Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.1 (Juni 2019) Hal. 1-12

GRUP FAKTOR YANG DIBANGUN DARI SUBGRUP NORMAL FUZZY

Mahfuz Tarmizi [1], Saman Abdurrahman [2], M. Mahfuzh Shiddiq [3]

[1,2,3] *Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat*
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
email: *mahfuztarmizi@gmail.com*

ABSTRACT

A Quotient group is a set which contains coset members and satisfies group definition. These cosets are formed by group and its normal subgroup. A set which contains fuzzy coset members is also called a quotient group. These fuzzy cosets are formed by a group and its fuzzy normal subgroup. The purpose of this research is to explain quotient groups induced by fuzzy normal subgroups and isomorphic between them. This research construct sets which contain fuzzy coset members, define an operation between fuzzy cosets and prove these sets under an operation between fuzzy coset satisfy group definition, and prove theorems relating to qoutient groups and homomorphism. The results of this research are $G/_{\mu} = \{\mu_x | x \in G\}$ is a qoutient group induced by a fuzzy normal subgroup, where μ is a fuzzy normal subgroup of a group G, μ_x is a fuzzy coset, and the binary operation is "∘" where $\mu_x \circ \mu_y = \mu_{xy}$ for every $\mu_x, \mu_y \in G/_{\mu}$. An epimorphism f from a group G to a group G' and a fuzzy normal subgroup μ of G which is constant on $ker f$ cause quotient goup $G/_{\mu}$ and $G'/_{f_{\mu}}$ are isomorphic.

Keywords: *Quotient group, fuzzy normal subgroup, fuzzy coset, homomorphism*

ABSTRAK

Grup faktor adalah himpunan yang beranggotakan koset dan memenuhi definisi grup. Koset tersebut dibentuk dari grup dan subgrup normalnya. Himpunan yang beranggotakan koset *fuzzy* dan memenuhi definisi grup juga disebut grup faktor. Koset *fuzzy* tersebut dibentuk dari grup dan subgrup normal *fuzzy* dari grup tersebut. Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan grup faktor yang dibangun dari subgrup normal *fuzzy* beserta keisomorfikan antara dua grup faktor tersebut. Langkah pada penelitian ini adalah membangun himpunan yang beranggotakan koset *fuzzy*, mendefinisikan operasi antar koset *fuzzy* dan membuktikan himpunan tersebut terhadap operasi antar koset *fuzzy* memenuhi definisi grup, dan membuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan grup faktor dan homomorfisma. Hasil penelitian ini adalah $G/_{\mu} = \{\mu_x | x \in G\}$ adalah grup faktor yang dibangun dari subgrup normal *fuzzy*, dengan μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari grup G, μ_x adalah koset *fuzzy*, dan operasi binernya adalah "∘" dengan $\mu_x \circ \mu_y = \mu_{xy}$ untuk setiap $\mu_x, \mu_y \in G/_{\mu}$. Suatu epimorfisma f dari grup G ke grup G' dan subgrup normal *fuzzy* μ dari grup G yang konstan pada $\ker f$ mengakibatkan grup faktor $G/_{\mu}$ isomorfik dengan grup faktor $G'/_{f_{\mu}}$.

Kata Kunci: Grup faktor, subgrup normal *fuzzy*, koset *fuzzy*, homomorfisma

1. PENDAHULUAN

Konsep grup adalah konsep yang berperan penting dalam bidang aljabar. Pada Konsep grup terdapat definisi grup faktor. Suatu grup faktor $G/_N = \{aN \mid a \in G\}$ merupakan himpunan yang beranggotakan koset dan memenuhi definisi grup, dengan himpunan G dan N adalah grup terhadap operasi biner yang sama, $N \subseteq G$ adalah subgrup normal dari G dan aN merupakan koset kiri [2]. Grup faktor biasanya dibahas bersama dengan fungsi yang merupakan homomorfisma.

Berjalannya waktu, konsep grup telah dipadukan dengan konsep *subset fuzzy* yang sekarang dikenal dengan konsep subgrup *fuzzy*. Bermula dari Zadeh (1965) yang memperkenalkan konsep dasar dari *subset fuzzy* [7]. Selanjutnya, Rosenfeld (1971) menggunakan konsep *subset fuzzy* dan memadukannya dengan konsep grup untuk memperkenalkan konsep subgrup *fuzzy* [6]. Telah banyak peneliti melakukan penelitian lebih lanjut mengenai konsep subgrup *fuzzy*. Peneliti tersebut di antaranya Mukherjee & Bhattacharya (1984) meneliti tentang subgrup normal *fuzzy* dan koset *fuzzy*, yang mana dalam penelitian tersebut terdapat pembahasan grup faktor yang dibangun dari subgrup normal *fuzzy* [5]. Lebih jauh, Liu (2004) meneliti tentang grup faktor yang dibangun dari subgrup normal *fuzzy* beserta pembahasannya dengan homomorfisma [3].

