Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.1 (Juni 2019) Hal. 36-45

ACTUARIAL PRESENT VALUE (APV) ANUITAS KONTINU DENGAN STATUS *MULTIPLE LIFE*

[1]Aprida Siska Lestia
[1]*Program Studi Statistika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat*
email : as_lestia@ulm.ac.id

ABSTRAK

Rangkaian pembayaran yang dikaitkan dengan hidup matinya seseorang di mana pembayaran akan terhenti seketika setelah terjadinya kematian dikenal dengan istilah anuitas hidup kontinu. Istilah kontinu di sini didasari kenyataan bahwa usia manusia merupakan elemen bilangan real, dimana kematian sebagai risiko utama dapat terjadi kapan saja, sehingga pemodelan matematis akan dilakukan dengan pendekatan stokastik. Jenis anuitas yang seperti ini dalam Asuransi Jiwa digunakan dalam perhitungan premi yang dibebankan kepada pemegang polis (tertanggung). Jika anuitas tersebut dibebankan kepada lebih dari satu orang, maka dikatakan bahwa anuitas hidup dilakukan dengan status *multiple life*. Dalam prakteknya, terdapat dua kemungkinan penghentian rangkaian pembayaran pada status *multiple life*, yang dikenal dengan *joint life* dan *last survivor*. Penentuan *actuarial present value* (*APV*) anuitas (seumur hidup dan berjangka n-tahun) dilakukan menggunakan peluang *multiple life* yang dibangun dengan menggunakan distribusi sisa usia bagi sekelompok orang. Dari penelitian ini diperoleh formula penentuan APV yang merupakan nilai ekspektasi dari variabel acak nilai tunai anuitas.

Kata kunci : *joint life, last survivor, actuarial present value*

1. PENDAHULUAN

Dalam praktek Asuransi, seringkali ditemui produk-produk yang menanggung lebih dari satu tertanggung. Keadaan seperti ini dikenal dengan istilah kehidupan ganda atau *multiple life status*. Keterangan yang sangat penting digunakan dalam menganalisis model asuransi dengan status ini adalah mengenai status tertanggung, yaitu cara yang mendefinisikan kapan seorang tertanggung dikatakan *survive* (bertahan) dan kapan dikatakan *failure* (gagal). Hal ini dikarenakan status kegagalan tersebut yang akan menentukan kapan klaim akan terjadi dan atau sampai kapan premi harus dibayar.

Terdapat dua istilah berdasarkan status kematian dari kumpulan tertanggung pada *multiple life* yaitu *joint life* dan *last survivor*. Menurut David (2011)**,** status *Joint life* menyatakan bahwa status hidup gabungan dikatakan gagal ketika terjadi kematian pertama dari kumpulan tersebut. Sebaliknya, pada status *last survivor*, status hidup gabungan baru dikatakan gagal ketika semua individu di dalam kumpulan tersebut meninggal. Penentuan waktu kegagalan yang berbeda pada kedua status ini, menyebabkan perbedaan dalam membangun peluangnya.

Pembayaran premi dalam Asuransi Jiwa merupakan sebuah rangkaian pembayaran atau anuitas yang dibebankan kepada pemegang polis selama masih hidup. Menurut Dickson (2009), anuitas *joint life* merupakan rangkaian pembayaran yang dilakukan sampai dengan terjadinya kematian pertama, sedangkan anuitas *last survivor* merupakan rangkaian pembayaran yang dibebankan sampai orang terakhir di dalam kumpulan tersebut meninggal. Tentunya bergantung pula pada jenis asuransinya, apakah seumur hidup, berjangka, endowmen, dan tertunda. Formulasi *Actuarial present value* (APV) dari anuitas dengan status *multiple life* nantinya akan sangat bermanfaat dalam penentuan perhitungan-perhitungan aktuaria lainnya seperti premi tahunan dan cadangan premi. Sebenarnya, formula akhir APV untuk anuitas dengan status *multiple life* sudah banyak dituliskan dalam berbagai referensi, akan tetapi penjabaran penentuan formula tersebut secara terperinci masih belum disajikan. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dibahas mekanisme membangun model penentuan APV dengan status *muliple life* sampai dengan bentuk yang paling sederhana, dengan hanya dibatasi untuk jenis anuitas seumur hidup dan berjangka.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Kematian sebagai risiko utama dalam asuransi jiwa dapat terjadi kapan saja. Oleh karena itulah, waktu hingga terjadinya kematian (*time until death*) atau dikenal dengan istilah waktu kegagalan (*failure time*) bagi seseorang berusia x dapat dinyatakan sebagai sebuah variabel acak kontinu $T(x)$.

