Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.14 No.2 (Desember 2020) Hal. 62-70

PELABELAN TOTAL TAK-AJAIB SISI PADA MULTISTAR

Yoga Jati Kusuma[1], Dominikus Arif Budi Prasetyo[2]

[1,2]*Program Studi Pendidikan Matematika*
Universitas Sanata Dharma
Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Yogyakarta
Email[2] :*dominic_abp@usd.ac.id*

ABSTRACT

Graph theory contains several topics, one of which will be discussed in this study is graph labeling. In the topic of labeling, the graph used is a limited, simple, and undirected graph. In this study, the type of labeling used is total labeling. The multistar graph used in this study is a combination of star graphs whose center vertex are not connected to each other. This research uses literature research method which is divided into two parts, that is the basic calculation to determine the boundary of the first term a and the difference d from the (a,d) edge antimagic total labeling on the mS_n multistar graph. The second part is to apply (a,d) edge antimagic total labeling to the multistar graph mS_n. In multistar mS_n can be labeled by (a,d) edge antimagic total labeling by $\left(\frac{3m^2n^2+5m^2n+4mn}{2mn},1\right)$ and $\left(\frac{2m^2n^2+5m^2n+5mn}{2mn},2\right)$ for center label smallest value, with $m \geq 1$ and $n \geq 2$. Otherwise, for center label largest value can be done by $\left(\frac{7m^2n^2+m^2n+4mn}{2mn},1\right)$and $\left(\frac{6m^2n^2+m^2n+5mn}{2mn},2\right)$ with $m \geq 1$ and $n \geq 2$.
***Keywords** : edge antimagic total labeling, multistar graph.*

ABSTRAK

Teori graf memuat beberapa topik, salah satu yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah pelabelan graf. Dalam topik pelabelan, graf yang digunakan merupakan graf terbatas, sederhana, dan tak berarah. Dalam penelitian ini, jenis pelabelan yang digunakan adalah pelabelan total. Graf multistar yang digunakan dalam penelitian ini merupakan gabungan graf star yang titik pusatnya tidak saling terhubung. Penelitian ini menggunakan metode penelitian pustaka yang dibagi menjadi dua bagian, yakni perhitungan dasar untuk menentukan batas suku pertama a dan beda d dari pelabelan total tak-ajaib sisi (a,d) pada graf multistar mS_n. Bagian yang kedua adalah keberlakukan pelabelan total tak-ajaib sisi (a,d) pada graf multistar mS_n. Pada graf multistar mS_n berlaku pelabelan total tak-ajaib sisi (a,d) $\left(\frac{3m^2n^2+5m^2n+4mn}{2mn},1\right)$ dan $\left(\frac{2m^2n^2+5m^2n+5mn}{2mn},2\right)$ untuk pelabelan dengan pemberian titik pusat nilai terkecil dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 2$. Sedangkan untuk pelabelan dengan pemberian titik pusat nilai terbesar berlaku $\left(\frac{7m^2n^2+m^2n+4mn}{2mn},1\right)$ dan $\left(\frac{6m^2n^2+m^2n+5mn}{2mn},2\right)$ untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$.
***Kata kunci:** pelabelan total tak-ajaib sisi, graf multistar.*

1. LATARBELAKANG

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang perkembangannya berperan dalam model-model terstruktur. Unsur-unsur pada graf dapat digunakan untuk memodelkan struktur-struktur model sebagai representasi objek [6]. Pendekatan ini pertama kali diprakarsai oleh Leonhard Euler dalam presentasinya memecahkan permasalahan Jembatan Königsberg pada tanggal 26 Agustus 1735 di Akademi Ilmu Pengetahuan St. Petersburg [12]. Permasalahan Jembatan Königsberg merupakan pertanyaan dari masyarakat kota Königsberg kepada Euler, yaitu apakah mungkin berjalan melewati tujuh jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Metode yang digunakan oleh Euler untuk menyelesaikan permasalahan Jembatan Königsberg inilah yang sekarang dikenal sebagai teori graf.