Hal yang menarik perhatian penulis adalah grup faktor yang diteliti Mukherjee dan Bhattacharya dan Liu seperti grup faktor pada umumnya, yaitu himpunan yang memenuhi definisi grup. Bedanya, grup faktor tersebut dari himpunan yang beranggotakan koset *fuzzy*. Berdasarkan uraian sebelumnya, penulis melakukan studi literatur untuk mengkaji ulang tentang grup faktor tersebut dan pembahasannya dengan homomorfisma

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Operasi Biner dan Grup

Definisi 2.1.1 [2]
Suatu operasi biner $*$ pada himpunan tidak kosong M merupakan suatu fungsi yang memetakan $M \times M \to M$, untuk setiap $(m,n) \in M \times M$, elemen $*((m,n)) \in M$ dinotasikan dengan $m * n$.

Definisi 2.1.2 [2]
Suatu himpunan tidak kosong M terhadap operasi biner $*$ merupakan grup, ditulis dengan $(M,*)$, jika untuk setiap $a, b, c \in M$ berlaku:
1. *Assosiatif, $(a * b) * c = a * (b * c)$.*
2. *Terdapat elemen identitas $e \in G$, sehingga $a * e = e * a = a$.*
3. *Terdapat $a^{-1} \in M$, sedemikian sehingga*
$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$
Elemen a^{-1} disebut invers dari a.

Teorema 2.1.3 [2]
Misalkan M adalah grup, maka
1. *$(a^{-1})^{-1} = a,\ \forall\, a \in M$ dan*

2. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1},\ \forall\, a, b \in M$

Teorema 2.1.4 [2]

Misalkan M adalah grup, maka terdapat dengan tunggal elemen $a^{-1} \in M$ untuk setiap $a \in M$ sedemikian sehingga

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

2.2. Homomorfisma

Definisi 2.2.1 [2]

Suatu fungsi h dari grup G ke grup G' merupakan homomorfisma jika untuk setiap $a, b \in G$, $h(ab) = h(a)h(b)$.

Berikut merupakan jenis-jenis khusus homomorfisma.

1. Suatu homomorfisma bersifat injektif maka disebut monomorfisma.
2. Suatu homomorfisma bersifat surjektif maka disebut epimorfisma.
3. Suatu homomorfimsa bersifat bijektif maka disebut isomorfisma.

Selanjutnya, h adalah homomorfisma dari grup G ke grup G' dinyatakan dengan $h: G \to G'$ adalah homomorfisma grup.

Teorema 2.2.2 [2]

Misalkan $h: G \to G'$ adalah homomorfisma grup, maka

1. $h(e) = e' \in G'$ *adalah elemen identitas dan*

2. $h(a^{-1}) = \left(h(a)\right)^{-1}, \forall\, a \in G.$

Definisi 2.2.3 [2]

Diberikan $h: G \to G'$ merupakan homomorfisma grup dan e' merupakan elemen identitas di G'. Kernel dari h merupakan subgrup dari G dinotasikan dengan $\ker h$ *dan didefinisikan sebagai*

$$\ker h = \{a \in G \mid h(a) = e'\}.$$

Definisi 2.2.4 [2]

Grup G dan grup G' dikatakan isomorfik jika ada suatu isomorfisma dari G ke G'. Grup G isomorfik dengan grup G', ditulis $G \cong G'$.

2.3. Subgrup *Fuzzy*

Definisi 2.3.1 [4]

Suatu subset fuzzy μ merupakan suatu fungsi dari himpunan tidak kosong Z ke $I = [0,1]$. Himpunan dari semua subset fuzzy dari Z disebut fuzzy power set dari Z dan dinotasikan dengan

$$\mathcal{FP}(Z) = \{\mu \mid \mu: Z \to I\}.$$

Definisi 2.3.2 [4]

Diberikan $h: V \to W$, $\mu \in \mathcal{FP}(V)$ dan $\nu \in \mathcal{FP}(W)$. Didefinisikan $h_\mu \in \mathcal{FP}(W)$ dan $h_\nu^{-1} \in \mathcal{FP}(V)$, $\forall\, b \in W$

$$h_\mu(b) = \begin{cases} \sup\{\mu(a) \mid a \in V, h(a) = b\} & jika\ h^{-1}(b) \neq \emptyset \\ 0 & untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

dan $\forall\, a \in V$, $h_\nu^{-1}(a) = \nu(h(a))$.

Definisi 2.3.3 [4]
Diberikan G adalah grup dan $\mu \in \mathcal{FP}(G)$, maka μ merupakan subgrup fuzzy jika memenuhi
1. $\mu(ab) \geq \min\{\mu(a), \mu(b)\}, \forall\, a, b \in G$ *dan*
2. $\mu(a^{-1}) \geq \mu(a), \forall a \in G$.

Koleksi dari semua subgrup *fuzzy* dari grup G dinotasikan dengan $\mathcal{F}(G)$.

Teorema 2.3.4 [1]
Misalkan $\nu \in \mathcal{F}(G)$, maka $\forall\, m \in G$
1. $\nu(e) \geq \nu(m)$ *dan*
2. $\nu(m^{-1}) = \nu(m)$.