*2.1 Distribusi Sisa Usia (*Time until Death*)*

Variabel acak X menyatakan usia meninggal bagi seorang bayi yang baru lahir, sedangkan notasi x digunakan untuk menyatakan usia seseorang yang menjadi objek pengamatan. Jika waktu sampai terjadinya kematian terhadap (x) (dibaca: seseorang berusia x) dinyatakan sebagai sebuah variabel acak kontinu $T(x)$, maka penentuan distribusi bagi $T(x)$ dapat dilakukan dengan menggunankan model *survival*, dimana sesuai namanya peluang (x) bertahan (*survive*) dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi survival. Dalam [4]**,** fungsi ditribusi dari $T(x)$ dinyatakan sebagai

$$F_{T(x)}(t) = \Pr(T(x) \leq t) \quad , t \geq 0 \tag{1}$$

Fungsi di atas dalam bidang aktuaria dinyatakan dalam notasi khusus ${}_tq_x$ atau dalam [2] diinterpretasikan sebagai peluang (x) meninggal dalam t tahun.

Sebaliknya peluang bertahan hidup bagi (x) hingga usia $x+t$ dalam [**2]** dinyatakan sebagai

$${}_tp_x = \Pr(T(x) > t) = 1 - {}_tq_x \quad , t \geq 0 \tag{2}$$

2.2 Laju Kematian (Force of Mortality)

Untuk setiap usia x, laju tingkat kematian atau *force of mortality* bagi (x) dalam t −tahun dalam [7] dinyatakan dalam fungsi survival, yaitu

$$\begin{aligned} \mu(x+t) &= \frac{f_X(x+t)}{1-F_X(x+t)} \\ &= -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} \end{aligned} \tag{3}$$

Dengan $\mu(x+t)$ adalah peluang sisa usia hidup (x) dalam t sampai $t+\Delta t$ dengan syarat (x) telah sampai di usia $x+t$. Dari sini, fungsi kepadatan peluang bagi variabel acak sisa usia dalam [2] dinyatakan sebagai

$$f_{T(x)}(x) = \frac{dF_{T(x)}(x)}{dx} = {}_t p_x \mu(x+t) \tag{4}$$

*2.3 Anuitas Jiwa (*single life*)*

Menurut [4] rangkaian pembayaran yang bergantung kepada status hidup seseorang disebut sebagai anuitas jiwa (*life annuity*). Anuitas jiwa dilakukan secara kontinu atau pada interval yang sama selagi seseorang masih hidup, sehingga suatu anuitas hidup dapat dinyatakan sebagai sebuah anuitas tentu dengan jangka waktu pembayaran yang bergantung kepada sisa usia (x) atau $T(x)$. Nilai tunai dari rangkaian pembayaran pada anuitas kontinu dapat dinyatakan sebagai suatu variabel acak Y.

$$Y = \bar{a}_{\overline{T|}}, \quad T(x) \geq 0$$

Menurut [2], *actuarial present value* (APV) yaitu perhitungan nilai tunai dari anuitas kontinu dengan memasukkan peluang (selain tingkat bunga), merupakan nilai ekspektasi dari variabel acak Y atau $E(Y)$. Jadi APV merupakan rata-rata nilai tunai anuitas tersebut, yaitu

$$\bar{a}_x = E[Y] = E\left[\bar{a}_{\overline{T|}}\right] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}} f(t)dt$$

Berdasarkan formula penentuan nilai tunai anuitas tentu dari **[6]** dan pdf pada persamaan (4), diperoleh

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= \int_0^\infty \frac{1-v^t}{\delta} \; {}_t p_x \mu(x+t)dt \\ &= \int_0^\infty v^t \; {}_t p_x dt \end{aligned} \tag{5}$$

