Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.10 No.2 (2016) Hal.18-27

DETERMINAN MATRIKS DENGAN ELEMEN BILANGAN FIBONACCI ORDER-k YANG DIGENERALISASI

Fadly Ramadhan, Thresye, Akhmad Yusuf
Program Studi Matematika Fakultas MIPA
Universitas Lambung Mangkurat
Email : fadlyramadhan04@gmail.com

ABSTRAK

Bilangan Fibonacci didefinisikan sebagai barisan bilangan yang suku-sukunya merupakan penjumlahan dua suku sebelumnya. Penelitian sebelumnya menjelaskan tentang bilangan Fibonacci yang digeneralisasi hingga order-k. Selanjutnya bilangan Fibonacci tersebut dibentuk dalam matriks berukuran $k \times k$ yang akan ditentukan nilai determinannya. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk barisan Fibonacci order-k yang digeneralisasi, kemudian mengetahui bentuk matriks persegi yang elemennya berupa bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisasi dan membuktikan teorema untuk menentukan determinan dari matriks persegi yang elemennya berupa bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisasi. Hasil dari penelitian ini adalah diperoleh bentuk barisan dari bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisasi, diperoleh bentuk matriks persegi yang elemennya berupa bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisasi dan diperoleh determinan dengan 4 kondisi yang berbeda.

Kata Kunci : Bilangan Fibonacci, bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisasi, matriks.

ABTRACT

Fibonacci numbers are defined as a sequence of numbers that of his family is the sum of the previous two terms. Previous research describes the generalized order-k Fibonacci numbers. Furthermore, Fibonacci numbers are formed in a matrix of size k × k to be determined the value of the determinant. The purpose of this study was to determine the shape ranks of the generalized order-k Fibonacci numbers, then knowing the form of a square matrix whose elements form Fibonacci numbers of order-k generalized and proving theorems to determine the determinant of a square matrix whose elements form of the generalized order-k Fibonacci numbers. The results of this study are obtained form the sequence of the generalized order-k Fibonacci numbers, obtained form a square matrix whose elements form of the generalized order-k Fibonacci numbers and the determinant obtained with 4 different conditions.

Keywords: Fibonacci numbers, the generalized order-k Fibonacci numbers, matrix.

1. PENDAHULUAN

Karaduman [2] menjelaskan tentang bilangan Fibonacci yang digeneralisasi hingga order-k. Dalam penelitian tersebut, bilangan Fibonacci yang digeneralisasi hingga order-k hanya ditunjukaan untuk kondisi $n > 0$, dengan syarat batas yang telah ditentukan. Karaduman [3] mengembangkan penelitiannya mengenai bilangan Fibonacci yang digeneralisasi hingga order-k. Dalam penelitian ini, bilangan Fibonacci yang digeneralisasi hingga order-k tidak hanya ditunjukkan untuk kondisi $n > 0$, dengan syarat batas yang telah ditentukan. Selanjutnya bilangan Fibonacci tersebut dibentuk dalam matriks berukuran $k \times k$ yang akan ditentukan nilai determinannya.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Berikut diberikan definisi matriks :

Definisi 2.1 [1]

Sebuah matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

2.2 Determinan Matriks

Berikut diberikan definisi dari determinan matriks, dan beberapa teorema mengenai determinan.

Definisi 2.2.1 [1]

Misalkan A adalah matriks persegi. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan didefinisikan $det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah $det(A)$ dinamakan determinan A.

Teorema 2.2.2

Anggap A adalah suatu matriks $n \times n$.

a) *Jika B adalah matriks yang dihasilkan ketika suatu baris tunggal atau kolom tunggal dari A dikalikan dengan suatu skalar k, maka $det(B) = kdet(A)$.*
b) *Jika B adalah matriks yang dihasilkan ketika dua baris atau dua kolom dari A dipertukarkan, maka $det(B) = -det(A)$.*
c) *Jika B adalah matriks yang dihasilkan ketika suatu penggandaan dari suatu baris A ditambahkan pada baris lainnya atau jika suatu penggandaan suatu kolom ditambahkan pada kolom lainnya, maka $det(B) = det(A)$*