Teorema 2.3.5 [1]
Misalkan ν adalah subset fuzzy dari grup G, maka $\nu \in \mathcal{F}(G)$ jika dan hanya jika $\nu(mn^{-1}) \geq \min\{\nu(m), \nu(n)\}$ untuk setiap $m, n \in G$.

Teorema 2.3.6 [3]
Misalkan $\mu \in \mathcal{F}(G)$ dan $\mu(ab^{-1}) = \mu(e)$ untuk setiap $a, b \in G$, maka $\mu(a) = \mu(b)$.

Teorema 2.3.7 [5]
Misalkan $\mu \in \mathcal{F}(G)$ dan $a \in G$, maka $\mu(ba) = \mu(b)$ untuk setiap $b \in G$ jika dan hanya jika $\mu(a) = \mu(e)$.

Definisi 2.3.8 [5]
Diberikan μ adalah subgrup fuzzy dari grup G, maka μ merupakan subgrup normal fuzzy dari G jika $\mu(mn) = \mu(nm)$ untuk setiap $m, n \in G$.
Himpunan yang beranggotakan semua subgrup normal *fuzzy* dari grup G dinotasikan sebagai $\mathcal{FN}(G)$.

Teorema 2.3.9 [5]
Misalkan μ adalah subgrup fuzzy dari grup G, maka μ adalah subgrup normal fuzzy dari G jika dan hanya jika $\mu(mnm^{-1}) = \mu(n)$ untuk setiap $m, n \in G$.

Definisi 2.3.10 [5]
Diberikan $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Untuk setiap $x \in G$ didefinisikan koset kanan fuzzy μ_x dari G, yaitu suatu pemetaan $\mu_x: G \to I$, dengan $\mu_x(y) = \mu(yx^{-1})$ untuk setiap $y \in G$. Pendefinsian koset kiri fuzzy ${}_x\mu$ analog dengan definisi μ_x, untuk setiap $x, y \in G$, ${}_x\mu(y) = (x^{-1}y)$.

3. METODE PENELITIAN

Prosedur pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan bahwa koset kiri *fuzzy* yang dibangun dari subgrup normal *fuzzy* merupakan koset kanannya atau sebaliknya membuktikan koset kanan yang dibangun dari subgrup normal *fuzzy* merupakan koset kirinya.
2. Membangun himpunan yang beranggotakan koset *fuzzy* dan mendefinisikan kembali operasi antar koset *fuzzy*.
3. Membuktikan operasi antar koset *fuzzy* merupakan operasi biner terhadap himpunan yang beranggotakan koset *fuzzy* dan juga membuktikan bahwa himpunan tersebut memenuhi definisi grup.
4. Membangun dan membuktikan teorema kesamaan koset *fuzzy*.
5. Membuktikan teorema-teorema pendukung pembahasan homomorfisma yang dikaitkan dengan grup faktor.
6. Membuktikan keisomorfikan antara grup faktor yang bersesuaian.

.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Kontruksi Grup Faktor dan Teorema Terkait

Berikut diberikan pembuktian bahwa koset kiri *fuzzy* yang dibangun dari subgrup normal *fuzzy* merupakan koset kanannya atau sebaliknya membuktikan koset kanan yang dibangun dari subgrup normal *fuzzy* merupakan koset kirinya.

Teorema 4.1.1
Misalkan $\mu \in \mathcal{F}(G)$, maka $\mu \in \mathcal{NF}(G)$ jika dan hanya jika ${}_x\mu = \mu_x$ untuk setiap $x \in G$.
Bukti:
($\Longrightarrow$) Misalkan μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari grup G. Diambil sembarang $x \in G$, maka menurut Definisi 2.3.10 koset kiri *fuzzy* berlaku ${}_x\mu(y) = \mu(x^{-1}y)$ untuk setiap $y \in G$, sehingga menurut Definisi 2.3.8, ${}_x\mu(y) = \mu(yx^{-1})$. Selanjutnya, menurut Definisi 2.3.10 koset kanan *fuzzy*, ${}_x\mu(y) = \mu_x(y)$. Akibatnya, diperoleh

$${}_x\mu = \mu_x.$$

($\Longleftarrow$) Misalkan ${}_x\mu = \mu_x$ untuk setiap $x \in G$. Diambil sembarang $y \in G$, karena G adalah grup, maka menurut Teorema 2.1.3(1) berlaku

$$\mu(xy) = \mu((x^{-1})^{-1}y),$$

sehingga menurut Definisi 2.3.10 dan yang diketahui,

$$\mu(xy) = {}_{x^{-1}}\mu(y) = \mu_{x^{-1}}(y) = \mu(y(x^{-1})^{-1}).$$

Akibatnya, menurut Teorema 2.1.3(1) diperoleh $\mu(xy) = \mu(yx)$. Jadi, menurut Definisi 2.3.8, μ merupakan subgrup normal *fuzzy*.■

Operasi antar koset fuzzy merupakan operasi biner terhadap himpunan yang beranggotakan koset fuzzy dan juga akan dibuktikan bahwa himpunan tersebut memenuhi definisi grup.

