Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.1 (Juni 2019) Hal. 13-23

BEBERAPA KOMBINASI RUNGE-KUTTA UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL WAKTU TUNDA

Rahma Qudsi[1], Agus Dahlia[2]

[1,2]*Pendidikan Matematika, Universitas Islam Riau, Indonesia*
Jl. Kaharuddin Nasution No. 113 Perhentian Marpoyan
email : rahma.qudsi@edu.uir.ac.id
email : agus.dahlia@edu.uir.ac.id

ABSTRACT

Delay Differential Equation (DDE) have been applied to many area. While, we rarely get the analytic solutions of DDE. Many researchers have found many methods to find it for instance Runge-Kutta Method. The purpose of this paper is to accumulate the combinations of Runge-Kutta method which is used to find the solutions of DDE.

Keywords : Delay Differential Equation, Interpolation, Runge-Kutta Method.

ABSTRAK

Persamaan diferensial waktu tunda adalah sebuah persamaan di dalam matematika yang telah digunakan diberbagai bidang. Beberapa peneliti telah menemukan metode untuk menemukan solusi persamaan tersebut salah satunya metode Runge-Kutta. Artikel ini merangkum beberapa kombinasi dari metode Runge-Kutta.

Kata kunci: *Persamaan Diferensial Waktu Tunda, Interpolasi, Metode Runge-Kutta,*

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial waktu tunda adalah persamaan diferensial yang memiliki variabel dengan waktu tunda. Waktu tunda adalah suatu keadaan atau kejadian yang terjadi berdasarkan informasi pada keadaan sebelumnya. Seperti penelitian model infeksi virus dengan waktu tunda akibat adanya tindakan pengobatan pada penderita yang dilakukan oleh [8]. Batzel & Tran [3] melakukan penelitian mengenai karakteristik stabilitas dari sistem kontrol umpan balik dari lima persamaan diferensial dengan waktu tunda untuk pemodelan sistem pernapasan manusia. Selanjutnya Balachandran B. [12] meneliti tentang osilasi nonlinier pada pertambangan yang model matematikanya non-linier, non-homogen, dan merupakan sistem *delay-differential* dengan koefisien *time-periodic*. Selain digunakan pada pertambangan sistem persamaan diferensial waktu tunda juga digunakan oleh Smith [16] untuk menghasilkan sebuah sistem semidinamik pada fungsi kontinu ruang pada interval tunda. Karena kegunaan dari persamaan diferensial waktu tunda ini maka menentukan solusi persamaan waktu tunda merupakan hal yang utama dalam bidang numerik.

Beberapa peneliti melakukan penelitian untuk menentukan solusi persamaan waktu tunda diantaranya Karacog & Bereketoglu [5] menggunakan metode transformasi diferensial untuk menentukan solusi DDE. Selanjutnya Alomari, dkk [1] menggunakan metode rata-rata homotopy. Beberapa penelitian lainnya yang membahas tentang solusi DDE dengan berbagai metode numerik seperti metode *spectral* [7], metode *multistep block* [18], dan metode *Predictor-Corrector* [17].

Selain itu, beberapa penelitian menggunakan metode Runge-Kutta untuk mendapatkan penyelesaian persamaan waktu tunda. Metode Runge-Kutta adalah salah satu metode yang sangat populer yang digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial biasa. Hal ini menyebabkan ketertarikan beberapa peneliti melakukan penelitian untuk melihat kesesuaian metode ini untuk persamaan diferensial waktu tunda. Pada artikel ini akan dibahas beberapa penelitian-penelitian yang menggunakan metode Runge-Kutta untuk menemukan solusi persamaan diferensial waktu tunda.