2.3 Bilangan Fibonacci Order- k yang Digeneralisasi

Karaduman [2] mendefinisikan k barisan dari bilangan Fibonacci order- k yang digeneralisasi dengan bentuk

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i \quad untuk\ n > 0\ dan\ 1 \le i \le k \qquad \dots(1)$$

Bentuk g_n^i diatas hanya berlaku untuk $n > 0$, sedangkan untuk $n \le 0$ dapat menggunakan syarat batas, berikut:

$$g_n^i = \begin{cases} 1\,; & i = 1 - n \\ 0\,; & untuk\ yang\ lain \end{cases} \qquad untuk\ 1 - k \le n \le 0$$

dimana c_j, $1 \le j \le k$ adalah koefisien konstan dengan i, n bilangan bulat dan g_n^i merupakan bentuk ke-n dari barisan ke-i.

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Adapun prosedur pada penelitian ini adalah mengumpulkan dan mengkaji bahan-bahan yang berkaitan dengan matriks, determinan, bilangan Fibonacci, dan barisan dari bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisasi. Kemudian memahami bentuk barisan dari bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisasi. Selanjutnya, memahami bentuk matriks persegi yang elemennya berupa barisan dari bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisasi. Kemudian membuktikan teorema untuk menentukan determinan dari matriks persegi yang elemennya berupa bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisassi dan membuat kesimpulan penelitian.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Karaduman [2] mendefinisikan bentuk matrik G_n berukuran $k \times k$ dengan elemennya berupa bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisasi,sebagai berikut

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & g_n^3 & \cdots & g_n^{k-1} & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & g_{n-1}^3 & \cdots & g_{n-1}^{k-1} & g_{n-1}^k \\ g_{n-2}^1 & g_{n-2}^2 & g_{n-2}^3 & \cdots & g_{n-2}^{k-1} & g_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-k+2}^1 & g_{n-k+2}^2 & g_{n-k+2}^3 & \cdots & g_{n-k+2}^{k-1} & g_{n-k+2}^k \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & g_{n-k+1}^3 & \cdots & g_{n-k+1}^{k-1} & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

$\ldots (2)$

Bentuk matriks G_n pada persamaan (2) dapat disederhanakan ke dalam bentuk matriks yang berukuran $k \times 1$, yaitu

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^i \\ g_{n-1}^i \\ g_{n-2}^i \\ \vdots \\ g_{n-k+2}^i \\ g_{n-k+1}^i \end{bmatrix} \text{untuk } 1 \leq i \leq k$$

Berdasarkan bentuk matriks G_n pada persamaan (2) dapat dibentuk suatu matriks yang lebih besar dari G_n yaitu matriks G_{n+1}, yang merupakan perkalian antara matriks G_n dengan matriks A sebagai berikut

$$G_{n+1} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_n^i \\ g_{n-1}^i \\ g_{n-2}^i \\ \vdots \\ g_{n-k+2}^i \\ g_{n-k+1}^i \end{bmatrix}$$

$\ldots (3)$

$$\text{dengan } A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan (3) dapat digeneralisasi ke dalam persamaan matriks dengan bentuk

$$G_{n+1} = AG_n \qquad \ldots (4)$$

Dengan melakukan ekspansi pada persamaan (4) diperoleh

$$G_n = A^n \qquad \dots(5)$$

Teorema 4.1

Jika $c_j = 1$ dan G_n berbentuk

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & g_n^3 & \cdots & g_n^{k-1} & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & g_{n-1}^3 & \cdots & g_{n-1}^{k-1} & g_{n-1}^k \\ g_{n-2}^1 & g_{n-2}^2 & g_{n-2}^3 & \cdots & g_{n-2}^{k-1} & g_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-k+2}^1 & g_{n-k+2}^2 & g_{n-k+2}^3 & \cdots & g_{n-k+2}^{k-1} & g_{n-k+2}^k \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & g_{n-k+1}^3 & \cdots & g_{n-k+1}^{k-1} & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