Teorema 4.1.2
Misalkan $\mu \in \mathcal{NF}(G)$, maka G/μ adalah grup terhadap operasi "$\circ$" yang didefinisikan dengan $\mu_x \circ \mu_y = \mu_{xy}$ untuk setiap $\mu_x, \mu_y \in G/\mu$.
Bukti:

Misalkan μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari grup G, akan ditunjukkan $G/_\mu$ adalah grup terhadap operasi "$\circ$", maka menurut Definisi 2.1.2 akan dintunjukkan "$\circ$" adalah operasi biner serta terhadap operasi tersebut berlaku assosiatif, terdapat elemen identitas, dan terdapat elemen invers untuk setiap elemen.

i. Akan ditunjukkan "$\circ$" merupakan operasi biner, maka menurut Definisi 2.1.1 akan ditunjukkan "$\circ$" merupakan fungsi $\circ: G/_\mu \times G/_\mu \to G/_\mu$. Diambil sembarang $(\mu_a, \mu_b), (\mu_x, \mu_y) \in G/_\mu \times G/_\mu$. Misalkan $(\mu_a, \mu_b) = (\mu_x, \mu_y)$, maka berlaku $\mu_x = \mu_a$ dan $\mu_y = \mu_b$, sehingga $\circ(\mu_x, \mu_y) = \mu_x \circ \mu_y = \mu_{xy} \in G/_\mu$ dan $\circ(\mu_a, \mu_b) = \mu_a \circ \mu_b = \mu_{ab} \in G/_\mu$. Akibatnya, menurut Definisi 2.3.10 untuk setiap $z \in G$ berlaku
$$\mu_{xy}(z) = \mu(z(xy)^{-1}),$$
menurut Teorema 2.1.3(2) karena G adalah grup, maka
$$\mu_{xy}(z) = \mu(zy^{-1}x^{-1}) = \mu_x(zy^{-1}) = \mu_a(zy^{-1}),$$
menurut Teorema 4.1.1 karena μ adalah subgrup normal *fuzzy*, maka
$$\begin{aligned}\mu_{xy}(z) &= {}_a\mu(zy^{-1})\\ &= \mu(a^{-1}zy^{-1})\\ &= \mu_y(a^{-1}z)\\ &= \mu_b(a^{-1}z)\\ &= {}_b\mu(a^{-1}z)\\ &= \mu(b^{-1}a^{-1}z)\\ &= \mu((ab)^{-1}z),\end{aligned}$$
menurut Definisi 2.3.8, maka
$$\mu_{xy}(z) = \mu(z(ab)^{-1}) = \mu_{ab}(z),$$
sehingga diperoleh
$$\mu_{xy} = \mu_{ab}$$
$$\mu_x \circ \mu_y = \mu_a \circ \mu_b$$
$$\circ(\mu_x, \mu_y) = \circ(\mu_a, \mu_b).$$
Jadi, berdasarkan uraian di atas, maka "$\circ$" adalah fungsi $\circ: G/_\mu \times G/_\mu \to G/_\mu$. Dengan demikian, "$\circ$" merupakan operasi biner.

ii. Untuk setiap $\mu_x, \mu_y, \mu_z \in G/_\mu$, maka
$$(\mu_x \circ \mu_y) \circ \mu_z = \mu_{xy} \circ \mu_z = \mu_{(xy)z}.$$
Menurut sifat assosiatif di grup G, maka $(xy)z = x(yz)$ sehingga berlaku
$$(\mu_x \circ \mu_y) \circ \mu_z = \mu_{x(yz)} = \mu_x \circ \mu_{yz} = \mu_x \circ (\mu_y \circ \mu_z).$$
Jadi, berlaku sifat assosiatif di $G/_\mu$.

iii. Diketahui G adalah grup, maka terdapat $e \in G$, sehingga $\mu_e \in G/_\mu$ sedemikian berlaku
$$\mu_x \circ \mu_e = \mu_{xe} = \mu_x \text{ dan } \mu_e \circ \mu_x = \mu_{ex} = \mu_x.$$
Jadi, μ_e adalah elemen identitas pada $G/_\mu$.

iv. Untuk setiap $\mu_x \in G/_\mu$, maka $x \in G$. Diketahui G adalah grup, maka terdapat $x^{-1} \in G$, sehingga $\mu_{x^{-1}} \in G/_\mu$ sedemikian berlaku
$$\mu_x \circ \mu_{x^{-1}} = \mu_{xx^{-1}} = \mu_e \text{ dan } \mu_{x^{-1}} \circ \mu_x = \mu_{x^{-1}x} = \mu_e.$$

Jadi, $\mu_{x^{-1}}$ adalah elemen invers terhadap μ_x.
Akibatnya, berdasarkan uraian di atas menurut Definisi 2.1.2, G/μ adalah grup terhadap operasi "$\circ$".■