2. TINJAUAN PUSTAKA

a. *Delay Differential Equation* (DDE)

Bentuk umum dari *Delay Differential Equation* (DDE) ([16] hal. 126) adalah

$$(dx_i)/dt = X_i(x_i(t+\vartheta, \ldots, x_n(t+\vartheta), t)\ (i=1,\ldots,n) \quad (1)$$

dimana $X_i(x_i(t+\vartheta, \ldots, x_n(t+\vartheta), t)$ adalah fungsi yang didefenisikan untuk fungsi potongan yang kontinu $x_i(\vartheta)$ dengan $-h \le \vartheta \le 0$ dan h adalah sebuah konstanta positif $h \geq 0$.

b. Metode Runge-Kutta Orde Lima

Metode Runge-Kutta orde Lima ([13] hal. 735) adalah

$$y_{(i+1)} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_2 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)\, h \quad (2)$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + 1/4h, y_i + 1/4k_1h)$$
$$k_3 = f(x_i + 1/4h, y_i + 1/8k_1h + 1/8k_2h)$$
$$k_4 = f(x_i + 1/2h, y_i - 1/2k_2h + k_3h)$$
$$k_5 = f(x_i + 3/4h, y_i + 3/16k_1h + 9/16k_4h)$$
$$k_6 = f(x_i + h, y_i - 3/7k_1h + 2/7k_2h + 12/7k_3h - 12/7k_4h + 8/7k_5h)$$

Metode Runge-Kutta (RK4) untuk persamaan differensial waktu tunda adalah

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \qquad (3)$$

dengan

$$k_1 = f\left(t_n, y_n, y\left(t_n - \boldsymbol{\tau}\right)\right)$$
$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1, y\left(t_n + \frac{h}{2} - \boldsymbol{\tau}\right)\right)$$
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2, y\left(t_n + \frac{h}{2} - \boldsymbol{\tau}\right)\right)$$
$$k_4 = f\left(t_n + h, y_n + hk_3, y\left(t_n + h - \boldsymbol{\tau}\right)\right)$$

c. Metode Nakashima’s 2 Stages 4th Order Pseudo-Runge-Kutta

Metode Nakashima’s 2 Stages 4th Order Pseudo-Runge-Kutta [9] adalah

$$y_{n+1} = y_n + h\left(-\frac{7}{714}k_0 + \frac{221}{714}k_1 + \frac{500}{714}k_2\right)$$
$$k_0 = f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)$$
$$k_1 = f\left(x_n, y_n\right)$$
$$k_2 = f\left(x_n + 0.7h, -1.156y_n + 2.156y_{n-1} + 0.833hk_0 + 2.023hk_1\right) \qquad (4)$$

Jika metode Nakashima’s 2 Stages 4th Order Pseudo-Runge-Kutta diaplikasikan untuk persamaan differensial waktu tunda maka persamaan (4) menjadi

$$y_{n+1} = y_n + h\left(-\frac{7}{714}k_0 + \frac{221}{714}k_1 + \frac{500}{714}k_2\right)$$
$$k_0 = f\left(t_{n-1}, y_{n-1}, y\left(t_{n-1} - \boldsymbol{\tau}\right)\right)$$
$$k_1 = f\left(t_n, y_n, y\left(t_n - \boldsymbol{\tau}\right)\right)$$
$$k_2 = f\left(t_n + 0.7h, -1.156y_n + 2.156y_{n-1} + 0.833hk_0 + 2.023hk_1, y\left(t_n + 0.7h - \boldsymbol{\tau}\right)\right) \quad (5)$$

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini merupakan studi literatur dengan terlebih dahulu mengkaji tentang persamaan diferensial waktu tunda dan metode-metode untuk menentukan solusi dari persamaan tersebut. Kemudian membahas berbagai kombinasi penyelesaian dari penggunaan metode Runge-Kutta untuk menyelesaikan persamaan ini.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode-metode langkah dan modifikasi metode untuk ODE dapat digunakan untuk menyelesaikannya DDE, salah satunya adalah metode Runge-Kutta yang sangat populer. Dalam tulisan ini hanya beberapa modifikasi Runge-Kutta yang akan dibahas. Runge-Kutta eksplisit merupakan salah satu cara efektif untuk menyelesaikan DDE. Akan tetapi, terdapat beberapa kesulitan untuk menggunakan secara langsung Runge-Kutta untuk DDE, kesulitan pertama adalah bahwa dalam mengambil langkah, fungsi f harus dievaluasi pada waktu tunda $(t_n + \alpha_j h_n) - \tau_m$, yang merupakan *delayed argument* dari DDE, yang membutuhkan nilai solusi sebelum t_n[15]. Untuk menyelesaikan ini, beberapa metode dilakukan untuk mengaproksimasi waktu tunda dalam DDE, berikut akan dijabarkan beberapa metode tersebut.