Teori graf memuat beberapa topik, salah satu yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah pelabelan graf. Dalam topik pelabelan, graf yang digunakan merupakan graf terbatas, sederhana, dan tak berarah. Topik pelabelan graf pertama kali dikaji oleh Sedlàček [10]. Kotzig dan Rosa mendefinisikan pelabelan ajaib sebagai pemetaan bijektif dari unsur graf ke himpunan bulat positif dan bobot dari unsur graf tersebut besarnya sama [13]. Selanjutnya Bodendiek dan Walther mendefinisikan konsep pelabelan tak-ajaib (a,d) sebagai suatu pelabelan sisi dengan bobot semua titiknya membentuk barisan aritmatika naik dengan suku pertama a dan beda d [3]. Kajian mengenai pelabelan total tak-ajaib titik (a,d) sudah dilakukan Baca, dkk pada graf Petersen, graf sikel ganjil, dan beberapa bentuk perluasan lainnya [2]. Muttaqien, dkk menunjukkan keberlakukan pelabelan total ajaib sisi pada graf dobel star dan graf matahari [7]. Abdussakir menunjukkan keberlakuan pelabelan total ajaib sisi kuat pada graf multistar [1]. Irawati melakukan penelitian tentang pelabelan total ajaib sisi pada graf star [5], sedangkan Chusna melakukan riset pelabelan ajaib sisi super pada graf star yang titik pusatnya terhubung dengan single hook vertex [4]. Rusmansyah menunjukkan keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi super (a,d) pada subbagian graf star [9] dan Nurainun, dkk menunjukkan keberlakukan pelabelan total tak-ajaib super pada gabungan dua graf star dan lintasan [8]. Dalam penelitian ini, peneliti ingin meneliti keberlakuan pelabelan total tak-ajaib sisi (a,d) atau (a,d)—EATL pada graf multistar.

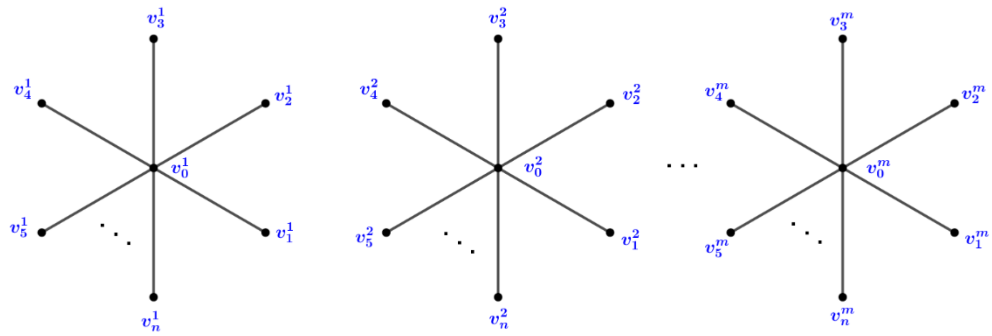
2. TINJAUAN PUSTAKA

Pelabelan pada graf merupakan pemetaan bijektif dari unsur-unsur pada graf ke himpunan bilangan asli. Ada tiga jenis pelabelan pada graf, yakni pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Perbedaan ketiganya terletak pada domain yang digunakan. Pelabelan titik merupakan pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi merupakan pelabelan dengan domain himpuan sisi, dan pelabelan total merupakan pelabelan dengan domain titik dan sisi. Dalam penelitian ini, jenis pelabelan yang digunakan adalah pelabelan total. Berikut diberikan beberapa definisi tentang pelabelan.

Definisi 1 [11]
Suatu pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3, \ldots |V| + |E|\}$ disebut pelabelan total tak-ajaib dari graf $G(V, E)$ jika bobot dari sisi $w_f = f(u) + f(uv) + f(v)$, untuk setiap $u, v \in V(G)$ dan $uv \in E(G)$.

