Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.13 No.1 (Juni 2019) Hal. 56-64

PEMBAGI NOL PADA MATRIKS ATAS RING KOMUTATIF

Mega Nurhayani[1], Thresye[2], Nurul Huda[3]

[1, 2, 3] *Program Studi Matematika, FMIPA Universitas Lambung Mangkurat*
Jln. A. Yani Km. 35,800 Banjarbaru, Kalimantan Selatan
email: duaemeganurhayani@gmail.com

ABSTRAK

Matriks atas ring komutatif adalah matriks yang entri-entrinya dibangun dari ring komutatif. Himpunan matriks atas ring komutatif membentuk struktur ring terhadap operasi penjumlahan matriks dan operasi pergandaan matriks. Struktur yang terbentuk atas matriks yang entri-entri dari ring komutatif atau dapat disimbolkan $M_{m\times n}(R)$ merupakan ring. Selanjutnya $(M_{mxn}, +,*)$ dikatakan ring dengan pembagi nol jika terdapat dua elemen matriks yang tidak sama dengan nol akan tetapi ketika diberikan operasi pergandaan maka bernilai nol. Tulisan ini membahas sifat-sifat pembagi nol pada matriks atas ring komutatif, yaitu jika $A \in M_{n\times n}(R)$, dengan R adalah ring komutatif, maka matriks A merupakan pembagi nol kiri dalam $A \in M_{n\times n}(R)$ jika dan hanya jika matriks A merupakan pembagi nol kanan dalam $M_{n\times n}(R)$.

Kata kunci : Ring komutatif, pembagi nol, matriks, matriks atas ring komutatif.

1. PENDAHULUAN

Secara umum, ilmu aljabar membahas tentang himpunan beserta kelengkapannya dari himpunan tersebut. Salah satu himpunan yang banyak dipelajari adalah himpunan matriks. Matriks merupakan jajaran bilangan yang membentuk persegi panjang dan diapit oleh "( )" atau "[ ]", dengan ukuran panjang dan lebar sesuai dengan jumlah kolom dan baris. Ilmu aljabar juga mempelajari teori ring. Ring merupakan suatu himpunan yang tidak kosong yang dilengkapi dua operasi biner, dimana pada operasi pertama membentuk grup komutatif, sedangkan pada operasi kedua berlaku sifat assosiatif dan terhadap operasi pertama dan kedua berlaku sifat distributif kiri dan kanan. Adapun ring yang bersifat komutatif terhadap operasi pergandaan disebut ring komutatif. Kemudian pada ring terdapat sifat pembagi nol, yaitu suatu elemen tak nol pada ring yang jika terdapat elemen tak nol lainnya akan menyebabkan hasil operasi kedua elemen tersebut bernilai nol [5]. William C. Brown pada tahun 1992 memperkenalkan konsep matriks atas ring komutatif. Himpunan matriks atas ring komutatif yang selanjutnya dapat disimbolkan dengan $M_{m\times n}(R)$ yang kemudian dibentuk menjadi struktur ring terhadap operasi penjumlahan matriks dan operasi pergandaan matriks. Kemudian $(M_{nxn}, +,*)$ dikatakan ring dengan pembagi nol jika terdapat dua elemen yang tidak sama dengan nol akan tetapi ketika diberikan operasi pergandaan maka hasil dari operasi pergandaan tersebut bernilai nol. Berdasarkan uraian di atas maka peneliti tertarik untuk menjelaskan sifat-sifat pembagi nol pada matriks atas ring komutatif.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ring

Suatu himpunan *R* yang dilengkapi dengan dua operasi biner disebut ring, jika dapat memenuhi definisi sebagai berikut dan disimbolkan dengan *(R,+,•)*:

Definisi 2.1.1 [5]

Suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner, yaitu operasi pertama $(+)$ *dan operasi kedua* $(\cdot)$ *disebut ring jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:*

1. $(R, +)$ *adalah grup abelian*
2. $(R,\cdot)$ *bersifat assosiatif*

Untuk setiap $a, b, c \in R$ *berlaku* $(ab)c = a(bc)$

3. *Untuk setiap* $a, b, c \in R$, *berlaku:*
   a) Distributif kiri, $a(b + c) = (ab) + (ac)$ *dan*
   b) Distributif kanan, $(a + b)c = (ac) + (bc)$.