Saat ini, kode berdasarkan rumus Runge-Kutta menggunakan ekstensi terus-menerus dari rumus dasar yang melengkapi evaluasi fungsi yang dibentuk dalam mengambil langkah untuk mendapatkan perkiraan yang akurat di seluruh$[t_n, t_{n+1}]$.

a. Metode Rung-Kutta dengan metode two step linier

Dalam metode ini, Bartoszewski dan Jackiewicz [2] menggunakan metode Runge-Kutta dua langkah, dimana didefinisikan sebagai berikut :

$$K_{n+1}^{r} = f\left(t_i + c_j h, u_j y_h(t_{i-1}) + (1-u_j) y_h(t_i) + h\sum_{s=1}^{v}\left(a_{js}K_i^s + b_{js}K_{i+1}^s\right), y_h(t_i + c_j h - \tau)\right),$$

$$y_h(t_i + \xi h) = \eta(\xi) y_h(t_{i-1}) + \left(1 - \eta(\xi) y_h(t_i) + h\sum_{s=1}^{v}\left(v_s(\xi)K_i^s + w_s(\xi)K_{i+1}^s\right)\right) \tag{6}$$

$i = 0, 1, \dots, n-1$, $\xi \in (0,1]$, $nh = T - t_0$, $t_i = t_0 - ih$.

dengan mengasumsikan bahwa $h = \frac{\tau}{m}$ untuk m bilangan bulat positif, maka *delayed arguments* dapat diaproksimasi dengan

$$y_h(t_{i-m} + c_j h) = \eta(c_j) y_h(t_{i-m-1}) + \left(1 - \eta(c_j) y_h(t_{i-m}) + h\sum_{s=1}^{v}\left(v_s(c_j)K_{i-m}^s + w_s(c_j)K_{i-m+1}^s\right)\right),$$

disubtitusi ke persamaan (6) dengan $\xi = 1$, diperoleh

$$K_{n+1}^{r} = f\left(t_i + c_j h, u_j y_{i-1}(t_{i-m-1}) + (1-u_j) y_i(t_i) + h\sum_{s=1}^{v}\left(a_{js}K_i^s + b_{js}K_{i+1}^s\right), y_h(t_i + c_j h - \tau)\right) \tag{7}$$

Metode multistep linier sangat menarik dan sangat terkenal karena memiliki interpolant alami yang memberikan solusi perkiraan akurat antara *mesh point*.

b. Metode Runge-Kutta dengan Interpolasi Hermite

Interpolasi Hermite dapat digunakan juga untuk mengaproksimasi *delay argument*. Namun, meskipun secara formal benar karena ukuran langkahnya menjadi nol, pendekatan tersebut tidak bekerja dengan baik dengan metode Runge-Kutta. Hal ini dikarenakan metode ini menghabiskan banyak biaya untuk membentuk perkiraan yang akurat pada akhir langkah dan sebagai akibat wajar, ukuran langkah efisien sering terlalu besar untuk hasil yang akurat dari interpolasi langsung dan turunan pertama pada beberapa langkah sebelumnya. Ketika metode Runge-Kutta dikombinasikan dengan Interpolasi Hermite [6] untuk menyelesaikan persamaan differensial waktu tunda maka persamaannya menjadi

$$k_{n+1}^{(i)} = f\left(t_n + c_i h,\ y_n + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_{n+1}^{(j)} + \sum H(c_i)\, y_{n-m+l} + \bar{H}(c_i)\, h y'_{n-m+l}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{q} b_i k_{n+1}$$

dimana H dan $\underline{H}$ adalah koefisien dari interpolasi Hermite.

c. Nakashima's 2 Stages 4th Order Pseudo-Runge-Kutta Method

Metode yang dikembangkan oleh Sabri [11] adalah metode yang menggabungkan metode Nakashima's 2 stages 4th order Pseudo-Runge-Kutta method (PRK) dengan interpolasi Hermite. Interpolasi digunakan untuk mentaksir *delay argument* pada persamaan (5) sehingga diperoleh

$$y_{n+1} = y_n + h\left(-\frac{7}{714}k_0 + \frac{221}{714}k_1 + \frac{500}{714}k_2\right)$$