Definisi 2 [11]
Suatu pemetaan bijektif $f: V(G) \cup E(G) \Rightarrow \{1,2,3, \ldots, |V| + |E|\}$ disebut pelabelan total tak-ajaib sisi (a, d) dari graf $G(V, E)$ jika bobot dari sisi-sisinya membentuk suatu barisan aritmetika naik dengan suku pertama a dan beda d, yaitu $W = \{w_f(uv) | uv \in E\} = \{a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (|V| - 1)d\}$.

Sebelum memulai perhitungan dasar pelabelan total tak-ajaib sisi (*edge antimagic total labeling – EATL*), terlebih dahulu diberikan definisi graf multistar yang digunakan dalam penelitian ini. Graf bintang (*star*) merupakan graf bipartite lengkap $K_{(1,n)}$ dengan n bilangan asli yang merupakan titik ujung dan satu titik pusat. Dalam penelitian ini graf multistar yang digunakan merupakan gabungan beberapa graf star yang tidak terhubung, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf multistar mS_n

Graf Multistar mS_n mempunyai himpunan titik $V(mS_n) = \{v_i^j | 0 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ dan himpunan sisi $E(mS_n) = \{v_0^j v_i^j | 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$. Akibatnya graf multistar mempunyai $mn + m$ titik dan mn sisi, dengan total banyak titik dan sisinya adalah $2mn + m$. Misalkan S_w adalah jumlah semua bobot sisi, S_v adalah jumlah semua label titik, S_e adalah jumlah semua label sisi, dan S_c adalah jumlah semua label titik pusat, maka untuk menghitung bobot sisi dilakukan dengan cara menjumlahkan total label titik, sisi, dan label titik pusatnya, yakni :

$$S_w = S_v + S_e + S_c \tag{1}$$

Pemberian label pada graf multistar dapat dilakukan dua cara. Cara yang pertama adalah memberikan nilai label terkecil pada titik pusatnya atau dengan kata lain, pelabelan dimulai dari titik pusat berlanjut ke sisi kemudian berakhir di titik ujungnya. Sedangkan cara yang kedua adalah memberikan nilai label terbesar pada titik pusatnya atau dengan kata lain, pelabelan dimulai dari titik ujung berlanjut ke sisi kemudian berakhir di titik pusatnya. Kedua cara tersebut memberikan proses pelabelan yang berbeda. Baik dari perhitungan maupun pemberian label pada unsur-unsur graf multistar. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dijelaskan kedua cara atau metode dalam pelabelan total tak ajaib sisi graf multistar. Berikut diberikan definisi pelabelan multistar terkait dengan cara yang digunakan.

Definisi 3
Bila pelabelan multistar mS_n dimulai dari titik pusat, maka himpunan label titik pusatnya adalah $c = \{1,2, \dots, m\}$, himpunan label sisinya adalah $e = \{m + 1, m + 2, \dots, m + mn\}$, dan himpunan label titik ujungnya adalah $v = \{m + mn + 1, m + mn + 2, \dots, m + 2mn\}$.

Definisi 4
Bila pelabelan multistar mS_n dimulai dari titik ujung, maka himpunan label titik ujungnya adalah $v = \{1,2, \dots, mn\}$, himpunan label sisinya adalah $e = \{mn + 1, mn + 2, \dots ,2mn\}$, dan himpunan label titik pusatnya adalah $c = \{2mn + 1,2mn + 2, \dots ,2mn + m\}$.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode penelitian pustaka (*library research*) sebagaimana terlampir pada daftar pustaka. Penelitian ini akan dibagi menjadi dua bagian, yakni perhitungan dasar untuk menentukan batas suku pertama a dan beda d dari EATL pada graf multistar mS_n. Bagian yang kedua adalah keberlakukan EATL pada graf multistar mS_n. Dalam penelitian ini graf multistar yang digunakan merupakan gabungan beberapa graf star yang tidak terhubung dan pelabelan yang digunakan adalah pelabelan total.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Jenis I : Pelabelan dengan Pemberian Titik Pusat Nilai Terkecil