Teorema 4.1.3
Misalkan G/μ adalah grup, maka $(\mu_x)^{-1} = \mu_{x^{-1}}$ untuk $\forall\ \mu_x \in G/\mu$.
Bukti:
Misalkan G/μ adalah grup, maka menurut Definisi 2.1.2 untuk setiap $\mu_x \in G/\mu$, terdapat $(\mu_x)^{-1} \in G/\mu$ sedemikian berlaku $\mu_x(\mu_x)^{-1} = (\mu_x)^{-1}\mu_x = \mu_e$. Pada langkah pembuktian Teorema 4.1.2 (IV) diperoleh $\mu_{x^{-1}}$ sebagai elemen invers untuk setiap $\mu_x \in G/\mu$, sehingga menurut Teorema 2.1.4 diperoleh $(\mu_x)^{-1} = \mu_{x^{-1}}$.■

Teorema 4.1.4
Misalkan G/μ adalah grup dan untuk setiap $x, y \in G$, maka $\mu_x = \mu_y$ jika dan hanya jika $\mu(xy^{-1}) = \mu(e)$.
Bukti:
($\Longrightarrow$) Misalkan untuk sembarang $x, y \in G$, berlaku $\mu_x = \mu_y$. Karena G/μ adalah grup, maka menurut Teorema 4.1.3 terdapat $\left(\mu_y\right)^{-1} = \mu_{y^{-1}} \in G/\mu$, sehingga dengan mengoperasikan $\mu_{y^{-1}}$ dari kanan ke persamaan $\mu_x = \mu_y$ diperoleh $\mu_{xy^{-1}} = \mu_e$. Akibatnya, untuk setiap $z \in G$ berlaku

$$\mu_{xy^{-1}}(z) = \mu_e(z),$$

menurut Definisi 2.3.10,

$$\mu(z(xy^{-1})^{-1}) = \mu(z),$$

menurut Teorema 2.3.7,

$$\mu((xy^{-1})^{-1}) = \mu(e),$$

dan menurut Teorema 2.3.4(2) diperoleh

$$\mu(xy^{-1}) = \mu(e).$$

($\Longleftarrow$) Misalkan $\mu(xy^{-1}) = \mu(e)$ untuk sembarang $x, y \in G$, maka menurut Teorema 2.3.4(2) karena μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari grup G berlaku

$$\mu((xy^{-1})^{-1}) = \mu(e),$$

sehingga menurut Teorema 2.3.7 untuk setiap $w \in G$,

$$\mu(w(xy^{-1})^{-1}) = \mu(w),$$

menurut Definisi 2.3.10,

$$\mu_{xy^{-1}}(w) = \mu_e(w),$$

karena berlaku untuk setiap $w \in G$, maka

$$\mu_{xy^{-1}} = \mu_e.$$

Akibatnya, dengan mengoperasikan μ_y dari kanan ke persamaan $\mu_{xy^{-1}} = \mu_e$ diperoleh $\mu_x = \mu_y$.■

4.2. Homomorfisma

Teorema 4.2.1

Misalkan $h: G \to G'$ *adalah epimorfisma grup dan* $\mu \in \mathcal{FN}(G)$, *maka* $h_\mu \in \mathcal{FN}(G')$.

Bukti :

Misalkan h adalah epimorfisma dari grup G ke grup G' dan μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari G, akan dibuktikan h_μ atau *image* μ terhadap h adalah subgrup normal *fuzzy* dari G'. Diambil sembarang $a, b \in G'$, karena h adalah epimorfisma maka $a = h(x)$ dan $b = h(y)$ untuk suatu $x, y \in G$, sehingga menurut Definisi 2.3.2,

$$\begin{aligned} h_\mu(ab^{-1}) &= \sup\{\mu(z) \mid z \in G, h(z) = ab^{-1}\} \\ &= \sup\left\{\mu(z) \mid z \in G, h(z) = h(x)\big(h(y)\big)^{-1}\right\}, \end{aligned}$$

menurut Teorema 2.2.2(2) karena h adalah epimorfisma berlaku

$$h_\mu(ab^{-1}) = \sup\{\mu(z) \mid z \in G, h(z) = h(x)h(y^{-1})\},$$

sehingga menurut Definisi 2.2.1,

$$h_\mu(ab^{-1}) = \sup\{\mu(z) \mid z \in G, h(z) = h(xy^{-1})\},$$

karena $h(z) = h(xy^{-1}) = ab^{-1}$, maka $\mu(z) \geq \mu(xy^{-1})$, sehingga

$$h_\mu(ab^{-1}) \geq \sup\{\mu(xy^{-1}) \mid x, y^{-1} \in G, h(x) = a, h(y^{-1}) = b^{-1}\}.$$

Menurut Definisi 2.3.3 karena μ adalah subgrup normal *fuzzy* berlaku

$$h_\mu(ab^{-1}) \geq \sup\{\min\{\mu(x), \mu(y^{-1})\} \mid x, y^{-1} \in G, h(x) = a, h(y^{-1}) = b^{-1}\},$$

sehingga menurut Teorema 2.3.4(2),

$$\begin{aligned} h_\mu(ab^{-1}) &\geq \sup\{\min\{\mu(x), \mu(y)\} \mid x, y \in G, h(x) = a, h(y) = b\}. \\ &= \min\{\sup\{\mu(x) | x \in G, h(x) = a\}, \sup\{\mu(y) | y \in G, h(y) = b\}\} \\ &= \min\{h_\mu(a), h_\mu(b)\}. \end{aligned}$$

Akibatnya, menurut Teorema 2.3.5, h_μ adalah subgrup *fuzzy* dari G'.