Maka

$$det\ G_n = \begin{cases} (-1)^n & ; jika\ \ k\ genap \\ 1 & ; jika\ k\ ganjil \end{cases}$$

dengan

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i \quad untuk\ n > 0\ dan\ 1 \le i \le k$$

dan syarat batas

$$g_n^i = \begin{cases} 1\ ; & i = 1 - n \\ \\ 0\ ; & untuk\ yang\ lain \end{cases} \qquad untuk\ 1 - k \le n \le 0.$$

Bukti:

Diketahui $G_n = A^n$ pada persamaan (5), maka untuk menentukan determinan dari matriks G_n maka cukup ditunjukkan dengan menentukan determinan dari matriks A^n. Diketahui matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan determinan dari matriks A,

$$|A| = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \end{vmatrix}$$

$det\ (A) = (-1)^{k-1} \times \mathrm{c_k}$

Diketahui bahwa $c_j = 1$ maka $det\ (A) = (-1)^{k-1}$

Sedemikian sehingga

$det\ G_n = (detA)^n = (-1)^n$ untuk k genap

$det\ G_n = (detA)^n = 1$ untuk k ganjil

sehingga terbukti bahwa

ISSN: 1978-4422
Vol.10 No.2 (2016) Hal.18-27

$$det\ G_n = \begin{cases} (-1)^n & ; jika\ \ k\ genap \\ 1 & ; jika\ k\ ganjil \end{cases}$$

■

Selanjutnnya berdasarkan persamaan (1) jika kondisi $n > 0$ diabaikan dimisalkan sebagai g_m^i, maka k barisan dari bilangan Fibonacci order- k yang digeneralisasi menjadi

$$g_m^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{m-j}^i \quad untuk\ \ 1 \leq ik \qquad \dots (6)$$

dengan syarat batas

$$g_m^i = \begin{cases} 1\ ; & i = 1 - m \\ & \\ 0\ ; & untuk\ yang\ lain \end{cases} \qquad untuk\ 1 - k \leq m \leq 0$$

dengan syarat awal $g_0^1 = 1, g_1^1 = 1$, dan i, m merupakan bilangan bulat. Bentuk g_m^i pada persamaan (6) berlaku jika $i \neq 1 - m$. Karaduman [3]
berdasarkan bentuk matriks G_n pada persamaan (2), maka bentuk matriks G_m memilik bentuk yang serupa dengan matriks G_n, sebagai berikut

$$G_m = \begin{bmatrix} g_m^1 & g_m^2 & g_m^3 & \cdots & g_m^{k-1} & g_m^k \\ g_{m-1}^1 & g_{m-1}^2 & g_{m-1}^3 & \cdots & g_{m-1}^{k-1} & g_{m-1}^k \\ g_{m-2}^1 & g_{m-2}^2 & g_{m-2}^3 & \cdots & g_{m-2}^{k-1} & g_{m-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{m-k+2}^1 & g_{m-k+2}^2 & g_{m-k+2}^3 & \cdots & g_{m-k+2}^{k-1} & g_{m-k+2}^k \\ g_{m-k+1}^1 & g_{m-k+1}^2 & g_{m-k+1}^3 & \cdots & g_{m-k+1}^{k-1} & g_{m-k+1}^k \end{bmatrix}$$

... (7)

Bentuk matriks G_m pada persamaan (7) dapat disederhanakan ke dalam bentuk matriks yang berukuran $k \times 1$, yaitu

$$G_m = \begin{bmatrix} g_m^i \\ g_{m-1}^i \\ g_{m-2}^i \\ \vdots \\ g_{m-k+2}^i \\ g_{m-k+1}^i \end{bmatrix} \text{untuk } \ 1 \leq i \leq k$$

... (8)

Berdasarkan bentuk matriks G_m pada persamaan (8) dapat dibentuk suatu matriks yang lebih besar dari G_m yaitu matriks G_{m+1},

$$G_{m+1} = \begin{bmatrix} G_{m+1} \\ g_m^i \\ g_{m-1}^i \\ \vdots \\ g_{m-k+3}^i \\ g_{m-k+2}^i \end{bmatrix} \text{untuk } \ 1 \leq i \leq k$$