Pelabelan jenis pertama ini, dimulai dengan memberikan label dari titik pusat berlanjut ke sisi kemudian berakhir di titik ujung. Sebelum memulai proses pelabelan, terlebih dahulu diberikan definisi yang akan digunakan pada pelabelan jenis ini. Berdasarkan Definisi 1, jumlah semua bobot sisi diperoleh dari menjumlahkan semua label titik, label sisi, dan $(n - 1)$ kali label titik pusat, sehingga diperoleh

$$S_w = 1 + 2 + \cdots + m(2n + 1) + (n - 1) \sum_{j=1}^{m} c_j \qquad (2)$$

Dengan S_w menyatakan jumlahan bobot sisi dan c_j adalah label titik pusat dari star j. Di lain sisi, menggunakan Definisi 2 didapat

$$\begin{aligned} S_w = &\ a + (a + d) + \cdots + (a + (mn - 1)d) \\ = &\ mn\left(a + \frac{(mn - 1)d}{2}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Dari Persamaan 2 dan 3 diperoleh

$$mn\left(a + \frac{(mn - 1)d}{2}\right) = 1 + 2 + \cdots + m(2n + 1) + (n - 1)\sum_{j=1}^{m} c_j \tag{4}$$

Sesuai dengan Definisi 3, dipilih label untuk titik pusatnya $\{1,2,3,\dots,m\}$, sehingga Persamaan 4 menjadi

$$\begin{aligned} mn\left(a + \frac{(mn - 1)d}{2}\right) = &\ \frac{(2mn + m + 1)(2mn + m)}{2} \\ &+(n - 1)\frac{m(m + 1)}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

Selanjutnya, akan diberikan hasil pengembangan peneliti tentang (a, d)—EATL pada graf multistar. Hasil yang pertama tentang batas nilai a dan d agar graf multistar memenuhi (a, d)—EATL untuk setiap $m \geq 1$ dan $n \geq 2$. Menggunakan Definisi 3 dapat dihitung bobot terkecil sisinya, yaitu $a \geq 1 + (m + 1) + (m + mn + 1) = 2m + mn + 3$. Sehingga diperoleh pertidaksamaan

$$a \geq 2mn + mn + 3 \tag{6}$$

Di lain sisi, berdasarkan Definisi 2 dapat dihitung bobot terbesar sisinya, yaitu $m + (2mn + m) + (m + mn) = 3mn + 3m$. Sehingga diperoleh pertidaksamaan

$$a + (mn - 1)d \leq 3mn + 3m \tag{7}$$

Menggunakan Pertidaksamaan 6 dan 7 untuk mencari nilai d, diperoleh

$$\begin{aligned} a + (mn-1)d &\leq 3mn + 3m \\ \Leftrightarrow \quad a &\leq 3mn + 3m - (mn-1)d \\ \Leftrightarrow \quad 2m + mn + 3 &\leq 3mn + 3m - (mn-1)d \\ \Leftrightarrow \quad d &\leq \frac{2mn+m-3}{mn-1} \approx 2 \end{aligned} \tag{8}$$

Jadi, didapat nilai $d \leq 2$ atau $d = 1,2$. Langkah selanjutnya, akan dicari nilai a berdasarkan nilai d terkait.

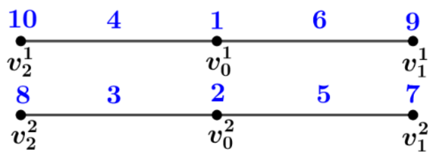
1) Untuk nilai $d = 1$

   Menggunakan Persamaan 5, diperoleh nilai $a = \frac{3m^2n^2+5m^2n+4mn}{2mn}$. Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat Pertidaksamaan 6 dan 7. Sehingga graf multistar mS_n dapat dilakukan $\left(\frac{3m^2n^2+5m^2n+4mn}{2mn}, 1\right)$ EATL untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$.