Selanjutnya, akan ditunjukkan h_μ adalah subgrup normal *fuzzy*. Menurut Definisi 2.3.2 berlaku

$$h_\mu(aba^{-1}) = \sup\{\mu(w) \mid w \in G, h(w) = aba^{-1}\},$$

karena μ adalah subgrup normal *fuzzy* dan h adalah epimorfisma, maka menurut Teorema 2.3.9 berlaku $\mu(w) = \mu(x^{-1}wx)$ dan menurut Definisi 2.2.1 berlaku $h(x^{-1}wx) = h(x^{-1})h(w)h(x) = a^{-1}(aba^{-1})a = b$, sehingga

$$h_\mu(aba^{-1}) = \sup\{\mu(x^{-1}wx) \mid w \in G, h(x^{-1}wx) = b\},$$

menurut Teorema 2.3.9, $\mu(x^{-1}wx) = \mu(w)$. Akibatnya, $h(x^{-1}wx) = h(w) = b$, sehingga

$$\begin{aligned} h_\mu(aba^{-1}) &= \sup\{\mu(w) \mid w \in G, h(w) = b\} \\ &= h_\mu(b). \end{aligned}$$

Jadi, menurut Teorema 2.3.9, h_μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari G'.■

Teorema 4.2.2

Misalkan $h: G \to G'$ *adalah homomorfisma grup dan* $\nu \in \mathcal{FN}(G')$, *maka* $h_\nu^{-1} \in \mathcal{FN}(G)$.

Bukti:

Misalkan h adalah homomorfisma dari grup G ke grup G' dan ν adalah subgrup normal *fuzzy* dari G', akan dibuktikan h_ν^{-1} atau invers *image* ν terhadap h adalah subgrup normal *fuzzy* dari G. Diambil sembarang $x, y \in G$, maka menurut Definisi 2.3.2

$$h_\nu^{-1}(xy^{-1}) = \nu\big(h(xy^{-1})\big).$$

Menurut Definisi 2.2.1 karena h adalah homomorfisma berlaku

$$h_\nu^{-1}(xy^{-1}) = \nu(h(x)h(y^{-1})),$$

menurut Teorema 2.2.2(2), maka

$$h_\nu^{-1}(xy^{-1}) = \nu\left(h(x)\big(h(y)\big)^{-1}\right).$$

Menurut Definisi 2.3.3 karena ν adalah subgrup normal *fuzzy*, maka

$$h_\nu^{-1}(xy^{-1}) \geq \min\left\{\nu\big(h(x)\big), \nu\left(\big(h(y)\big)^{-1}\right)\right\},$$

menurut Teorema 2.3.4(2),

$$\begin{aligned} h_\nu^{-1}(xy^{-1}) &\geq \min\{\nu\big(h(x)\big), \nu\big(h(y)\big)\} \\ &= \min\{h_\nu^{-1}(x), h_\nu^{-1}(x)\}. \end{aligned}$$

Akibatnya, menurut Teorema 2.3.5, h_ν^{-1} adalah subgrup *fuzzy* dari G.
Selanjutnya, menurut Definisi 2.3.2 berlaku

$$h_\nu^{-1}(xy) = \nu\big(h(xy)\big) = \nu\big(h(x)h(y)\big).$$

Menurut Definisi 2.3.8 karena ν subgrup normal *fuzzy*, maka

$$h_\nu^{-1}(xy) = \nu\big(h(y)h(x)\big) = \nu\big(h(yx)\big) = h_\nu^{-1}(yx).$$

Jadi, menurut Definisi 2.3.8, h_ν^{-1} adalah subgrup normal *fuzzy* dari G. ■

Teorema 4.2.3

Misalkan $f: G \to G'$ adalah homomorfisma grup, $\mu \in \mathcal{F}(G)$ dan $\nu \in \mathcal{F}(G')$.

a. *Jika f adalah epimorfisma, maka $f_{f_\nu^{-1}} = \nu$*
b. *Jika μ konstan pada $\ker f$, maka $f_{f_\mu}^{-1} = \mu$.*

Bukti:

Misalkan f adalah homomorfisma dari grup G ke grup G', μ adalah subgrup *fuzzy* dari G dan ν adalah subgrup *fuzzy* dari G'.

a. Jika f adalah epimorfisma, maka untuk setiap $y \in G'$ terdapat $x \in G$ sehingga $f(x) = y$, sehingga menurut Definisi 2.3.2 berlaku

$$\begin{aligned} f_{f_\nu^{-1}}(y) &= \sup\{f_\nu^{-1}(x) \mid x \in G, f(x) = y\} \\ &= \sup\{\nu\big(f(x)\big) \mid x \in G, f(x) = y\} \\ &= \sup\{\nu(y) \mid y \in G'\} \\ &= \nu(y). \end{aligned}$$