Himpunan tidak kosong *R* dengan dua operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma pada Definisi 2.2.1 dan sifat komutatif terhadap operasi kedua disebut juga dengan ring komutatif. Berikut akan didefinisikan ring dengan sifat komutatif terhadap operasi kedua yang disebut ring komutatif.

Definisi 2.1.2 [5]

Suatu ring R adalah ring komutatif, jika terhadap operasi kedua berlaku sifat komutatif yaitu untuk setiap $a, b \in R$ *berlaku* $ab = ba$.

Pembagi nol pada ring adalah suatu elemen-elemen taknol yang hasil pergandaannya adalah nol, seperti yang dijelaskan oleh definisi berikut:

Definisi 2.1.3 [6]

Diberikan $(R,+,\cdot)$ *ring dan* $a \neq 0_R \in R$. *Kemudian a disebut pembagi nol jika terdapat* $b \neq 0_R \in R$ *sedemikian sehingga* $ab = 0_R$ *atau* $ba = 0_R$.

2.2 Matriks

Matriks merupakan jajaran bilangan yang membentuk persegi panjang dan diapit oleh “( )” atau “[ ]”, dengan ukuran panjang dan lebar sesuai dengan jumlah kolom dan baris. Bilangan yang terdapat di dalam suatu matriks disebut dengan entri. Berikut ini merupakan definisi dari matriks.

Definisi 2.2.1 [2]

Suatu matriks adalah jajaran bilangan-bilangan membentuk persegi panjang. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Entri yang terletak pada baris i dan kolom j di dalam matriks $\boldsymbol{A}$ akan dinyatakan sebagai a_{ij}.

Matriks umum berukuran $x \times y$ dinyatakan sebagai berikut

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1y} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2y} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{x1} & \alpha_{x2} & \cdots & \alpha_{xy} \end{bmatrix}$$

Matriks juga memiliki operasi seperti himpunan bilangan lainnya pada aljabar, dengan aturan khusus pada matriks. Berikut ini terdapat pula beberapa definisi dari operasi pada matriks.

Definisi 2.2.2 [2]
Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ ialah matriks-matriks yang memiliki ukuran yang sama, satu dengan yang lain, maka jumlahan kedua matriks adalah sebuah matriks baru yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada matriks $\boldsymbol{A}$ dengan entri-entri yang bersesuaian pada matriks $\boldsymbol{B}$. Kemudian, selisih kedua matriks adalah matriks yang diperoleh dengan cara mengurangkan entri-entri pada $\boldsymbol{A}$ dengan entri-entri yang bersesuaian pada $\boldsymbol{B}$.

Definisi 2.2.3 [2]
Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $x \times y$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks $y \times z$ maka hasil kali kedua matriks adalah matriks $x \times z$ yang entri-entrinya ditentukan dengan cara memisahkan baris i pada matriks $\boldsymbol{A}$ dan kolom j pada matriks $\boldsymbol{B}$. Mengalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut, kemudian menjumlahkan hasil yang diperoleh.

Pada matriks terdapat fungsi yang disebut fungsi determinan, dimana fungsi tersebut bernilai real. Berikut ini akan didefinisikan fungsi determinan matriks.

Definisi 2.2.4 [2]
Diberikan $\boldsymbol{A}$ ialah suatu matriks persegi. Fungsi determinan dapat dinyatakan atau dinotasikan dengan det dan didefinisikan $det(\boldsymbol{A})$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari matriks $\boldsymbol{A}$.

Definisi 2.2.5 [2]
Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran $m \times n$, maka transpos $\boldsymbol{A}$ didefinisikan sebagai matriks $\boldsymbol{A}^T$ berukuran $n \times m$. Dimana $\boldsymbol{A}^T$ diperoleh dari mempertukarkan entri-entri pada baris pertama $\boldsymbol{A}$ menjadi entri-entri pada kolom pertama $\boldsymbol{A}^T$, entri-entri baris kedua $\boldsymbol{A}$ menjadi entri-entri pada kolom kedua $\boldsymbol{A}^T$, dan seterusnya.

Transpose matriks memiliki beberapa sifat yang menjadi dasar didala operasi perhitungan matriks, yaitu:

Teorema 2.2.6 [2]
a. $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$
b. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$
c. $k(\boldsymbol{A}^T) = (k\boldsymbol{A}^T)$ dengan k suatu scalar
d. $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$

2.3 Matriks atas Ring Komutatif

Matriks yang entri-entrinya merupakan anggota dari suatu ring komutatif, disebut matriks atas ring komutatif, yang didefinisikan dan dinotasikan sebagai berikut:

Definisi 2.3.1 [3]
Himpunan matriks $m \times n$ dengan entri-entrinya dari R dinotasikan sebagai $M_{m\times n}(R)$, dengan R adalah ring komutatif.

Bentuk umum dari $M_{m\times n}(R)$ adalah

$$M_{m\times n}(R) = \{[\alpha_{ij}], \forall\, i = 1,2,\dots,x; j = 1,2,\dots,y \; dan \; \alpha_{ij} \in R\}$$

2.4 Rank Matriks atas Ring Komutatif

Rank dari matriks merupakan banyaknya elemen basis pada ruang baris atau ruang kolom matriks tersebut. Banyaknya elemen pada basis ruang baris atau ruang kolom matriks tersebut disebut sebagai dimensi ruang baris atau ruang kolom. Dimensi ruang baris atau ruang kolom inilah yang disebut dengan rank matriks, atau dinotasikan dengan $Rank(\boldsymbol{A})$. Vektor-vektor baris tak nol yang berbentuk eselon dari matriks $\boldsymbol{A}$ akan membangun basis untuk ruang baris $\boldsymbol{A}$ dan vektor-vektor kolom tak nol yang berbentuk eselon dari matriks $\boldsymbol{A}$ akan membangun basis untuk ruang kolom $\boldsymbol{A}$.

Jika rank matriks dibangun dengan melihat minor matriks $\boldsymbol{A}$ yang tidak nol, maka untuk rank matriks atas ring komutatif dapat dilihat dari ideal yang dibangun oleh semua minor $t \times t$ dari matriks atas ring komutatif.

Definisi 2.4.1 [3]
Diberikan $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(R)$. Himpunan $I_t(\boldsymbol{A})$ didefinisikan sebagai deal didalam R yang dibangun oleh minor-minor matriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $t \times t$ dari matriks $\boldsymbol{A}$ untuk setiap $t = 1,2,\dots,min\{m,n\}$.

2.6 Teorema N. McCoy dalam Sistem Persamaan Linier atas Ring Komutatif

Sama seperti yang diketahui sistem persamaan linear homogen memiliki solusi, sistem persamaan linear homogeny pada matriks atas ring komutatif $\boldsymbol{A}X = 0$ juga selalu konsisten atau memiliki solusi, yaitu $X = 0$. Terkait dengan kekonsistenan sistem persamaan linear homogen atas ring akan dipaparkan definisi Teorema McCoy

Teorema 2.6.1 [3]

Diberikan $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(R)$. Sistem persamaan linier homogenya $\boldsymbol{A}X = 0$ mempunyai solusi nontrivial jika dan hanya jika rank ($\boldsymbol{A}$) < n .

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan mempelajari materi tentang grup, ring, matriks, matriks atas ring komutatif, serta konsep pembagi nol pada matriks atas ring komutatif. Kemudian membuktikan struktur yang terbentuk dari matriks atas ring komutatif dan membuktikan teorema yang berkaitan sifat-sifat pembagi nol pada matrik atas ring komutatif, serta menarik kesimpulan.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Struktur pada Matriks atas Ring komutatif

Berikut ini diberikan lemma untuk himpunan matriks atas ring komutatif yang disertai operasi penjumlahan matriks.

Lemma 4.1.1 [1]
Matriks $M_{n\times n}(R)$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan matriks merupakan grup Abelian.

Lemma 4.1.2 [1]
Himpunan matriks $M_{n\times n}(R)$ yang dilengkapi dengan operasi perkalian matriks merupakan semigrup.

Lemma 4.1.3 [1]
Untuk setiap $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta} \in M_{n\times n}(R)$ *berlaku,* $\boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\delta}$ *dan* $(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta}) \times \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{\beta}$.

Teorema 4.1.4 [1]
Himpunan matriks $M_{n\times n}(R)$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks merupakan ring.

Bukti.
Berdasakan lemma 4.1.1 diperoleh bahwa $(M_{n\times n}(R), +)$ merupakan grup abelian, dan menurut lemma 4.1.2 sistem matematika $(M_{n\times n}(R),\times)$ merupakan semigrup. Selanjutnya, menurut lemma 4.1.3 diperoleh bahwa sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan berlaku di $M_{n\times n}(R)$.
Maka hal ini menunjukkan $(M_{n\times n}(R), +,\times)$ merupakan ring. ■

4.2 Pembagi Nol pada Matriks atas Ring Komutatif

Berikut akan dibuktikan teorema mengenai sifat-sifat pembagi nol pada matriks atas ring komutatif.

Teorema 4.2.1 [3]
Diberikan $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$,dengan $Z(R)$adalah himpunan pembagi nol di R maka berlaku:

a. *Matriks **A** merupakan pembagi nol kiri pada $M_{n\times n}(R)$ jika dan hanya jika $det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$*
b. *Matriks **A** merupakan pembagi nol kanan pada $M_{n\times n}(R)$ jika dan hanya jika* $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$.

Bukti.

a. $\Leftarrow$
Diketahui $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$, dengan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol di R.
Akan dibuktikan $\boldsymbol{A}$ merupakan pembagi nol kiri di $M_{n\times n}(R)$.
Jika $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$, menurut sifat rank matriks atas ring komutatif pada Definisi 2.5.4 point (e), jika $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$ maka berakibat $rank(\boldsymbol{A}) < n$. Mengingat penyelesaian sistem persamaan linier homogen dengan matriks

koefisiennya atas ring komutatif, yaitu $\boldsymbol{A}X = 0$ pada Teorema 2.6.2, kondisi tersebut berakibat sistem persamaan linear homogennya mempunyai penyelesaian non trivial. Dengan demikian $\boldsymbol{A}X = 0$ untuk suatu vektor tak nol $X \in R^n$.

Bentuk matriks $\boldsymbol{B} = (x|x| \dots |x)$ elemen dari $M_{n\times n}(R)$, maka matriks $\boldsymbol{B} \neq 0\ di\ M_{n\times n}(R)$ dan memenuhi $\boldsymbol{AB} = (Ax|Ax| \dots |Ax) = (0|0| \dots |0) = 0$. Jadi matriks $\boldsymbol{A}$ merupakan pembagi nol kiri di $M_{n\times n}(R)$.

$\Longrightarrow$

Diketahui $\boldsymbol{A}$ pembagi nol kiri dalam $M_{n\times n}(R)$.

Akan dibuktikan bahwa $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$, dengan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol di R.

Karena diketahui $\boldsymbol{A}$ adalah pembagi nol kiri, maka dapat dibentuk $\boldsymbol{AB} = 0$ untuk suatu matriks tak nol $\boldsymbol{B} \in M_{n\times n}(R)$. Andaikan $\boldsymbol{B} = (x_1|x_2| \dots x_n|)$ dalam bentuk partisi kolom. Karena $\boldsymbol{B} \in M_{n\times n}(R)$ matriks tak nol, maka terdapat suatu kolom x_1 yang bukan vektor nol di R^n.

Dari yang sudah diketahui, $\boldsymbol{A}$ adalah pembagi nol kiri, maka dapat diperoleh

$$0 = \boldsymbol{AB} = (Ax_1|Ax_2| \dots x_n|),$$

akibatnya $A\boldsymbol{x_i} = 0$ untuk setiap $i = 1,2, \dots n$. Karena terdapat kolom x_i yang bukan vektor nol di R^n dan $Ax_i = 0$, maka sistem persamaan linear homogenya menjadi $\boldsymbol{A}X = 0$ yang mana pada Teorema 2.6.2 mempunyai penyelesaian non trivial. Akibat dari sistem persamaan linier homogennya non trivial maka menurut Definisi 2.5.4 point (e) $rank(A) < n$ sehingga $det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$.

b. $\Longleftarrow$

Diketahui $det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$, dengan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol di R.

Akan dibuktikan $\boldsymbol{A}$ merupakan pembagi nol kanan di $M_{n\times n}(R)$.

Jika $det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$, maka menurut Definisi 2.3.8 diperoleh $det(\boldsymbol{A}^t) = det(\boldsymbol{A})$,

Dari definisi 2.3.8, $det(\boldsymbol{A}^t) = det(\boldsymbol{A})$, dan dari diketahui bahwa $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$,

maka diperoleh $det(\boldsymbol{A^t}) \in Z(R)$.

Menurut sifat pada Definisi 2.5.4, point (b) rank matriks atas ring komutatif $rank(\boldsymbol{A}) = rank(\boldsymbol{A^t})$ maka berakibat $rank(\boldsymbol{A^t}) < n$.

Mengingat dengan penyelesaian sistem persamaan linear homogen dengan matriks koefisiennya atas ring komutatif, yaitu $\boldsymbol{A^t}X = 0$, kondisi tersebut berakibat sistem persamaan linear homogennya mempunyai penyelesaian non trivial.

Dengan demikian $\boldsymbol{A^t}X = 0$ untuk suatu vektor tak nol $x \in R^n$. Bentuk matriks $\boldsymbol{B} = (x_1|x_2| \dots x_n|)$ elemen di $M_{n\times n}(R)$, maka matriks $\boldsymbol{B}$ adalah matriks tak nol di $M_{n\times n}(R)$ dan memenuhi $\boldsymbol{A^t B} = (Ax_1|Ax_2| \dots Ax_n|)$= $(0|0| \dots |0) = 0$.

Dari Teorema 2.3.7, maka diperoleh

$(\boldsymbol{BA})^t = \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t = 0$, karena $det(\boldsymbol{A}^t) = det(\boldsymbol{A})$ sehingga

$$\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t = 0 \qquad B^t\boldsymbol{A} = 0.$$

Karena $\boldsymbol{B} \neq 0, maka\ \boldsymbol{B}^t \neq 0$. Dengan demikian matriks $\boldsymbol{A}$ merupakan pembagi nol kanan pada $M_{n\times n}(R)$.

$\Longrightarrow$

Diketahui $\boldsymbol{A}$ pembagi nol kanan dalam $M_{n\times n}(R)$.
Akan dibuktikan bahwa $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$, dengan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol di R.
Karena Diketahui $\boldsymbol{A}$ pembagi nol kanan dalam $M_{n\times n}(R)$, maka dapat dibentuk $\boldsymbol{BA} = 0$ untuk suatu matriks tak nol $\boldsymbol{B} \in M_{n\times n}(R)$.
Karena $\boldsymbol{BA} = 0$, menurut Teorema 2.3.8 matriks maka

$$(\boldsymbol{BA})^t = 0 \qquad \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}^t = 0.$$

Andaikan $\boldsymbol{B}^t = (x_1|x_2| \dots x_n|)$ dalam bentuk partisi kolom. Karena $\boldsymbol{B}^t \in M_{n\times n}(R)$ matriks tak nol, maka terdapat suatu kolom x_i yang bukan vektor tak nol di R^n. Dari yang diketahui diperoleh $0 = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}^t = (A^t x_1|A^t x_2| \dots A^t x_n|)$, akibatnya $\boldsymbol{A}^t x_i = 0$ untuk setiap $i = 1,2,3,\dots,n$. Karena terdapat kolom x_i yang bukan vektor tak nol di R^n dan $\boldsymbol{A}^t x_i = 0$, maka sistem persalaman linier homogen $\boldsymbol{A}^t X = 0$ mempunyai penyelesaian non trivial. Akibatnya, dari Teorema 2.6.2, $rank(\boldsymbol{A}) < n$. Dan melihat pada Definisi 2.5.4 ponit (b) sifat pada rank matriks atas ring komutatif yakni $rank(\boldsymbol{A}) = rank(\boldsymbol{A}^t)$ sehingga dapat dituliskan

$$rank(\boldsymbol{A}) < n = rank(\boldsymbol{A}^t) < n.$$

Dengan melihat Definisi 2.5.4 point (e) maka diperoleh bahwa $rank(\boldsymbol{A}) < n$ jika dan hanya jika $\det(\boldsymbol{A}) \in$ Z(R). Sesuai dengan sifat pada Teorema 2.3.8,maka diperoleh $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^t)$ sehingga $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$. ■

Teorema 4.2.1 mengakibatkan bahwa himpunan semua pembagi nol kiri di $M_{n\times n}(R)$ sama dengan himpunan semua pembagi nol kanan di $M_{n\times n}(R)$, yaitu $Z(M_{n\times n}(R))$.

Teorema 4.2.2 [3]
Matriks $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$ merupakan pembagi nol kiri pada ring $M_{n\times n}(R)$ jika dan hanya jika matriks $A \in M_{n\times n}(R)$ pembagi nol kanan pada ring $M_{n\times n}(R)$.
Bukti.
$\Longrightarrow$
Diketahui $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$ merupakan pembagi nol kiri pada ring $M_{n\times n}(R)$. Akan dibuktikan jika $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$ pembagi nol kanan pada ring $M_{n\times n}(R)$. Menurut teorema 4.2.1 point (a), maka diperoleh matriks $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$ merupakan pembagi nol kiri jika dan hanya jika $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$, dan menurut teorema 4.2.1 point (b) maka $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$ merupakan pembagi nol kanan jika dan hanya jika $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$.
Maka dapat disimpulkan matriks $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$ merupakan pembagi nol kanan pada ring $M_{n\times n}(R)$.
$\Longleftarrow$
Diketahui $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$ pembagi nol kanan pada ring $M_{n\times n}(R)$. Akan dibuktikan $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$ merupakan pembagi nol kiri pada ring $M_{n\times n}(R)$. Menurut teorema 4.2.1 b, maka diperoleh matriks $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$ merupakan pembagi nol kanan jika dan hanya jika $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$, dan menurut teorema 4.2.1 point (a) maka $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$ merupakan pembagi nol kiri jika dan hanya jika $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$.
Maka dapat disimpulkan bahwa matriks $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$ merupakan pembagi nol kiri pada ring $M_{n\times n}(R)$. ■

Kemudian akan dibuktikan teorema mengenai sifat pembagi nol pada matriks atas ring komutatif yang berkaitan dengan daerah integral. Daerah integral ialah suatu ring dengan sifat khusus, dimana selain bersifat komutatif dengan elemen satuan juga memiliki sifat hanya memuat pembagi nolnya adalah nol saja. Berdasarkan dari sifat tersebut dan juga sebagai akibat dari teorema 4.2.1 maka diperoleh akibat dari pembagi nol pada ring $M_{n\times n}(R)$ terhadapat daerah integral sebagai berikut:

Akibat 4.2.3 [3]
Diberikan R adalah suatu daerah integral dan $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$. *Maka* $\boldsymbol{A}$ *merupakan pembagi nol kiri dan kanan jika dan hanya jika* $det(\boldsymbol{A}) = 0$.
Bukti.
$\Longrightarrow$
Diketahui R adalah daerah integral, maka R adalah ring komutatif dan matriks $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$.
$\boldsymbol{A}$ merupakan pembagi nol kiri dan pembagi nol kanan di $M_{n\times n}(R)$. .
Akan dibuktikan jika $det(\boldsymbol{A}) = 0$
Menurut teorema 4.2.2 berlaku, jika $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$, maka A merupakan pembagi nol kiri dan kanan jika dan hanya jika $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$.
Karena R adalah daerah integral, menurut definisi 2.2.10 maka dapat dituliskan $Z(R) = \{0\}$, dimana $Z(R)$ adalah notasi yang menyatakan himpunan pembuat nol di R.
Karena pada teorema 4.2.2 berlaku jika $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$ dan didapat bahwa $Z(R) = \{0\}$, maka berlaku $det(\boldsymbol{A}) = 0$.
$\Longleftarrow$
Diketahui $det(\boldsymbol{A}) = 0$.
$\boldsymbol{A}$ merupakan pembagi nol kiri dan pembagi nol kanan di $M_{n\times n}(R)$.
Akan dibuktikan R adalah daerah integral.
Karena diketahui $det(\boldsymbol{A}) = 0$ dan menurut Teorema 4.2.2 berlaku bahwa $\boldsymbol{A} \in M_{n\times n}(R)$, maka $\boldsymbol{A}$ merupakan pembagi nol kiri dan kanan jika dan hanya jika $\det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$.
Dari yang diketahui $det(\boldsymbol{A}) = 0$, dapat dituliskan menjadi $0 \in Z(R)$. Dengan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol di R.
Menurut definisi daerah integral 2.2.10, maka $Z(R) = \{0\}$.
Karena $det(\boldsymbol{A}) \in Z(R)$, dan $Z(R) = \{0\}$, diperoleh $det(\boldsymbol{A}) = 0$. ■

5. KESIMPULAN (JIKA ADA)

Dari hasil dan pembahasan, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:
1. Struktur yang terbentuk atas matriks yang entri-entri dari ring komutatif atau dapat disimbolkan $M_{m\times n}(R)$ merupakan ring atau dapat disimbolkan $(M_{m\times n}(R), +,\times)$
2. Jika $A \in M_{n\times n}(R)$, dengan R adalah ring komutatif, maka berlaku
a. Matriks A merupakan pembagi nol kiri dalam $A \in M_{n\times n}(R)$ jika dan hanya jika $de\,t(A) \in Z(R)$.
b. Matriks A merupakan pembagi nol kanan dalam $A \in M_{n\times n}(R)$ jika dan hanya jika $de\,t(A) \in Z(R)$.

c. Matriks A merupakan pembagi nol kiri dalam $A \in M_{n\times n}(R)$ jika dan hanya jika matriks A merupakan pembagi nol kanan dalam $M_{n\times n}(R)$.

REFERENSI

[1] Abdurrazzaq, A., 2015. *Ring Matriks atas Ring Komutatif*. JMP:Volume 7 Nomor 1, Juni 2015, hal 11-18

[2] Anton, H. & C. Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi, edisi ke-8, jilid 1*. Erlangga, Jakarta.

[3] Brown, W.C. 1992. *Matrices Over Commutative Rings*. Macrel Dekker, Inc, New York.

[4] Eves, H. 1968. *Elementgary Matix Theory*. Allyn and Bacon, In., Boston.

[5] Frailegh, J.B. 2002. *A First Course in Abstract Algebra.* 7nd ed. Addison-Wasley, Publishing Company, New York.