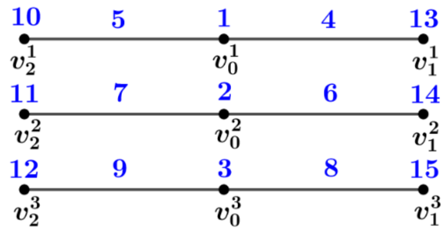
2) Untuk nilai $d = 2$

   Menggunakan Persamaan 5, diperoleh nilai $a = \frac{2m^2n^2+5m^2n+5mn}{2mn}$. Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat Pertidaksamaan 6 dan 7. Sehingga graf multistar mS_n dapat dilakukan $\left(\frac{2m^2n^2+5m^2n+5mn}{2mn}, 2\right)$ EATL untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$.

Contoh (a,d)—EATL untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$ dengan nilai $d = 1$ dan $d = 2$ berturut-turut dapat dilihat pada Gambar 2 dan Gambar 3.



Gambar 2. $(13,1) -$ EATL pada $2S_2$



Gambar 3. $(16,2) -$ EATL pada $3S_2$

Jenis II : Pelabelan dengan Pemberian Titik Pusat Nilai Terbesar

Pelabelan jenis kedua ini, dimulai dengan memberikan label dari titik ujung berlanjut ke sisi kemudian berakhir di titik pusat. Secara umum, proses perhitungan bobot total sisi untuk pelabelan jenis kedua analog dengan pelabelan jenis pertama, hanya perlu disesuaikan pemilihan label titik pusatnya sesuai dengan Definisi 4. Sehingga diperoleh persamaan bobot total sisinya

$$mn\left(a+\frac{(mn-1)d}{2}\right)=\frac{(2mn+m+1)(2mn+m)}{2}+(n-1)\frac{m(4mn+m+1)}{2} \tag{9}$$

Selanjutnya, akan diberikan hasil pengembangan peneliti tentang (a,d)—EATL pada graf multistar. Hasil yang pertama tentang batas nilai a dan d agar graf multistar memenuhi (a,d)—EATL untuk setiap $m \geq 1$ dan $n \geq 2$. Menggunakan Definisi 3 dapat dihitung bobot terkecil sisinya, yaitu $a \geq 1+(mn+1)+(2mn+1)=3mn+3$. Sehingga diperoleh pertidaksamaan

$$a \geq 3mn+3 \tag{10}$$

Di lain sisi, berdasarkan Definisi 2 dapat dihitung bobot terbesar sisinya, yaitu $mn+(2mn+m)+2mn=5mn+m$. Sehingga diperoleh pertidaksamaan

$$a+(mn-1)d \leq 5mn+m \tag{11}$$

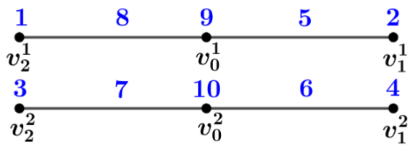
Menggunakan Pertidaksamaan 6 dan 7 untuk mencari nilai d, diperoleh

$$\begin{aligned} & & a+(mn-1)d &\leq 5mn+m \\ &\Leftrightarrow & a &\leq 5mn+m-(mn-1)d \\ &\Leftrightarrow & 3mn+3 &\leq 5mn+m-(mn-1)d \\ &\Leftrightarrow & d &\leq \frac{2mn+m-3}{mn-1} \approx 2 \end{aligned} \tag{12}$$

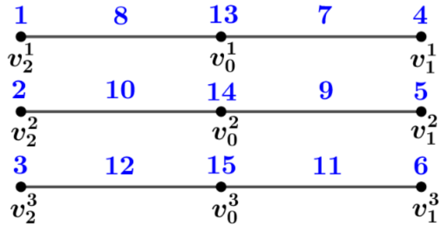
Jadi, didapat nilai $d \leq 2$ atau $d=1,2$. Langkah selanjutnya, akan dicari nilai a berdasarkan nilai d terkait.

1) Untuk nilai $d=1$
   Menggunakan Persamaan 9, diperoleh nilai $a=\frac{7m^2n^2+m^2n+4mn}{2mn}$. Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat Pertidaksamaan 10 dan 11. Sehingga graf multistar mS_n dapat dilakukan $\left(\frac{7m^2n^2+m^2n+4mn}{2mn},1\right)$ EATL untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$.
2) Untuk nilai $d=2$
   Menggunakan Persamaan 9, diperoleh nilai $a=\frac{6m^2n^2+m^2n+5mn}{2mn}$. Hasil ini tidak bertentangan dengan syarat Pertidaksamaan 10 dan 11. Sehingga graf multistar mS_n dapat dilakukan $\left(\frac{6m^2n^2+m^2n+5mn}{2mn},2\right)$ EATL untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$.

Contoh (a,d)—EATL untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$ dengan nilai $d=1$ dan $d=2$ berturut-turut dapat dilihat pada Gambar 4 dan Gambar 5.



Gambar 4. $(17,1) -$ EATL pada $2S_2$



Gambar 5. $(22,2) -$ EATL pada $3S_2$

5. KESIMPULAN

Pada graf multistar mS_n berlaku pelabelan total tak-ajaib sisi (a,d). Untuk pelabelan dengan pemberian titik pusat nilai terkecil berlaku $\left(\frac{3m^2n^2+5m^2n+4mn}{2mn},1\right)$ untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$ dan $\left(\frac{2m^2n^2+5m^2n+5mn}{2mn},2\right)$ untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$. Sedangkan untuk pelabelan dengan pemberian titik pusat nilai terbesar berlaku $\left(\frac{7m^2n^2+m^2n+4mn}{2mn},1\right)$ untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$ dan $\left(\frac{6m^2n^2+m^2n+5mn}{2mn},2\right)$ untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 2$.

REFERENSI

[1]. Abdussakir. 2010. *Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Multistar*. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

[2]. Baca, M., MacDougall, A. J., Bertault, F., Miller, M., Simanjutak, R., & Slamin. 2003. Vertex-antimagic total labelings of graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, pp. 67-83.

[3]. Bodendiek, R., & Walther, G. 1994. On the relations between certain graph labelings. *Discrete Mathematics*, pp. 9-16.

[4]. Chusna, L. F. 2011. *Super Edge Magic Labelling on Star Graph that its Center Vertex are Connected by Single Hook Vertex*. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

[5]. Irawati, D. 2013. Pelabelan Total Ajaib Sisi Pada Graf Star. *Jurnal Matematika Unand*, 2(1), 85-89.

[6]. Kusumah, S. Y. 2020. *Matematika Diskrit*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.

[7]. Muttaqien, M. A., Mulyono, & Suyitno, A. 2013. Edge Magic Total Labeling on Double Star Graph and Sun Graph. Semarang: *Unnes Journal of Mathematics*.

[8]. Nurainun, S. M., & Sudarsana, I. W. 2012. Super Edge Antimagic Total Labelling on Union of Double Star Graphs and Path. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 9(1), 16-28.

[9]. Rusmansyah, S. 2016. Pelabelan Super Sisi Tak Ajaib pada Subbagian Graf Star. *Jurnal Matematika Unand*, 5(2), 38-44.

[10]. Sedláček, J. 1963. Problem 27. Theory of graphs and its applications. *Proc. Symp. Smolenice*, pp. 163-164.

[11]. Wallis, W. D. 2001. *Magic Graphs*. Birkhauser.
[12]. Wilson, R., & Watkins, J. J. 2013. *Combinatorics: Ancient and Modern*. United Kingdom: Oxford University Press.
[13]. Yonanta, B. V., & Prasetyo, D. A. 2020. Pelabelan Total Tak-Ajaib Pada Graf Multistar. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (Sendika)*, pp. 35-39.