Akibatnya, karena berlaku untuk setiap $y \in G'$, maka $f_{f_\nu^{-1}} = \nu$.

b. Jika μ konstan pada $\ker f$. Menurut Definisi 2.3.2 untuk setiap $x \in G$ berlaku

$$\begin{aligned} f_{f_\mu}^{-1}(x) &= f_\mu\big(f(x)\big) \\ &= \sup\{\mu(y) \mid y \in G, f(y) = f(x)\}. \end{aligned}$$

Diketahui G' adalah grup, maka $\big(f(x)\big)^{-1} \in G'$, sehingga dengan mengoperasikan $\big(f(x)\big)^{-1}$ dari kanan ke persamaan $f(y) = f(x)$ mengakibatkan $yx^{-1} \in \ker f$. Diketahui μ konstan pada $\ker f$, maka $\mu(yx^{-1}) = \mu(e)$, sehingga menurut Teorema 2.3.6, $\mu(y) = \mu(x)$. Akibatnya,

$$f_{f_\mu}^{-1}(x) = \sup\{\mu(x) \mid x \in G\}$$

$$= \mu(x).$$

Jadi, karena berlaku untuk setiap $x \in G$, maka $f_{f_\mu}^{-1} = \mu$. ■

Teorema 4.2.4
Misalkan $f: G \to G'$ *adalah epimorfisma grup dan* $\mu \in \mathcal{FN}(G)$ *yang kontsan pada* $ker\, f$*, maka* $G/_\mu \cong G'/_{f_\mu}$.

Bukti:
Misalkan f adalah epimorfisma dari grup G ke grup G', μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari G dan μ konstan pada $\ker f$. Menurut Teorema 4.2.1, f_μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari G', sehingga menurut Teorema 4.1.2, $G/_\mu$ dan $G'/_{f_\mu}$ adalah grup faktor. Akan ditunjukkan terdapat isomorfisma dari $G/_\mu$ ke $G'/_{f_\mu}$. Misalkan dibuat pengaitan $\kappa: G/_\mu \to G'/_{f_\mu}$ dengan $\kappa(\mu_x) = (f_\mu)_{f(x)}$ untuk setiap $\mu_x \in G/_\mu$.

i. Akan ditunjukkan κ merupakan fungsi, yaitu dengan menunjukkan κ *well defined*. Diambil sembarang $\mu_x, \mu_y \in G/_\mu$. Menurut Teorema 4.2.3 karena μ konstan pada $\ker f$, maka $f_{f_\mu}^{-1} = \mu$. Misalkan $\mu_x = \mu_y$, maka menurut Teorema 4.1.4 berlaku
$$\mu(xy^{-1}) = \mu(e)$$
$$f_{f_\mu}^{-1}(xy^{-1}) = f_{f_\mu}^{-1}(e),$$
sehingga menurut Definisi 2.3.2,
$$f_\mu\big(f(xy^{-1})\big) = f_\mu\big(f(e)\big).$$
Menurut Definisi 2.2.1 karena f homomorfisma berlaku
$$f_\mu\big(f(x)f(y^{-1})\big) = f_\mu\big(f(e)\big),$$
menurut Teorema 2.2.2,
$$f_\mu\left(f(x)\big(f(y)\big)^{-1}\right) = f_\mu(e').$$
Akibatnya, menurut Teorema 4.1.4 diperoleh
$$(f_\mu)_{f(x)} = (f_\mu)_{f(y)}$$
$$\kappa(\mu_x) = \kappa(\mu_y).$$
Jadi, κ *well defined*.

ii. Akan ditunjukkan κ adalah homomorfisma. Menurut yang diketahui untuk sembarang $\mu_x, \mu_y \in G/_\mu$,
$$\kappa(\mu_x\mu_y) = \kappa(\mu_{xy}) = (f_\mu)_{f(xy)}.$$
menurut Definisi 2.2.1 karena f epimorfisma, maka $f(xy) = f(x)f(y)$ sehingga
$$\kappa(\mu_x\mu_y) = (f_\mu)_{f(x)f(y)} = (f_\mu)_{f(x)}(f_\mu)_{f(y)} = \kappa(\mu_x)\kappa(\mu_y).$$
Akibatnya, menurut Definisi 2.2.1, κ merupakan homomorfisma.

iii. Akan ditunjukkan κ bersifat bijektif, yaitu dengan menunjukkan κ bersifat injektif sekaligus surjektif. Misalkan $\kappa(\mu_x) = \kappa(\mu_y)$, maka

$$(f_\mu)_{f(x)} = (f_\mu)_{f(y)},$$

sehingga menurut Teorema 4.1.4 berlaku

$$f_\mu\left(f(x)\big(f(y)\big)^{-1}\right) = f_\mu(e').$$

Menurut Teorema 2.2.2 karena f adalah efimorfisma, maka

$$f_\mu\big(f(x)f(y^{-1})\big) = f_\mu\big(f(e)\big),$$

menurut Definisi 2.2.1,

$$f_\mu\big(f(xy^{-1})\big) = f_\mu\big(f(e)\big),$$

sehingga menurut Definisi 2.3.2

$$f_{f_\mu}^{-1}(xy^{-1}) = f_{f_\mu}^{-1}(e),$$

karena $f_{f_\mu}^{-1} = \mu$, maka

$$\mu(xy^{-1}) = \mu(e),$$

dan menurut Teorema 4.1.4,

$$\mu_x = \mu_y.$$

Akibatnya κ bersifat injektif.