... (9)

Matriks G_{m+1} pada persamaan (9) dapat dituliskan sebagai perkalian matriks A dengan matriks G_m pada persamaan (8)

$$G_{m+1} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_m^i \\ g_{m-1}^i \\ g_{m-2}^i \\ \vdots \\ g_{m-k+2}^i \\ g_{m-k+1}^i \end{bmatrix} \text{untuk } 1 \leq i \leq k \qquad \ldots(10)$$

$$\text{dengan } A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan (10) dapat digeneralisasi ke dalam persamaan matriks dengan bentuk

$$G_{m+1} = AG_m \qquad \ldots(11)$$

Dengan melakukan ekspansi pada persamaan (11) diperoleh

$$G_m = A^{m-1}G_1 \qquad \ldots(12)$$

Teorema 4.2
Jika $c_j = 1$ dan G_m berbentuk

$$G_m = \begin{bmatrix} g_m^1 & g_m^2 & g_m^3 & \cdots & g_m^{k-1} & g_m^k \\ g_{m-1}^1 & g_{m-1}^2 & g_{m-1}^3 & \cdots & g_{m-1}^{k-1} & g_{m-1}^k \\ g_{m-2}^1 & g_{m-2}^2 & g_{m-2}^3 & \cdots & g_{m-2}^{k-1} & g_{m-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{m-k+2}^1 & g_{m-k+2}^2 & g_{m-k+2}^3 & \cdots & g_{m-k+2}^{k-1} & g_{m-k+2}^k \\ g_{m-k+1}^1 & g_{m-k+1}^2 & g_{m-k+1}^3 & \cdots & g_{m-k+1}^{k-1} & g_{m-k+1}^k \end{bmatrix}$$

Maka

$$det\ G_m = \begin{cases} (-1)^m & ; jika\ \ k\ genap \\ 1 & ; jika\ k\ ganjil \end{cases}$$

Bukti:

Diketahui $G_m = A^{m-1}G_1$ pada persamaan (12), untuk menentukan determinan dari matriks G_m maka cukup ditunjukkan dengan menentukan determinan dari matriks A^{m-1} dan determinan dari matriks G_1.

Berdasarkan bukti dari teorema (2.1) diketahui bahwa $det\ (A) = (-1)^{k-1} \times \mathrm{c_k}$, sehinggga $det\ (A^{m-1}) = (det\ (A))^{m-1} = ((-1)^{k-1} \times \mathrm{c_k})^{m-1}$.

Selanjutnya akan dibuktikan determinan dari matriks G_1.

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 & \cdots & g_1^{k-1} & g_1^k \\ g_0^1 & g_0^2 & g_0^3 & \cdots & g_0^{k-1} & g_0^k \\ g_{-1}^1 & g_{-1}^2 & g_{-1}^3 & \cdots & g_{-1}^{k-1} & g_{-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{3-k}^1 & g_{3-k}^2 & g_{3-k}^3 & \cdots & g_{3-k}^{k-1} & g_{3-k}^k \\ g_{2-k}^1 & g_{2-k}^2 & g_{2-k}^3 & \cdots & g_{2-k}^{k-1} & g_{2-k}^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 & \cdots & g_1^{k-1} & g_1^k \\ 1 & g_0^2 & g_0^3 & \cdots & g_0^{k-1} & g_0^k \\ 0 & 1 & g_{-1}^3 & \cdots & g_{-1}^{k-1} & g_{-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{3-k}^{k-1} & g_{3-k}^k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & g_{2-k}^k \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks G_1 adalah sebagai berikut

$$|G_1| = \begin{vmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 & \cdots & g_1^{k-1} & g_1^k \\ 1 & g_0^2 & g_0^3 & \cdots & g_0^{k-1} & g_0^k \\ 0 & 1 & g_{-1}^3 & \cdots & g_{-1}^{k-1} & g_{-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{3-k}^{k-1} & g_{3-k}^k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & g_{2-k}^k \end{vmatrix}$$

$det(G_1) = (-1)^{k-1} c_k$

Diketahui bahwa $c_j = 1$ maka

$(det\ (A))^{m-1} = ((-1)^{k-1})^{m-1}$ dan $det(G_1) = (-1)^{k-1}$

sehingga terbukti bahwa

$$det\ G_m = \begin{cases} (-1)^m & ; jika\ \ k\ genap \\ 1 & ; jika\ k\ ganjil \end{cases}$$

■

Teorema 4.3

Jika G_n berbentuk

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & g_n^3 & \cdots & g_n^{k-1} & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & g_{n-1}^3 & \cdots & g_{n-1}^{k-1} & g_{n-1}^k \\ g_{n-2}^1 & g_{n-2}^2 & g_{n-2}^3 & \cdots & g_{n-2}^{k-1} & g_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-k+2}^1 & g_{n-k+2}^2 & g_{n-k+2}^3 & \cdots & g_{n-k+2}^{k-1} & g_{n-k+2}^k \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & g_{n-k+1}^3 & \cdots & g_{n-k+1}^{k-1} & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

maka

$$det\ G_n = \begin{cases} (-1)^n\ (c_k)^n & ; jika\ \ k\ genap \\ (c_k)^n & ; jika\ k\ ganjil \end{cases}$$

dimana

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i \quad untuk\ n > 0\ dan\ 1 \leq i \leq k$$

dengan syarat batas

$$g_n^i = \begin{cases} 1\ ; & i = 1 - n \\ \\ 0\ ;\ untuk\ yang\ lain & \end{cases} \qquad untuk\ 1 - k \leq n \leq 0.$$

Bukti:

Diketahui $G_n = A^n$ pada persamaan (5), untuk menentukan determinan dari matriks G_n maka cukup ditunjukkan dengan menentukan determinan dari matriks A^n. Diketahui matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan determinan dari matriks A,

$$|A| = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \end{vmatrix}$$

$det\ (A) = (-1)^{k-1} \times \mathrm{c_k}$

Sehingga,

$det\ G_n = (detA)^n = (-1)^n (c_k)^n$ untuk k genap

$det\ G_n = (detA)^n = (c_k)^n$ untuk k ganjil

sehingga terbukti bahwa

$$det\ G_n = \begin{cases} (-1)^n\, (c_k)^n & ; jika\ \ k\ genap \\ (c_k)^n & ; jika\ k\ ganjil \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.4

Jika G_m berbentuk

$$G_m = \begin{bmatrix} g_m^1 & g_m^2 & g_m^3 & \cdots & g_m^{k-1} & g_m^k \\ g_{m-1}^1 & g_{m-1}^2 & g_{m-1}^3 & \cdots & g_{m-1}^{k-1} & g_{m-1}^k \\ g_{m-2}^1 & g_{m-2}^2 & g_{m-2}^3 & \cdots & g_{m-2}^{k-1} & g_{m-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{m-k+2}^1 & g_{m-k+2}^2 & g_{m-k+2}^3 & \cdots & g_{m-k+2}^{k-1} & g_{m-k+2}^k \\ g_{m-k+1}^1 & g_{m-k+1}^2 & g_{m-k+1}^3 & \cdots & g_{m-k+1}^{k-1} & g_{m-k+1}^k \end{bmatrix}$$

Maka

$$det\ G_m = \begin{cases} (-1)^m (c_k)^m & ; jika\ \ k\ genap \\ (c_k)^m & ; jika\ k\ ganjil \end{cases}$$

Bukti:

Diketahui $G_m = A^{m-1}G_1$ pada persamaan (12), untuk menentukan determinan dari matriks G_m maka cukup ditunjukkan dengan menentukan determinan dari matriks A^{m-1} dan determinan dari matriks G_1.

Berdasarkan bukti dari teorema (2.1) diketahui bahwa $det\ (A) = (-1)^{k-1} \times \mathrm{c_k}$, sehinggga $det\ (A^{m-1}) = (det\ (A))^{m-1} = ((-1)^{k-1} \times \mathrm{c_k})^{m-1}$.

Selanjutnya akan dibuktikan determinan dari matriks G_1.

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 & \cdots & g_1^{k-1} & g_1^k \\ g_0^1 & g_0^2 & g_0^3 & \cdots & g_0^{k-1} & g_0^k \\ g_{-1}^1 & g_{-1}^2 & g_{-1}^3 & \cdots & g_{-1}^{k-1} & g_{-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{3-k}^1 & g_{3-k}^2 & g_{3-k}^3 & \cdots & g_{3-k}^{k-1} & g_{3-k}^k \\ g_{2-k}^1 & g_{2-k}^2 & g_{2-k}^3 & \cdots & g_{2-k}^{k-1} & g_{2-k}^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 & \cdots & g_1^{k-1} & g_1^k \\ 1 & g_0^2 & g_0^3 & \cdots & g_0^{k-1} & g_0^k \\ 0 & 1 & g_{-1}^3 & \cdots & g_{-1}^{k-1} & g_{-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{3-k}^{k-1} & g_{3-k}^k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & g_{2-k}^k \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks G_1 adalah sebagai berikut

$$|G_1| = \begin{vmatrix} g_1^1 & g_1^2 & g_1^3 & \cdots & g_1^{k-1} & g_1^k \\ 1 & g_0^2 & g_0^3 & \cdots & g_0^{k-1} & g_0^k \\ 0 & 1 & g_{-1}^3 & \cdots & g_{-1}^{k-1} & g_{-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{3-k}^{k-1} & g_{3-k}^k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & g_{2-k}^k \end{vmatrix}$$

$det(G_1) = (-1)^{k-1} c_k$

Karena diketahui $G_m = A^{m-1}G_1$, maka

$det(G_m) = ((-1)^{k-1} \times c_k)^{m-1}((-1)^{k-1} \times c_k)$

$det(G_m) = ((-1)^{k-1} \times c_k)^m$

$det(G_m) = ((-1)^{k-1})^m \times (c_k)^m$

sehingga terbukti bahwa

$$det\ G_m = \begin{cases} (-1)^m (c_k)^m & ; jika\ \ k\ genap \\ (c_k)^m & ; jika\ k\ ganjil \end{cases} \qquad \blacksquare$$

5. KESIMPULAN

Kesimpulan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bentuk barisan dari bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisasi adalah
$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i \quad untuk\ n > 0\ dan\ 1 \le i \le k$$
dengan syarat batas
$$g_n^i = \begin{cases} 1\,; & i = 1-n \\ 0\,; & untuk\ yang\ lain \end{cases} \qquad untuk\ 1-k \le n \le 0$$
dimana c_j, $1 \le j \le k$ adalah koefisien konstan dengan i, n bilangan bulat dan g_n^i merupakan bentuk ke-n dari barisan ke-i .
2. Bentuk matriks persegi yang elemennya berupa bilangan Fibonacci order-k yang digeneralisasi adalah
$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & g_n^3 & \cdots & g_n^{k-1} & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & g_{n-1}^3 & \cdots & g_{n-1}^{k-1} & g_{n-1}^k \\ g_{n-2}^1 & g_{n-2}^2 & g_{n-2}^3 & \cdots & g_{n-2}^{k-1} & g_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-k+2}^1 & g_{n-k+2}^2 & g_{n-k+2}^3 & \cdots & g_{n-k+2}^{k-1} & g_{n-k+2}^k \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & g_{n-k+1}^3 & \cdots & g_{n-k+1}^{k-1} & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$
3. Determinan yang ditentukan dari 4 teorema dalam penelitian ini dengan beberapa kasus sebagai berikut
   a. Untuk matriks G_n dengan $c_j = 1$ diperoleh
   $$det\ G_n = \begin{cases} (-1)^n & ; jika\ \ k\ genap \\ 1 & ; jika\ k\ ganjil \end{cases}$$
   b. Untuk matriks G_m dengan $c_j = 1$ diperoleh
   $$det\ G_m = \begin{cases} (-1)^m & ; jika\ \ k\ genap \\ 1 & ; jika\ k\ ganjil \end{cases}$$
   c. