. Mahfuzh Shiddiq, Na'imah Hijriati

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
Email: ayunaniemaretha@gmail.com

ABSTRACT

In graph theory, there is a coloring concept, namely edge coloring and vertex coloring. A path in edge colored graph having different color is called a rainbow path. An Edge colored of the graph is called rainbow connected if any two vertices are connected by rainbow path. The rainbow connection number of a graph, denoted by $rc(G)$, is the smallest number of colors that are needed in order to make a graph G rainbow connected. A path in a vertex colored graph with internal vertice having different color is called a rainbow vertex path. A vertex colored graph is called rainbow connected if any two vertices are connected by rainbow vertex path. The rainbow vertex connection number, denoted by $rvc(G)$, is the smallest number of colors that are needed in order to make a graph G rainbow vertex connected. An H-graph is a graph that is shaped like the letter H. The corona operation is a way to generate a new graph by operating two graphs. The purpose of this research is to determine the rainbow connection number and the rainbow vertex connection number of H-graph. The results obtained are rainbow connection number of H-graph is $2n - 1$, rainbow vertex connection number of H-graph is $2n - 4$ and rainbow vertex connection number of $H \odot mK_1$ graph is $2n$.

Keywords : Rainbow Connection Number, Rainbow Vertex Connection Number, H-graph

ABSTRAK

Pada teori graf terdapat konsep pewarnaan yaitu pewarnaan sisi dan pewarnaan titik. Lintasan *rainbow* yaitu apabila sisi yang berbeda di lintasan tidak terdapat warna yang sama. Apabila ada dua titik yang terhubung oleh lintasan *rainbow* maka pewarnaan sisi graf disebut *rainbow connected*. Bilangan *rainbow connection* yang dinotasikan dengan $rc(G)$ adalah bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan agar terbentuk graf bersifat *rainbow connected*. Lintasan *rainbow vertex* yaitu lintasan pada graf sedemikian sehingga tidak terdapat dua titik internal atau titik dalam lintasan yang mempunyai warna yang sama. Pewarnaan titik pada graf disebut *rainbow connected* jika sebarang dua titik pada graf berwarna titik dihubungkan oleh lintasan *rainbow vertex*. Bilangan *rainbow vertex connection* yang dinotasikan dengan $rvc(G)$ adalah bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan agar terbentuk graf bersifat *rainbow vertex connected*. Graf-H merupakan graf yang berbentuk seperti huruf H. Operasi korona merupakan cara untuk menghasilkan dua buah graf menjadi suatu graf baru. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex connection* pada graf-H. Hasil penelitian yang diperoleh yaitu bilangan rainbow connection pada graf-H yaitu $2n - 1$, bilangan rainbow vertex connection pada graf-H yaitu $2n - 4$ dan bilangan rainbow vertex connection pada graf $H \odot mK_1$ adalah $2n$.

Kata kunci: Bilangan *Rainbow Connection*, Bilangan *Rainbow Vertex Connection*, Graf-*H*

1. LATAR BELAKANG

Teori graf merupakan kajian tentang graf yang mempunyai banyak aplikasi hingga saat ini. Graf digunakan untuk menggambarkan objek diskrit yang dilambangkan dengan titik dan hubungannya dengan objek-objek tersebut yang disimbolkan dengan garis. Pada teori graf terdapat konsep pewarnaan yaitu pewarnaan titik dan pewarnaan sisi [7]. *Rainbow connection* merupakan salah satu tema yang dikaji dalam pewarnaan graf[3]. Pada *rainbow connection* akan dicari bilangan warna terkecil untuk membentuk graf yang *rainbow connected*. Hal ini disebut dengan bilangan *rainbow connection.* Pada penelitian sebelumnya tentang *rainbow coloring* pada graf *shadow*, dijelaskan bahwa graf *shadow* adalah graf bayangan dari graf lintasan [1]. Graf *shadow* atau graf bayangan dapat dikembangkan lagi menjadi graf baru yaitu graf-H. Graf-H dibuat dari satu lintasan dan bayangannya dengan masing-masing titik tengah graf lintasan terhubung membentuk sisi sehingga terbentuk graf yang berbentuk huruf H. Berdasarkan bentuk graf-H, terdapat berbagai bentuk lintasan yang dapat membentuk graf-H, jika dilihat dari sudut pandang cara mengambil lintasan. Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis tertarik untuk menyelidiki bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex connection* pada graf-H. Artikel ini mengkaji kembali tulisan Parmar & Suthar, 2019.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf

Secara sederhana, graf didefinisikan sebagai kumpulan titik yang dihubungkan sehingga membentuk sisi.

Definisi 2.1.1 [7]
Graf G didefinisikan dengan $G = (V, E)$ *dengan* $V\ (G)$ *dan* $E(G)$*berturut-turut merupakan himpunan titik dan sisi yang menyambungkan dua titik.*

Graf lengkap sebanyak n titik disimbolkan dengan K_n [5]. Graf K_1 adalah graf lengkap dengan satu titik atau disebut graf tunggal[9].

Definisi 2.1.2 [7]
Lintasan sepanjang n dari titik v_0 *ke titik* v_n *pada graf merupakan deretan titik dan sisi yang berbentuk* $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$*, sedemikian sehingga* $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ *merupakan sisi-sisi dari graf .*

Definisi 2.1.3 [7]
Graf dikatakan graf yang terhubung apabila setiap pasang titik v_i *ke* v_j *pada himpunan V (G) termuat lintasan dari* v_i *ke* v_j*.*

Sirkuit merupakan lintasan yang bermula dan berakhir di titik yang sama. Adapun graf khusus yang terhubung dan tidak memuat sirkuit disebut graf pohon. Graf pohon didenisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.4 [7]
Pohon merupakan graf terhubung yang tidak berarah dan tidak terdapat sirkuit.

Definisi 2.1.5 [7]
Pada graf G terhubung, jarak $d(v_i, v_j)$ antara titik v_i dan v_j adalah anjang lintasan terpendek yang menghubungkan antara v_i dan v_j.

Definisi 2.1.6 [7]
Diameter graf G, dinotasikan dengan $diam(G)$, adalah jarak terpanjang sembarang dua titik di graf G.

2.2 *Rainbow Connection*

Jika untuk mewarnai sisi suatu graf adalah k warna maka warna yang dibutuhkan adalah sebanyak k warna, sedemikian sehingga sisi yang bertetangga mempunyai warna berbeda, maka graf dikatakan berwarna k-sisi[10]. Pewarnaan sisi yang bersifat $rainbow\ connected$ disebut pewarnaan *rainbow*.

Definisi 2.2.1 [3]
Apabila sisi yang berbeda di lintasan P tidak terdapat warna yang sama, maka P disebut lintasan rainbow.

Graf berwarna pada sisi disebut $rainbow\ connected$ apabila sebarang dua titik dihubungkan oleh lintasan *rainbow*[2]

Definisi 2.2.2 [8]
Bilangan rainbow connection pada graf dilambangkan dengan $rc(G)$ yaitu bilangan warna terkecil, sedemikian sehingga graf G bersifat rainbow connected.

Definisi 2.2.3 [8]
Lintasan rainbow vertex adalah lintasan pada graf sedemikian sehingga tidak terdapat dua titik internal atau titik dalam lintasan yang mempunyai warna yang sama.

Graf berwarna pada titik disebut *rainbow vertex connected* apabila sebarang dua titik terhubung oleh lintasan *rainbow vertex*[5].

Definisi 2.2.4 [6]
Bilangan rainbow vertex connection dinotasikan dengan $rvc(G)$ adalah bilangan warna terkecil untuk membentuk graf G bersifat rainbow vertex connected.

2.3 Graf-H dan Korona Graf

Pada penelitian sebelumnya, telah dikaji tentang pewarnaan *rainbow* pada graf *shadow*. Graf *shadow* adalah graf bayangan dari graf lintasan[1]. Pada penelitian ini, dikembangkan lagi sebuah graf baru dari sebuah graf *shadow*. Suatu graf yang berbentuk seperti huruf H disebut dengan graf-H. Graf-H dibentuk dari sebuah lintasan dengan salinannya dan kedua lintasan tersebut dihubungkan sehingga membentuk graf-H.

Definisi 2.3.1 [8]
Diberikan lintasan $P_n = \{P_{1n}, P_{2n}\}$ dengan masing-masing titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan $u_1, u_2, \dots, u_n$ graf-H dari lintasan P_n adalah graf yang diperoleh dari lintasan P_{1n} dan P_{2n} dengan titik $v_{\frac{n+1}{2}}$ dan $u_{\frac{n+1}{2}}$ bergabung menjadi sebuah sisi jika n ganjil. Sedangkan , jika n genap titik yang bergabung menjadi sebuah sisi yaitu titik $v_{\frac{n}{2}+1}$ dan $u_{\frac{n}{2}}$.

Menurut [4], cara untuk membuat graf baru yaitu dengan mengoperasikan dua buah graf disebut operasi graf. Beberapa jenis operasi antar graf salah satunya adalah operasi korona dari dua graf G_1 dan G_2.

Definisi 2.3.2 [8]
Diberikan graf G_1 dan G_2 dengan masing-masing mempunyai n_1 titik dan n_2 titik. Korona dari graf G_1 dan G_2 adalah graf yang dibentuk dengan mengambil satu salinan G_1 dan n_1 salinan dari G_2 , lalu menghubungkan titik ke-i dari G_1 kesetiap titik di G_2. Selanjutnya, korona G_1 dan G_2 dilambangkan $G_1 \odot G_2$.

3. METODE PENELITIAN

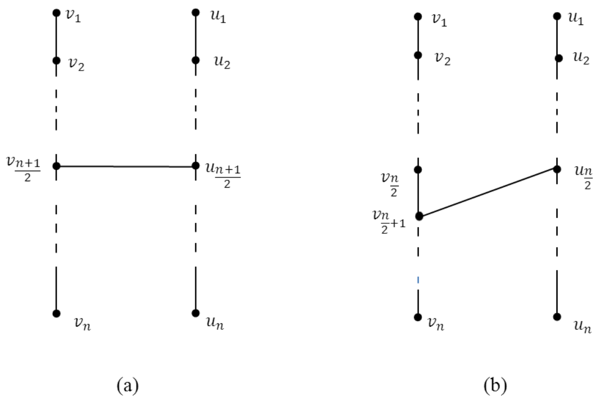
Pada penelitian ini menggunakan tahapan sebagai berikut:

a) Mendefinisikan pewarnaan sisi pada graf-H dengan n genap ataupun n ganjil.
b) Mendata semua kasus lintasan yang dibuat dari sebarang dua titik pada graf-H
c) Menunjukkan bahwa lintasan yang dibuat pada langkah (b) adalah lintasan *rainbow.*
d) Menghitung minimum warna yang dibutuhkan pada langkah (c).
e) Mendefinisikan pewarnaan titik pada graf-H dengan n genap ataupun n ganjil.
f) Mendata semua kasus lintasan yang dibuat dari sebarang dua titik pada graf-H
g) Menunjukkan bahwa lintasan yang dibuat pada langkah (f) adalah lintasan *rainbow vertex.*
h) Menghitung minimum warna yang dibutuhkan pada langkah (g).

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf-*H*

Pewarnaan sisi yang membuat graf bersifat *rainbow connected* disebut pewarnaan *rainbow*. Graf G berwarna sisi dikatakan $rainbow\ connected$ jika sebarang dua titik dihubungkan oleh lintasan *rainbow* yaitu suatu lintasan di G dengan asumsi dua sisi di lintasan tidak mempunyai warna yang sama. Bilangan $rainbow\ connection$ $rc(G)$ adalah minimum warna yang diperlukan untuk menjadikan graf G *rainbow connected*. Berdasarkan Definisi 2.3.1, berikut ini merupakan graf-H jika n ganjil dan n genap yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. (a) Graf-H jika n ganjil (b) Graf-H jika n genap

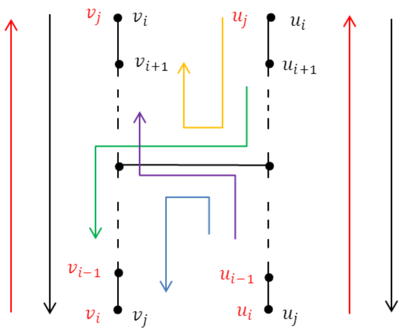
Teorema 4.1.1

Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf-H adalah $2n - 1$.

Bukti: Diberikan $P_n = \{P_{1n}, P_{2n}\}$ dengan lintasan $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan $u_1, u_2, \dots, u_n$. Diketahui dari Definisi 2.3.1, graf-H terdiri dari lintasan P_{1n} dan P_{2n}. Kemudian, salah satu titik di lintsan P_{1n} bergabung dengan salah satu titik di lintasan P_{2n} sehingga menjadi sisi baru yang menghubungkan dua lintasan tersebut. Oleh karena itu, diperoleh $|V| = n + n = 2n$ dan $|E| = 2(n-1) + 1 = 2n - 1$. Selanjutnya, dengan memperhatikan Gambar 1, diberikan algoritma pewarnaan sisi agar graf-H bersifat $rainbow\ connected$ jika n genap atau ganjil sebagai berikut.

1. Lintasan P_{2n} atau sisi tegak sebelah kanan pada graf-H (u_i, u_{i+1}) dengan kondisi $1 \leq i \leq n-1$ diberi warna c_i.
2. Lintasan P_{1n} atau sisi tegak sebelah kiri pada graf-H (v_i, v_{i+1}) dalam kondisi $1 \leq i \leq n-1$ diberi warna c_{n-1+i}, dan jika dalam kondisi $1 < i < n$ diberi warna c_{n+i-3}.
3. Jika n bernilai ganjil dengan sisi $\left(u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}}\right)$ maka diberi warna c_{2n-1}.
4. Jika n bernilai genap dengan sisi $\left(u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1}\right)$maka diberi warna c_{2n-1}.

Berdasarkan algoritma pewarnaan sisi yang sudah diuraikan di atas agar setiap sisi di graf-H mempunyai warna berbeda diperoleh total warna yang dapat dipakai sebanyak $2n - 1$.



Gambar 2. Lintasan *rainbow* pada graf-*H*

Jika sebarang dua titik di graf-*H* termuat lintasan *rainbow* maka disebut *rainbow connected.* Pada Gambar 2 panah berwarna menunjukkan kasus sebarang lintasan yang membentuk graf-*H* berdasarkan arah lintasannya. Indeks berwarna hitam menunjukkan arah lintasan dari atas ke bawah dan sebaliknya untuk indeks berwarna merah menunjukkan arah lintasan dari bawah ke atas. Berikut ini merupakan kasus sebarang lintasan pada graf-H.

Tabel 1. Tabel kasus sebarang lintasan pada graf-*H*

Kasus	Lintasan *rainbow*	Kondisi	Minimum warna
1	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_j$	$1 \le i < j \le n$	$n-1$
2	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_j$	$1 \le j < i \le n$	$n-1$
3	$v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$	$1 \le i < j \le n$	$n-1$
4	$v_i, v_{i-1}, \dots, v_j$	$1 \le j < i \le n$	$n-1$
5	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}+1}, \dots, v_j$	$1 \le i \le \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} \le j \le n$ (n ganjil)	n
	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$ $v_{\frac{n}{2}+2}, \dots, v_j$	$1 \le i \le \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1 \le j \le n$ (n genap)	$n-1$
6	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}-1}, \dots, v_j$	$\frac{n+1}{2} \le i \le n, 1 \le j \le \frac{n+1}{2}$ (n ganjil)	n
	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$	$\frac{n}{2} \le i \le n, 1 \le j \le \frac{n}{2}+1$	$n+1$

	$v_{\frac{n}{2}}, \dots, v_j$	(n genap)	
7	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}-1}, \dots, v_j$	$1 \le i, j \le \frac{n+1}{2}$ (n ganjil)	n
	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$ $v_{\frac{n}{2}}, \dots, v_j$	$1 \le i \le \frac{n}{2}, 1 \le j \le \frac{n}{2} + 1$ (n genap)	n
8	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}+1}, \dots, v_j$	$\frac{n+1}{2} < i, j \le n$ (n ganjil)	n
	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$ $v_{\frac{n}{2}+2}, \dots, v_j$	$\frac{n}{2} < i \le n, \frac{n}{2} + 1 < j \le n$ (n genap)	n

Jadi, dengan mempertimbangkan delapan kasus di atas, sebarang lintasan yang menghubungkan dua titik paling tidak ada satu lintasan di graf-H yang merupakan lintasan *rainbow*. Oleh karena itu, bilangan *rainbow connection* pada graf-H yaitu $2n - 1$. ■

4.2 Bilangan *Rainbow Vertex Connection* pada Graf-*H*

Graf G berwarna titik dikatakan $rainbow\ connected$ jika sebarang dua titik dihubungkan oleh lintasan *rainbow vertex* yaitu suatu lintasan di G dengan setiap titik di lintasan mempunyai warna berbeda. Bilangan $rainbow\ vertex\ connection\ rvc(G)$ adalah minimum warna yang diperlukan untuk menjadikan graf G *rainbow vertex connected*.

Teorema 4.2.1

Bilangan *rainbow vertex connection* pada graf-H dari lintasan P_n adalah $2n - 4$.

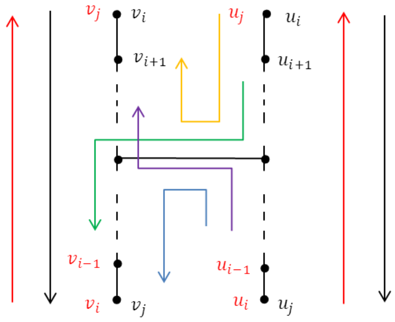
Bukti: Diberikan $P_n = \{P_{1n}, P_{2n}\}$ dengan lintasan $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan $u_1, u_2, \dots, u_n$. Diketahui dari Definisi 2.3.1, graf-H merupakan graf yang dibentuk dar lintasan P_{1n} dan P_{2n} dan salah satu titik tengah di kedua lintasan dihubungkan membentuk sisi baru. Oleh karena itu, diperoleh $|V| = n + n = 2n$ dan $|E| = 2n - 2 + 1 = 2n - 1$.

Selanjutnya, dengan memperhatikan Gambar 1 diberikan algoritma pewarnaan titik agar graf-H bersifat *rainbow vertex connected* jika n genap atau ganjil sebagai berikut.

1. Untuk titik u_i pada lintasan P_{2n}, jika $i = 1$ dan $i = n$ maka diberi warna c_1 dan jika $1 < i < n$ maka diberi warna c_{i-1} . Banyak warna sebelah kanan sama dengan $n - 2$ karena titik ujung diberi warna sama yaitu c_1 .

2. Untuk titik v_i pada lintasan P_{1n}, jika $i = 1$ dan $i = n$ maka diberi warna c_1 dan jika $1 < i < n$ maka diberi warna c_{n+i-3} . Banyak warna sebelah kiri sama dengan $n - 2$ karena titik ujung diberi warna sama yaitu c_1.

Berdasarkan algoritma pewarnaan titik yang sudah diuraikan di atas, diperoleh total warna yang dapat digunakan sebanyak $2n - 4$ warna.



Gambar 3. Lintasan *rainbow vertex* pada graf-*H*

Jika sebarang dua titik di graf-*H* termuat lintasan *rainbow vertex* maka disebut *rainbow vertex connected*. Pada Gambar 3 panah berwarna menunjukkan kasus sebarang lintasan yang membentuk graf-*H* berdasarkan arah lintasannya. Indeks berwarna hitam menunjukkan arah lintasan dari atas ke bawah dan sebaliknya untuk indeks berwarna merah menunjukkan arah lintasan dari bawah ke atas. Berikut ini merupakan kasus sebarang lintasan pada graf-H.

Tabel 2. Tabel kasus sebarang lintasan pada graf-*H*

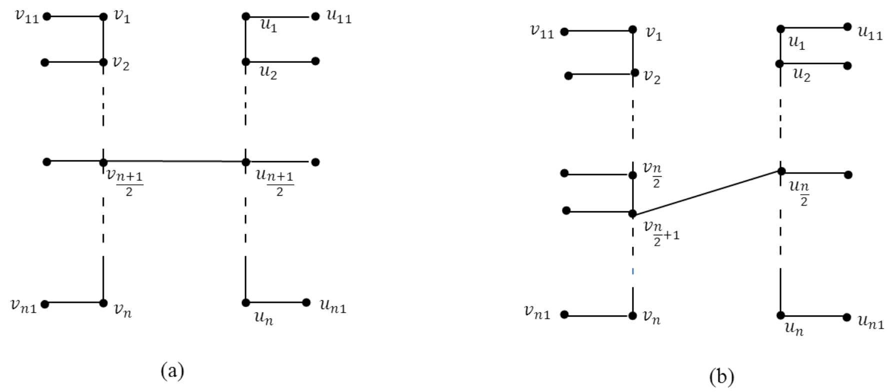
Kasus	Lintasan *rainbow*	Kondisi	Minimum warna
1	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_j$	$1 \leq i < j \leq n$	$n - 1$
2	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_j$	$1 \leq j < i \leq n$	$n - 1$
3	$v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$	$1 \leq i < j \leq n$	$n - 1$
4	$v_i, v_{i-1}, \dots, v_j$	$1 \leq j < i \leq n$	$n - 1$
5	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}+1}, \dots, v_j$	$1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} \leq j \leq n$ (n ganjil)	n
	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1}, v_{\frac{n}{2}+2}, \dots, v_j$	$1 \leq i \leq \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \leq j \leq n$ (n genap)	$n - 1$
	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}},$	$\frac{n+1}{2} \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}$	n

6	$v_{\frac{n+1}{2}-1}, \dots, v_j$	(n ganjil)	
	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$ $v_{\frac{n}{2}}, \dots, v_j$	$\frac{n}{2} \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \frac{n}{2} + 1$ (n genap)	$n + 1$
7	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}-1}, \dots, v_j$	$1 \leq i, j \leq \frac{n+1}{2}$ (n ganjil)	n
	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$ $v_{\frac{n}{2}}, \dots, v_j$	$1 \leq i \leq \frac{n}{2}, 1 \leq j \leq \frac{n}{2} + 1$ (n genap)	n
8	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}+1}, \dots, v_j$	$\frac{n+1}{2} < i, j \leq n$ (n ganjil)	n
	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$ $v_{\frac{n}{2}+2}, \dots, v_j$	$\frac{n}{2} < i \leq n, \frac{n}{2} + 1 < j \leq n$ (n genap)	n

Jadi, dengan mempertimbangkan delapan kasus di atas, sebarang lintasan yang menghubungkan dua titik paling tidak ada satu lintasan di graf-H yang merupakan lintasan *rainbow vertex*. Oleh karena itu, bilangan *rainbow vertex connection* pada graf-H yaitu $2n - 4$. ■

4.3 Bilangan *Rainbow Vertex Connection* pada Graf $H \odot mK_1$

Graf-H yaitu graf yang terdiri atas lintasan P_{1n} dan P_{2n} , dengan titik tengah masing-masing lintasan terhubung menjadi sisi baru. Graf K_1 adalah graf lengkap yang mempunyai satu titik. Selanjutnya, akan dilakukan operasi korona dua buah graf yaitu graf-H dengan graf K_1 dengan m titik, m menunjukkan banyaknya cabang pada graf-H, sedemikian sehingga diperoleh sebuah graf baru yaitu $H \odot mK_1$ yang berupa graf pohon. Contoh dari graf $H \odot mK_1$ dengan $m = 1$ yakni graf $H \odot K_1$ yang mempunyai satu cabang ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 4. (a) n ganjil (b) n genap

Teorema 4.3.1
Bilangan *rainbow vertex connection* pada graf $H \odot mK_1$dari lintasan P_n adalah $2n$.

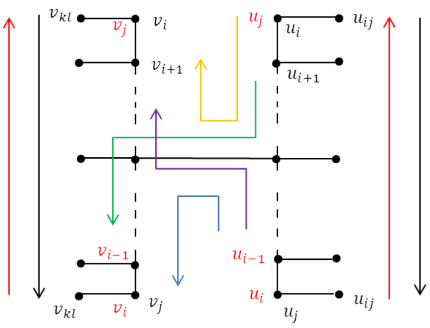
Bukti: Diberikan $P_n = \{P_{1n}, P_{2n}\}$ dengan lintasan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Diketahui dari Definisi 2.3.1 graf-H merupakan graf yang terbentuk dari penggabungan lintasan P_{1n} dan P_{2n} dengan salah satu titik tengah kedua lintasan tersebut dihubungkan. Graf-H memiliki $2n$ titik. Diketahui juga dari Definisi 2.3.2, graf dibentuk dengan mengambil satu salinan graf-H dan $2n$ salinan dari mK_1 . Kemudian, menggabungkan titik ke-i graf-H dengan satu sisi ke setiap titik di $2n$ salinan dari 1 . Dengan demikian, himpunan titik dari graf $H \odot mK_1$adalah

$$\{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{v_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

Oleh karena itu, diperoleh $|V| = 2n(m + 1)$ dan $|E| = 2n(m + 1) - 1$.
Selanjutnya, diberikan pewarnaan titik pada graf $H \odot mK_1$ supaya *rainbow vertex connected* jika n ganjil atau genap sebagai berikut.

1. Untuk titik u_i pada lintasasn P_{2n} jika $1 \leq i \leq n$ diberi warna c_i .
2. Untuk titik v_i pada lintasan P_{1n} jika $1 \leq i \leq n$ diberi warna c_{n+i} .
3. Untuk titik u_{ij} dengan $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ diberi warna c_1 .
4. Untuk titik v_{ij} dengan $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ diberi warna c_1.

Berdasarkan algoritma pewarnaan titik yang sudah diuraikan di atas agar graf $H \odot mK_1$ *rainbow vertex connected* diperlukan total warna yang digunakan sebanyak $2n$ warna.



Gambar 5. Lintasan *rainbow vertex* pada graf $H \odot mK_1$ jika $m = 1$

Graf dikatakan *rainbow vertex connected* jika sebarang dua titik pada graf $H \odot mK_1$ terdapat lintasan *rainbow vertex*. Pada Gambar 5 panah berwarna menunjukkan kasus sebarang lintasan yang membentuk graf $H \odot mK_1$berdasarkan arah lintasannya. Indeks berwarna hitam menunjukkan arah lintasan dari atas ke bawah dan sebaliknya untuk indeks berwarna merah menunjukkan arah lintasan dari bawah ke atas. Berikut ini merupakan kasus sebarang lintasan yang membentuk graf $H \odot mK_1$untuk melihat apakah terdapat lintasan *rainbow vertex*.

Tabel 3. Tabel kasus sebarang lintasan pada graf $H \odot mK_1$

Kasus	Lintasan *rainbow vertex*	Kondisi	Minimum warna
1	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_j$	$1 \leq i < j \leq n$	n
2	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_j$	$1 \leq j < i \leq n$	n
3	$v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$	$1 \leq i < j \leq n$	n
4	$v_i, v_{i-1}, \dots, v_j$	$1 \leq j < i \leq n$	n
5	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}+1}, \dots, v_j$	$1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} \leq j \leq n$ (n ganjil)	$n+1$
	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$ $v_{\frac{n}{2}+2}, \dots, v_j$	$1 \leq i \leq \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \leq j \leq n$ (n genap)	n
6	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}-1}, \dots, v_j$	$\frac{n+1}{2} \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}$ (n ganjil)	$n+1$
	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$	$\frac{n}{2} \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \frac{n}{2} + 1$	$n+2$

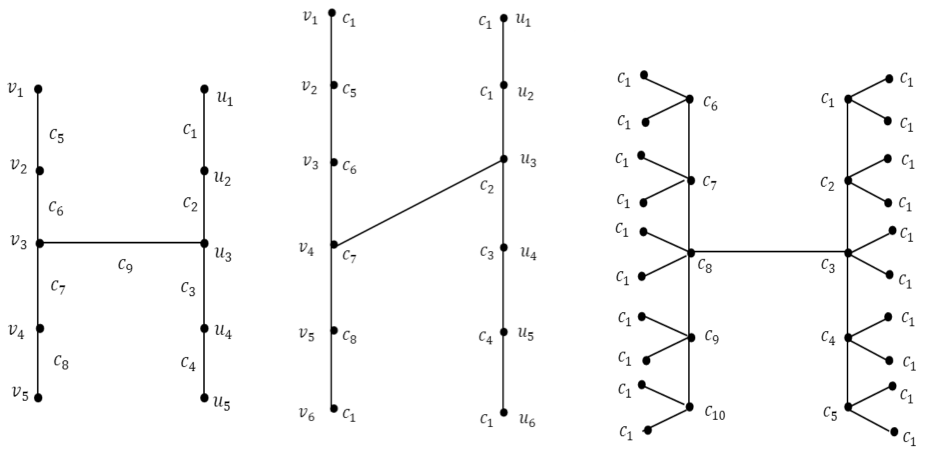
	$v_{\frac{n}{2}}, \dots, v_j$	(n genap)	
7	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}-1}, \dots, v_j$	$1 \le i, j \le \frac{n+1}{2}$ (n ganjil)	$n+1$
	$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$ $v_{\frac{n}{2}}, \dots, v_j$	$1 \le i \le \frac{n}{2}, 1 \le j \le \frac{n}{2} + 1$ (n genap)	$n+1$
8	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}+1}, \dots, v_j$	$\frac{n+1}{2} < i, j \le n$ (n ganjil)	$n+1$
	$u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$ $v_{\frac{n}{2}+2}, \dots, v_j$	$\frac{n}{2} < i \le n, \frac{n}{2} + 1 < j \le n$ (n genap)	$n+1$
9	$u_{ij}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{k-1},$ u_k, u_{kl}	$1 \le i, k \le n, 1 \le j, l \le m$	n
10	$v_{ij}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{k-1},$ v_k, v_{kl}	$1 \le i, k \le n, 1 \le j, l \le m$	n
11	$u_{ij}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}}, \dots, v_{k-1},$ v_k, v_{kl}	$1 \le i \le \frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} \le k \le n,$ (n ganjil)$1 \le j, l \le m$	$n+1$
	$u_{ij}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$ $v_{\frac{n}{2}+2}, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{kl}$	$1 \le i \le \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \le k \le n$ (n genap) $1 \le j, l \le m$	$n+1$
12	$u_{ij}, u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}},$ $v_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}-1}, \dots, v_{k+1},$ v_k, v_{kl}	$\frac{n+1}{2} \le i \le n, 1 \le k \le \frac{n+1}{2}$ (n ganjil)$1 \le j, l \le m$	$n+1$
	$u_{ij}, u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1},$ $v_{\frac{n}{2}}, \dots, v_{k+1}, v_k, v_{kl}$	$\frac{n}{2} \le i \le n, 1 \le k \le \frac{n}{2} + 1$ (n genap) $1 \le j, l \le m$	$n+2$

13	$u_{ij}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}-1}, \dots, v_{k+1}, v_k, v_{kl}$	$1 \le i, k \le \frac{n+1}{2}$ (n ganjil) $1 \le j, l \le m$	$n+1$
	$u_{ij}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1}, v_{\frac{n}{2}}, \dots, v_{k+1}, v_k, v_{kl}$	$1 \le i \le \frac{n}{2}, 1 \le k \le \frac{n}{2}+1$ (n genap) $1 \le j, l \le m$	$n+1$
14	$u_{ij}, u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}}, v_{\frac{n+1}{2}+1}, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{kl}$	$\frac{n+1}{2} < i, k \le n$ (n ganjil) $1 \le j, l \le m$	$n+1$
	$u_{ij}, u_i, u_{i-1}, \dots, u_{\frac{n}{2}}, v_{\frac{n}{2}+1}, v_{\frac{n}{2}+2}, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{kl}$	$\frac{n}{2} < i \le n, \frac{n}{2}+1 < k \le n$ (n genap) $1 \le j, l \le m$	$n+1$

Jadi, dengan mempertimbangkan 14 kasus di atas, sebarang lintasan yang menghubungkan dua titik pada graf $H \odot mK_1$, paling tidak ada satu lintasan yang merupakan lintasan *rainbow vertex*. Oleh karena itu, bilangan *rainbow vertex connection* pada graf $H \odot mK_1$ yaitu $2n$. ■

4.4 Contoh Bilangan *Rainbow (Vertex) Connection* pada Graf-*H*

Berikut ini merupakan contoh dari pewarnaan *rainbow (vertex)* dengan menggunakan algoritma pewarnaan sisi dan titik seperti pada terorema yang sudah dipaparkan sebelumnya.



(a) (b) (c)

Gambar 6. Bilangan *rainbow (vertex) connection* pada graf-*H*

Keterangan:

(a) Bilangan *rainbow connection* pada graf-*H* dari lintasan P_5 adalah 9.
(b) Bilangan *rainbow vertex connection* pada graf-*H* dari lintasan P_6 adalah 8.

(c) Bilangan *rainbow vertex connection* pada graf $H \odot 2K_1$ dari lintasan P_5 adalah 10.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang sudah dipaparkan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Bilangan *rainbow connection* pada graf-H dari lintasan P_n adalah $2n - 1$.
2. Bilangan *rainbow vertex connection* pada graf-H dari lintasan P_n adalah $2n - 4$.
3. Bilangan *rainbow vertex connection* pada graf $H \odot mK_1$ dari lintasan P_n adalah $2n$.

REFERENSI

[1] Arputhamarya A., & Mercy, M. H. (2015). Rainbow Coloring of Shadow Graph. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 101(6), 873–881.

[2] Chakraborty, S., Fischer, E., Matsliah, A., & Yuster, R. (2011). Hardness and algorithms for rainbow connection. *Journal of Combinatorial Optimization*, 21(3), 330–347.

[3] Chartrand G., G. L. J. K. A. M. dan P. Z. (2008). Rainbow connection in graphs. *Mathematica Bohemica*, 133(1), 85–98.

[4] Fauziah, D.A. (2017). *Penerapan Rainbow 2-Connected pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi Korona dan Cartesian. Dinar*. Skripsi, Universitas Jember, Jember.

[5] Krivelevich, M., & Yuster, R. (2010). The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree. *Journal of Graph Theory*, 63(3), 185–191.

[6] Li. X & S. Liu. (2011). Rainbow Vertex-Connections Number of 2-Connected Graphs. *arXiv preprint arXiv*:1110-5770.

[7] Munir, R. (2005). Matematika Diskrit. Edisi ketiga. *Bandung: Informatika*.

[8] Parmar, D. & M. B. S. (2019). Rainbow Connection Number of H-Graph. *Journal of Applied Science and Computations*, 6(3), 1487–1492.

[9] Parmar, N., & Parmar, D. (2018). Product Cordial Labelling in Context of some Graph Operations on Cycle. *Mathematics Today*, 34, 218–227.

[10] Wilson, R.J. (1996). *Introduction to Graph Theory Fourth Edition.* London: Longman.