Jika rangkaian pembayaran hanya dilakukan selama (x) masih hidup dalam n tahun berikutnya, maka nilai tunai dari rangkaian pembayaran tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T|}} & , T(x) \leq n \\ \bar{a}_{\overline{n|}} & , T(x) > n \end{cases}$$

dan APV dari anuitas berjangka n-tahun ini dalam **[2]** dinyatakan sebagai

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t|}} \; {}_t p_x \mu(x+t)dt + \bar{a}_{\overline{n|}} \; {}_n p_x \tag{6}$$

2.4 Distribusi Peluang **Multiple life**

Misalkan (x_i), untuk $i = 1,2,\dots,k$ adalah sekelompok orang dengan variabel acak $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_k)$ menyatakan sisa usia dari $k-$orang tertanggung ini. Selanjutnya akan diturunkan berbagai fungsi peluang dengan status *joint life* dan *last survivor*.

1. *Joint life*

Peluang hidup tertanggung dalam status *joint life* diawali dengan mendefinisikan variabel acak yang menyatakan sisa usia tersingkat dari sekumpulan tertanggung yang dalam **[5]** dinyatakan sebagai

$$T(x_1, x_2, \dots, x_m) = \min[T(x_1), T(x_2), \dots, , T(x_m)] \tag{7}$$

Notasi $T(x_1, x_2, \dots, x_m)$ seringkali juga ditulis sebagai $T(x_1 x_2 \dots\ x_m)$.
Untuk penyederhanaan masalah, jika terdapat dua orang tertanggung yaitu (x) dan (y), maka $T(xy) = \min[T(x), T(y)]$. Dari sini, fungsi distribusi untuk $T(xy)$ adalah

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \Pr(T(xy) \le t) \\ &= 1 - \Pr[\min\{T(x), T(y)\} > t] \end{aligned} \tag{8}$$

Ketika sisa usia minimum dari kumpulan sisa usia (x) dan (y) lebih dari suatu nilai, artinya sisa usia (x) dan sisa usia (y) lebih dari nilai tersebut atau $\{T(x) > t\ dan\ T(y) > t\}$. Menurut **[5],** variabel acak sisa usia merupakan variabel acak yang saling bebas. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - \Pr[T(x) > t\,]\Pr[T(y) > t] \\ &= 1 - S_X(t) S_Y(t) \qquad (9) \\ &= 1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y \qquad (10) \end{aligned}$$

Dari **[2]**, diketahui

$S_{T(x)T(y)}(t,t) = \{T(x) > t\ dan\ T(y) > t\}$

maka,

$${}_tp_{xy} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y \tag{11}$$

Selanjutnya fungsi distribusi bersama dengan status *joint life* untuk dua orang tertanggung dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \Pr(T(xy) \le t) \\ &= \Pr[\min\{T(x), T(y)\} \le t] \qquad (12) \\ &= \Pr\{[T(x) \le t] \cup [T(y) \le t]\} \\ &= \Pr[T(x) \le t] + \Pr[T(y) \le t] - \Pr[T(x) \le t\ \cap\ T(y) \le t] \\ &= F_{T(x)}(t) + F_{T(y)}(t) - F_{T(x)T(y)}(t,t) \end{aligned}$$

Dengan notasi khusus untuk peluang meninggal dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} F_T(t) &= {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{xy} \\ &= {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x \cdot {}_tq_y \end{aligned} \tag{13}$$

Selanjutnya fungsi kepadatan peluang (pdf) untuk (xy) dengan status *joint life* dapat diperoleh dari fungsi distribusinya, yaitu

$$f_{T(xy)}(t) = \frac{d}{dt} F_{T(xy)}(t)$$

$$\begin{aligned} f_{T(xy)}(t) &= \frac{d}{dt}\left[F_{T(x)}(t) + F_{T(y)}(t) - F_{T(x)T(y)}(t,t)\right] \\ &= f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t) - \frac{d}{dt}\int_0^t \int_0^t f_{T(x)T(y)}(u,v)\, dudv \\ &= f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t) - \left[\int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(t,v)dv + \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(u,t)du\right] \end{aligned} \tag{14}$$