Selanjutnya, karena f adalah epimorfisma, maka f bersifat surjektif sehingga untuk setiap $(f_\mu)_{x'} \in {G'}/{f_\mu}$ terdapat $x \in G$ dengan $f(x) = x'$ dan

$$\kappa(\mu_x) = (f_\mu)_{f(x)} = (f_\mu)_{x'}.$$

Akibatnya, κ bersifat surjektif.

Dengan demikian, karena κ bersifat injektif dan surjektif, maka κ bijektif. Jadi, berdasarkan uraian di atas, maka κ adalah isomorfisma dari ${G}/{\mu}$ ke ${G'}/{f_\mu}$, sehingga menurut Definisi 2.2.3.3, ${G}/{\mu} \cong {G'}/{f_\mu}$.■

Teorema 4.2.5

Misalkan $f: G \to G'$ adalah epimorfisma grup dan $\nu \in \mathcal{FN}(G')$, maka ${G}/{f_\nu^{-1}} \cong {G'}/{\nu}$.

Bukti:

Misalkan f adalah epimorfisma dari grup G ke grup G' dan ν adalah subgrup normal *fuzzy* dari G'. Menurut Teorema 4.2.2, f_ν^{-1} adalah subgrup normal *fuzzy* dari G, sehingga menurut Teorema 4.1.2, ${G}/{f_\nu^{-1}}$ dan ${G'}/{\nu}$ adalah grup.

Selanjutnya, karena f adalah epimorfisma, maka menurut Teorema 4.2.3, $\nu = f_{f_\nu^{-1}}$. Misalkan $x \in \ker f$, maka $f(x) = e' = f(e)$ dan

$$\nu\big(f(x)\big) = \nu\big(f(e)\big),$$

sehingga menurut Definisi 2.3.2,

$$f_\nu^{-1}(x) = f_\nu^{-1}(e).$$

Akibatnya f_ν^{-1} konstan pada $\ker f$. Jadi, karena f adalah epimorfisma dari grup G ke grup G', f_ν^{-1} adalah subgrup normal *fuzzy* dari G, dan f_ν^{-1} konstan pada $\ker f$, maka menurut Teorema 4.2.3.3,

$$G/_{f_\nu^{-1}} \cong G'/_{f_{f_\nu^{-1}}} = G'/_\nu . \blacksquare$$

5. KESIMPULAN

Grup faktor yang dibangun dari subgrup normal *fuzzy* adalah himpunan yang beranggotakan koset *fuzzy* atau $G/_\mu = \{\mu_x \mid x \in G\}$ dan memenuhi definisi grup, dengan μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari grup G, μ_x adalah koset *fuzzy* atau koset kanan *fuzzy*, dan operasi binernya adalah "∘" dengan $\mu_x \circ \mu_y = \mu_{xy}$ untuk setiap $\mu_x, \mu_y \in G/_\mu$. Selanjutnya, misalkan f adalah epimorfisma dari grup G ke grup G', μ adalah subgrup normal *fuzzy* dari G yang konstan pada $\ker f$ dan ν adalah subgrup normal *fuzzy* dari G', maka grup faktor $G/_\mu$ isomorfik dengan grup faktor $G'/_{f_\mu}$ dan f_ν^{-1} adalah subgrup normal *fuzzy* dari G yang konstan pada $\ker f$ sehingga grup faktor $G/_{f_\nu^{-1}}$ isomorfik dengan $G'/_\nu$.

REFERENSI

[1] Abdurrahman, S. 2018. Interior Subgrup Fuzzy. *Jurnal Fourier*. Vol 7(1), pp. 13-21.
[2] Fraleigh, J. B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra, 6th Edition*. Addison-Wesley Company Inc., United States.
[3] Liu, Y. L. 2004. Qoutient Groups Induced By Fuzzy Subgroups. *Quasigroups and Related Systems*. Vol.11:, pp. 71-78.
[4] Mordeson, J. N., Kiran R. Bhutani, dan A. Rosenfeld. 2010. *Fuzzy Group Theory*. SpringerBerlin Heidelberg, Germany.
[5] Mukherjee N. P. dan P. Bhattacharya, 1984. Fuzzy Normal Subgroups and Fuzzy Cosets. *Information Sciences*. Vol 34(3), pp. 225-239.
[6] Rosenfeld, A. 1971. Fuzzy Groups. *Journal Of Mathematical Analysis And Applications. **35***(3): 512-517.
[7] Zadeh, L. A. 1965. Fuzzy Sets. *Information And Control*.Vol, 8(3), pp.338-353.