dengan

$$\begin{aligned} k_0 &= f\left(t_{n-1}, y_{n-1}, y(t_{n-1}-\tau)\right) \\ &= f[z_0] + f[z_0, z_1](t_{n-1}-\tau-z_0) + f[z_0, z_1, z_2](t_{n-1}-\tau-z_0)(t_{n-1}-\tau-z_1) \\ &\quad + f[z_0, z_1, z_2, z_3](t_{n-1}-\tau-z_0)(t_{n-1}-\tau-z_1)(t_{n-1}-\tau-z_2) + \cdots + \\ &\quad + f[z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n](t_{n-1}-\tau-z_0)(t_{n-1}-\tau-z_1)(t_{n-1}-\tau-z_2)\ldots(t_{n-1}-\tau-z_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_n, y_n, y(t_n-\tau)\right) \\ &= f[z_0] + f[z_0, z_1](t_n-\tau-z_0) + f[z_0, z_1, z_2](t_n-\tau-z_0)(t_n-\tau-z_1) \\ &\quad + f[z_0, z_1, z_2, z_3](t_n-\tau-z_0)(t_n-\tau-z_1)(t_n-\tau-z_2) + \cdots + \\ &\quad + f[z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n](t_n-\tau-z_0)(t_n-\tau-z_1)(t_n-\tau-z_2)\ldots(t_n-\tau-z_{n-1}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_n + 0.7h, -1.156y_{n-1} + 2.156y_n + 0.833hk_0 + 2.023hk_1, y\left(t_n + 0.7h - \tau\right)\right) \\
&= f[z_0] + f[z_0, z_1]\left(t_n + 0.7h - \tau - z_0\right) + f[z_0, z_1, z_2]\left(t_n + 0.7h - \tau - z_0\right)\left(t_n + 0.7h - \tau - z_1\right) \\
&\quad + f[z_0, z_1, z_2, z_3]\left(t_n + 0.7h - \tau - z_0\right)\left(t_n + 0.7h - \tau - z_1\right)\left(t_n + 0.7h - \tau - z_2\right) + \cdots + \\
&\quad + f[z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n]\left(t_n + 0.7h - \tau - z_0\right)\left(t_n + 0.7h - \tau - z_1\right)\left(t_n + 0.7h - \tau - z_2\right)\ldots\left(t_n + 0.7h - \tau - z_{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

Pada metode ini untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial waktu tunda hanya memerlukan perhitungan sampai dengan k_2 sedangkan jika menggunakan RK4 memerlukan perhitungan sampai dengan k_4. Hal ini menunjukkan bahwa metode PRK dapat menjadi salah satu alternatif untuk menyelesaikan persamaan diferensial waktu tunda dengan jumlah perhitungan yang lebih sedikit dan keakuratan yang hampir sebanding dengan RK4.

d. Mono-Implicit Runge-Kutta Method for Delay Differential Equations

Doha dkk [4] mengganti *delay argument* $y(t-\tau)$ dengan aproksimasi kontinu, dimana DDE diubah menjadi bentuk ODE secara lokal di setiap subintervalnya sehingga dapat diselesaikan. Mereka mengadopsi *Mono-Implicit Runge-Kutta* (MIRK) dengan $s - step$ untuk DDE. $s - step$ MIRK untuk solusi DDE untuk setiap *mesh* $\Delta = \{t_0 < t_1 <\ldots< t_n\}, m \in N$ didefinisikan dengan

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{r=1}^{s} b_r K_{n+1}^{j}, \tag{8}$$

dengan

$$
\begin{aligned}
K_{n+1}^{r} = f(t_n + c_r h, (1 - v_r)y_n + v_r y_{n+1}) \\
+ h_n \sum_{j=1}^{r-1} x_{rj} K_{n=1}^{j}, y(t_n + c_r h_n - \tau)
\end{aligned} \tag{9}
$$

Untuk mendapatkan aproksimasi *delay argument* $y(t-\tau)$, solusi suatu pendekatan kontinu antara *mesh points* haruslah tersedia. Hal ini dapat diperoleh dengan menggunakan *Continuous Mono-Implisit Runge-Kutta* (CMIRK). Dengan menggunakan CMIRK, diperoleh *delay argument* yang didefinisikan

$$u(t_n + \theta h_n) = y_n + h_n \sum_{r=1}^{s^*} b_r(\theta) K_{n+1}^r \tag{10}$$

dengan

$$K_{n+1}^r = \lambda \left\{ (1 - v_r) y_n + v_r y_{n+1} + h_n \sum_{j=1}^{r-1} x_{rj} K_{n+1}^j \right\} + \mu \left\{ y_{n-m} + h_{n-m} \sum_{i=j}^{s} b_i(c_r) K_{n-m+1}^s \right\} \tag{11}$$

Metode ini menggabungkan keakuratan metode implisit dan implementasi yang efisien. Hasil numerik menunjukkan bahwa, dalam kasus metode eksplisit masalah linear jauh lebih efisien karena biaya komputasinya lebih rendah dan mereka memberikan hasil yang baik. Untuk masalah nonlinear, metode eksplisit masih berfungsi tetapi masih perlu menggunakan toleransi yang lebih tinggi untuk mendapatkan hasil yang memuaskan. Metode implisit lebih baik di bawah toleransi yang sama. Dalam kasus *stiff problem*, metode eksplisit menjadi tidak efisien secara komputasi dengan akurasi rendah dan bahkan mungkin tidak dapat bekerja.

e. Metode Aproksimasi Garis (*MOL Approximation*) [10]

Rattenburry mengenalkan Almost Runge-Kutta (ARK) Orde 5 untuk menyelesaikan masalah DDE. Nilai dari parameter bebas yang digunakannya adalah $c = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1,1\right]^T, L = \frac{1}{5}, K = \frac{1}{120}, \Phi = 4$ dan $a_{43} = \frac{8}{7}$. Sehingga matriksnya dapat didefinisikan sebagai berikut

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{32} \\
\frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{40} \\
\frac{27}{160} & \frac{75}{128} & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{640} & -\frac{69}{1280} \\
\frac{69}{35} & -\frac{51}{28} & \frac{8}{7} & 0 & 0 & 1 & -\frac{41}{140} & \frac{17}{280} \\
\frac{16}{45} & \frac{2}{15} & \frac{16}{45} & \frac{7}{90} & 0 & 1 & \frac{7}{90} & 0 \\
\hline
\frac{16}{45} & \frac{2}{15} & \frac{16}{45} & \frac{7}{90} & 0 & 1 & \frac{7}{90} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1352}{225} & \frac{34}{15} & -\frac{256}{75} & -\frac{196}{225} & \frac{24}{5} & 0 & \frac{242}{75} & 0
\end{array}\right], \tag{12}$$

dengan matriks stabilitasnya

$$M =$$

$$\begin{bmatrix}
1+\frac{83}{90}z+\frac{19}{45}z^2+\frac{3}{32}z^3+\frac{1}{48}z^4 & \frac{7}{90}+\frac{7}{90}z+\frac{7}{96}z^2+\frac{1}{64}z^3+\frac{1}{192}z^4 & \frac{1}{192}z^2+\frac{1}{384}z^3+\frac{1}{1536}z^4 \\
z+\frac{83}{90}z^2+\frac{19}{45}z^3+\frac{3}{32}z^4+\frac{1}{48}z^5 & \frac{7}{90}z+\frac{7}{90}z^2+\frac{7}{96}z^3+\frac{1}{64}z^4+\frac{1}{192}z^5 & \frac{1}{192}z^3+\frac{1}{384}z^4+\frac{1}{1536}z^5 \\
-\frac{242}{75}z+\frac{367}{225}z^2+\frac{111}{100}z^3+\frac{13}{60}z^4+\frac{1}{10}z^5 & \frac{242}{75}-\frac{142}{225}z-\frac{1}{100}z^2+\frac{5}{24}z^3+\frac{1}{60}z^4+\frac{1}{40}z^5 & \frac{1}{192}z^4+\frac{1}{320}z^5
\end{bmatrix}.$$

Salah satu keuntungan utama dari metode ARK adalah kemampuan untuk melakukan interpolasi tanpa diperlukan evaluasi fungsi tambahan. Rangkaian percobaan ini memungkinkan untuk menguji tidak hanya metode itu sendiri, tetapi juga interpolator. Metode ini telah diujikan pada suatu DDE menggunakan *variable stepsize*, dengan $TOL = 10^{-i}, i = 3, \dots, 13$.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ingin memberikan ucapan terima kasih atas dukungan dari Kementrian Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi (KEMENRISTEK DIKTI) Republik Indonesia, LLDIKTI Wilayah X dan Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) Universitas Islam Riau.