Berdasarkan distribusi sisa usia untuk kasus *single life*, diperoleh

$$\begin{aligned} &f_{T(xy)}(t) = \\ &{}_tp_x\, \mu(x+t) + {}_tp_y \mu(y+t) - \left[\int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(t,v)dv + \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(u,t)du\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Kemudian fungsi survival untuk distribusi bersama dengan status *joint life* adalah

$$S_{T(x)T(y)}(t,t) = \int_t^\infty \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(u,v)\,dudv \tag{16}$$

Jika pdf ditentukan dari fungsi survival diperoleh

$$\begin{aligned} f_T(t) &= -\frac{d}{dt} S_{T(x)T(y)}(t,t) \\ &= -\frac{d}{dt}\left[\int_t^\infty \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(u,v)\,dudv\right] \\ &= \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(t,v)dv + \int_t^\infty f_{T(x)T(y)}(u,t)du \\ &= {}_tp_x\ {}_tp_y[\mu(x+t)+\mu(y+t)] \end{aligned} \tag{17}$$

force of mortality bagi (xy) dengan status *joint life* dapat ditentukan menggunakan pdf dan fungsi ditribusi, dalam **[2]** dinyatakan

$$\mu_{xy}(t) = \frac{f_T(t)}{1-F_T(t)}$$

dan (18)

$$\mu_{xy}(t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

Yang ternyata sama dengan jumlah dari laju kematian dari masing-masing tertanggung.

2. *Last survivor*

Variabel acak yang menyatakan sisa usia dari sekumpulan orang dengan status *last survivor* merupakan sisa usia tersingkat dari sekumpulan tertanggung tersebut atau dinyatakan sebagai

$$T(\overline{x_1, x_2, \dots, x_m}) = \max[T(x_1), T(x_2), \dots,, T(x_m)] \tag{19}$$

Jika kasus disederhanakan menjadi hanya dua orang tertanggung saja , maka

$$T(\overline{xy}) = \max[T(x), T(y)]$$

Dari sini dapat dilihat hubungan antara variabel acak sisa usia untuk kedua status pada kasus *multiple life*, yaitu

$$\begin{aligned} T(xy) + T(\overline{xy}) &= \min[T(x),T(y)] + \max[T(x),T(y)] \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned} \tag{20}$$

Dan

$$T(xy)\cdot T(\overline{xy}) = \min[T(x),T(y)]\cdot\max[T(x),T(y)] = T(x)\cdot T(y) \tag{21}$$

karena

$$T(xy) = \{\min[T(x),T(y)] \le t\} = \{T(x)\le t\} \cup \{T(y) \le t\}$$
$$T(\overline{xy}) = \{\max[T(x),T(y)] \le t\} = \{T(x)\le t\} \cap \{T(y) \le t\}$$

maka hubungan antara fungsi distribusi keduanya dapat dinyatakan sebagai

$$F_{T(xy)}(t) + F_{T(\overline{xy})}(t) = F_{T(x)}(t) + F_{T(y)}(t) \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\left(1 - F_{T(xy)}(t)\right) + \left(1 - F_{T(\overline{xy})}(t)\right) \\ &\qquad = \left(1 - F_{T(x)}(t)\right) + \left(1 - F_{T(y)}(t)\right) \end{aligned}$$

$${}_tp_{xy} + {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y \tag{23}$$

$${}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy} \tag{24}$$

$${}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{xy}$$

Selanjutnya, persamaan yang menunjukkan hubungan antara fungsi kepadatan peluang dari kedua status diperoleh dari turunan pertama persamaan (22).

$$f_{T(xy)}(t) + f_{T(\overline{xy})}(t) = f_{T(x)}(t) + f_{T(y)}(t) \tag{25}$$

Laju kematian untuk status *last survivor* dalam **[2]** dinyatakan sebagai

$$\mu_{\overline{xy}}(t) = \frac{{}_tp_x\, \mu(x+t) + {}_tp_y\mu(y+t) - {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)}{{}_tp_{\overline{xy}}} \tag{26}$$

Dengan demikian pdf untuk status ini adalah

$$f_{\overline{xy}}(t) = {}_tp_{\overline{xy}}\mu_{\overline{xy}}(t) = {}_tp_x\, \mu(x+t) + {}_tp_y\mu(y+t) - {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t) \tag{27}$$

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan berdasarkan studi literatur. Penentukan *actuarial present value* (APV) anuitas kontinu *multiple life* dengan status *joint life* dan *last survivor*. Tahapan pengerjaannya diawali dengan mendefinisikan variabel acak yang menyatakan nilai tunai anuitas hidup kontinu untuk status *multiple life*. Kemudian, Menentukan *actuarial present value* dari jenis anuitas yang ada pada tahap sebelumnya. Dalam penelitian ini, dibatasi hanya untuk jenis anuitas seumur hidup dan anuitas berjangka n −tahun. Formula APV yang diperoleh akan diaplikasikan dalam contoh soal, tentunya dengan menggunakan peluang dalam tabel mortalitas untuk *multiple life*.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Produk asuransi jiwa sebagai bentuk perpindahan risiko dari tertanggung (pemegang polis) kepada penanggung (perusahaan asuransi), menyediakan jenis pertanggungan bagi dua orang atau lebih (*multiple life*). Keuntungan dari pertanggungan *multiple life* adalah jumlah tertanggung yang diberikan jaminan lebih banyak pada satu polis serta penghematan dalam hal biaya baik biaya administrasi maupun biaya pemasaran. Jika dilihat dari perspektif pemegang polis, rangkaian pembayaran premi merupakan sebuah anuitas yang bergantung pada peluang hidup tertanggung. Sama halnya dengan mekanisme pembayaran santunan atau uang pertanggungan, anuitas *multiple life* juga bergantung kepada status yang disepakati. Nilai penting yang dihitung untuk anuitas *multiple life* yaitu nilai sekarang aktuaria atau *actuarial present value* (APV) yang penentuannya melibatkan konsep bunga dan fungsi peluang (*mulitiple life*). Perlu diperhatikan bahwa kejadian hidup dan meninggal antara satu tertanggung dan yang lainnya saling bebas.

4.1 Anuitas dengan status *joint life*

Anuitas dengan status *joint life* merupakan anuitas hidup dimana rangkaian pembayarannya terhenti apabila terjadi kematian pertama dari sebuah kelompok tertanggung. Sama seperti pada anuitas *single life*, berdasarkan masa pembayaran anuitas dengan status *joint life* dapat berupa anuitas seumur hidup maupun anuitas berjangka.

1. Anuitas Seumur Hidup

Pembahasan ini diawali dengan mendefinisikan variabel acak yang menyatakan nilai tunai anuitas yang dilakukan oleh (xy) sampai dengan terjadinya kematian pertama di antara kumpulan tersebut, yaitu

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(x)}|} & , T(x) \leq T(y) \\ \bar{a}_{\overline{T(y)}|} & T(x) > T(y) \end{cases}$$

$$Z = \bar{a}_{\overline{T(xy)}|}, T(xy) \geq 0$$

Nilai sekarang aktuaria merupakan rata-rata dari seluruh kemungkinan nilai tunai anuitas yang bergantung pada usia meninggal (xy),

$$\begin{aligned} \bar{a}_{xy} = E[Z] &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_t p_{xy} \mu_{xy}(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1-v^t}{\delta}\ {}_t p_{xy} \mu_{xy}(t) dt \\ &= \frac{1}{\delta}\left[\int_0^\infty {}_t p_{xy} \mu_{xy}(t) dt - \int_0^\infty v^t\ {}_t p_{xy} \mu_{xy}(t) dt\right] \end{aligned} \quad (28)$$

Menggunakan hubungan antara fungsi kepadatan peluang dan fungsi survival serta sifat dari fungsi kepadatan peluang itu sendiri yang ada dalam **[1] ,** berlaku

$${}_t p_{xy} \mu_{xy}(t) = -\frac{d}{dt}\ {}_t p_{xy}$$

dan

$$\int_0^\infty {}_t p_{xy} \mu_{xy}(t) dt = 1$$

Akibatnya,

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\delta}\left[1 + \int_0^\infty v^t\ d(\ {}_t p_{xy})\right] = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta}\int_0^\infty v^t\ d(\ {}_t p_{xy}) \quad (29)$$

Suku kedua pada persamaan di atas dapat diselesaikan dengan teknik pengintegralan parsial.

Misalkan, $u = v^t$ maka $\frac{du}{dt} = v^t \ln v \Leftrightarrow du = v^t \ln v\, dt$

Dan $dv = d\ {}_t p_{xy} \Leftrightarrow v = \ {}_t p_{xy}$

$$\int_0^\infty v^t\ d(\ {}_t p_{xy}) = -1 + \delta \int_0^\infty v^t\ {}_t p_{xy} dt$$

Dengan demikian,

$$\bar{a}_{xy} = \frac{1}{\delta}\left[\delta \int_0^\infty v^t\ {}_t p_{xy} dt\right] = \int_0^\infty v^t\ {}_t p_{xy} dt = \int_0^\infty v^t\ {}_t p_x \cdot\ {}_t p_y dt \quad (30)$$

2. Anuitas berjangka n −tahun

Selanjutnya untuk jenis anuitas berjangka, nilai tunai anuitas yang dilakukan oleh (xy) sampai dengan terjadinya kematian pertama di antara kumpulan tersebut atau sampai masa pembayaran anuitas n-tahun berakhir, dengan cara yang sama seperti pada jenis seumur hidup yaitu

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(x)}|} & , T(x) \leq T(y) \leq n \\ \bar{a}_{\overline{T(y)}|} & , T(y) \leq T(x) \leq n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , T(xy) > n \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(xy)}|} & ,T(xy) \le n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & T(xy) > n \end{cases}$$

Nilai sekarang aktuaria merupakan rata-rata dari seluruh kemungkinan nilai tunai anuitas yang bergantung pada usia meninggal (xy),

$$\begin{aligned} \bar{a}_{xy:\overline{n}|} &= E[Z] \\ &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)dt \\ &= \int_0^n \frac{1-v^t}{\delta}\ {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)dt + \bar{a}_{\overline{n}|} \int_n^\infty {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)dt \\ &= \frac{1}{\delta}\left[\left(1 - {}_np_{xy}\right) + \left(v^n\ {}_np_{xy} - 1 + \delta \int_0^n v^t\ {}_tp_{xy}dt\right)\right] + \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_{xy} \\ &= \left[\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}\ {}_np_{xy}\right) + \left(\frac{1}{\delta}v^n\ {}_np_{xy} - \frac{1}{\delta} + \int_0^n v^t\ {}_tp_{xy}dt\right)\right] + \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_{xy} \\ &= \int_0^n v^t\ {}_tp_{xy}dt \\ &= \int_0^n v^t\ {}_tp_x \cdot {}_tp_ydt \end{aligned} \tag{31}$$

4.2 Anuitas dengan status *last survivor*

Anuitas yang dilakukan oleh dua orang tertanggung dengan status *last survivor* memperhatikan kematian terakhir yang terjadi di antara keduanya. Rangkaian pembayaran baru akan dihentikan setelah terjadi kematian terakhir di dalam kumpulan tersebut.

1. Anuitas Seumur Hidup

Untuk jenis anuitas seumur hidup, dapat didefinisikan sebuah variabel acak yang menyatakan nilai tunai dari rangkaian pembayaran tersebut.

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(y)}|} & ,T(x) \le T(y) \\ \bar{a}_{\overline{T(x)}|} & T(x) > T(y) \end{cases}$$

$$Z = \bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}, T(\overline{xy}) \ge 0$$

Dari sini, nilai tunai aktuaria diperoleh dari ekspektasi variabel acak di atas atau

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = E(Z) = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_tp_{\overline{xy}}\mu_{\overline{xy}}(t)dt$$

Karena ${}_tp_{\overline{xy}}\mu_{\overline{xy}}(t)$ merupakan pdf dan $\bar{a}_{\overline{t}|}$ di sini merupakan fungsi yang sama dengan pada status *joint life*, maka dengan proses yang sama diperoleh

$$\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{\overline{xy}}dt \tag{32}$$