REFERENSI

[1]. Alomari, A. K., Noorani, M.R.N. dan Nazar, R. 2009. Solution of Delay Differential Equation by Means. *Acta Appl Math*. Vol. 108. pp 395–412.

[2]. Bartoszewski, Z. and Jackiewicz, Z.2002.Stability Analysis of Two-Step Runge-Kutta Methods for Delay Differential Equations.*Computers and Mathematics with Applications* No.44.pp 83-93

[3]. Batzel, J.J dan Tran, H.T. 2000. Stability of The Human Respiratory Control System Part I : Analysis of a Two-Dimensional Delay State-Space Model. *J. Mathemat. Bil*. Vol. 41, pp 45-79.

[4]. Doha, H. Eid, Rihan, A. Fathalla, Hassan, I. Mohamed I, and Kamel, M. Noha. 2009. Mono-Implicit Runge-Kutta Method for Delay Di®erential Equations. *J. Egypt Math. Soc*. Vol. 17(2).pp 213-232.

[5]. F. Karakoç & H. Bereketoğlu. 2009. Solutions of delay differential equations by using differential transform method. *International Journal of Computer Mathematics*, Vol. 86(5). pp. 914-923, DOI: 10.1080/00207160701750575

[6]. Faudziah Ismail and Raed Ali Al-Khasawneh. 2002. Numerical Treatment of Delay Differential Equations by Runge-Kutta Method Using Hermite Interpolation. *Matematika*. Vol. 18. pp. 79-90.

[7]. Ishtiaq Ali, Brunner, Hermann dan Tang, Tao. 2009. A Spectral Method for Pantograph-Type Delay Differential Equations and its Convergen Anlysis. *Journal Computational of Mathematics*. Vol. 27. pp. 254-265.

[8]. Lidia Veronica, T dan Lasker P. Sinaga. 2018. Prilaku Solusi Sistem Persamaan Diferensial Waktu Tunda Dinamika Virus HIV Dalam Sel Tubuh. *Jurnal Sains Indonesia*. Vol. 42(1), pp 12-16.

[9]. Nakashima, Masaharu. 1982. On Pseudo-Runge- Kutta Methods with 2 and 3 Stages. *RIMS Publications*. Vol.18 (3). pp. 895-909.

[10]. Rattenbury, Nicolette. 2004. *Almost Runge-Kutta Methods for Stiff and Non-Stiff Problems* (Thesis). Doctor of Philosophy, The University of Auckland.*https://pdfs.semanticscholar.org/022f/e53156cd5db1403a2e77e34f1efc711fb09a.pdf* (diunduh : 14 September 2019, 7:50 PM)

[11]. Sabri, Nur Ain Ayunni. 2014. Solving Delay Differential Equations (DDEs) using Nakashima's 2 Stages 4th Order Pseudo-Runge-Kutta Method. *World Applied Sciences Journal*. Vol. 21. pp. 181-186.

[12]. Balachandran, Balakumar, Kalmar, Tamas dan Gilsinn, Nagy David E. 2009. *Delay Differential Equations*. Springer, New York.

[13]. Chapra, Steven C. and Canale, Raymond P. 2010. *Numerical Methods for Engineers* . McGraw-Hill Companies. New York.

[14]. Krasovskii, N. N. 1963. *Stability of Motion* . Stanford University Press. Stanford.

[15]. Shampine, Larry F. and Thompson, Sylvester. 2009. *Delay Differential Equations*. Springer Science+Business Media. New York.

[16]. Smith, Hal. 2010. *An Introduction to Delay Differential Equation with Application to The Life Sciences.* Springer Science + Business Media. New York.

[17]. Hoo, Yann Seong dan Majid, Zanariah Abdul. 2015. Solving delay differential equations of pantograph type using predictor-corrector method. *s.l. : AIP Conference Proceedings 1660, 050059*. American Institute of Physics. 1-4.

[18]. Seong, Hoo Yan dan Majid, Zanariah Abdul. 2015. Solving neutral delay differential equations of pantograph type by using multistep block method. *7th International Conference On Research And Educations In Mathematics (ICREM7)*. Malaysia, 57-60.