Selanjutnya, menggunakan hubungan antara anuitas hidup *last survivor* dengan anuitas *single life* serta anuitas hidup *joint life* yaitu

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\overline{xy}} &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\left[\ {}_tp_x\ \mu(x+t) + {}_tp_y\mu(y+t) - {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)\right]dt \\ &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_tp_x\ \mu(x+t)\ dt + \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_tp_y\mu(y+t)\ dt - \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_tp_{xy}\mu_{xy}(t)\ dt \\ &= \int_0^\infty v^t\ {}_tp_xdt + \int_0^\infty v^t\ {}_tp_ydt - \int_0^\infty v^t\ {}_tp_{xy}dt \\ &= \bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_{xy} \end{aligned} \tag{33}$$

2. Anuitas berjangka n −tahun

Rangkaian pembayaran yang dilakukan oleh dua orang dengan status last survivor *selama n −tahun akan mendatangkan beberapa kemungkinan. Jika*

$(\overline{xy}) \leq n$ *maka pembayaran akan terhenti di saat terjadi kematian terakhir di antara kedua tertanggung. Akan tetapi, jika* $(\overline{xy}) > n$ *maka rangkaian pembayaran akan dilakukan sampai jangka waktu pembayaran berakhir yaitu* n *−tahun.*

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} & , T(\overline{xy}) \leq n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , T(\overline{xy}) > n \end{cases}$$

Penentuan nilai sekarang aktuaria untuk jenis anuitas hidup berjangka n *−tahun dengan status* last survivor *melalui tahapan yang mirip dengan anuitas hidup* joint life *dan diperoleh*

$$\bar{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \ {}_tp_{\overline{xy}} dt$$

$$= \int_0^n v^t \left[{}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy} \right] dt$$

$$= \int_0^n v^t \ {}_tp_x dt + \int_0^n v^t \ {}_tp_y dt - \int_0^n v^t \ {}_tp_{xy} dt \quad (34)$$

$$\bar{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{a}_{y:\overline{n}|} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|} \quad (35)$$

5. KESIMPULAN

Status *Multiple Life*	Jenis Anuitas	Variabel Acak Nilai Tunai dan APV
Joint Life	Anuitas seumur hidup	$Z = \bar{a}_{\overline{T(xy)}|}, T(xy) \geq 0$ $\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x \cdot {}_tp_y dt$
	Anuitas berjangka n −tahun	$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(xy)}|} & , T(xy) \leq n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & T(xy) > n \end{cases}$ $\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \ {}_tp_x \cdot {}_tp_y dt$
Last Survivor	Anuitas seumur hidup	$Z = \bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|}, T(\overline{xy}) \geq 0$ $\bar{a}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x dt + \int_0^\infty v^t \ {}_tp_y dt - \int_0^\infty v^t \ {}_tp_{xy} dt$ $= \bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_{xy}$
	Anuitas berjangka n −tahun	$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(\overline{xy})}|} & , T(\overline{xy}) \leq n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & , T(\overline{xy}) > n \end{cases}$ $\bar{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|} == \int_0^n v^t \ {}_tp_x dt + \int_0^n v^t \ {}_tp_y dt - \int_0^n v^t \ {}_tp_{xy} dt$ $\bar{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{a}_{y:\overline{n}|} - \bar{a}_{xy:\overline{n}|}$

REFERENSI

[1] Bain, L.J. & Engelhardt, M. 1992. *Introduction To Probability And Mathematical Statistics.* Edisi 2. Duxbury Thomson Learning, United States of America.
[2] Bowers Jr, N.L., dkk. 1986. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, Itasca.
[3] Dellinger, J. K. 2006. *The Handbookof Variable Income Annuities*. John Wiley & Sons. New York.
[4] Dickson, D.C.M. M. R. Hardy and H. R. Waters. 2009. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press. UK.
[5] Gerber, H.U. 1997. *Life Insurance Mathematics*. Edisi Ketiga. Springer, New York.
[6] Kellison, Stephen G. 2009. *The Theory of Interest : 3rd Edition*. McGraw Hill. New York.
[7] Promislow, S. David. 2011. *Fundamentals of actuarial mathematics : 2nd Edition*. John Wiley & Sons Ltd. UK.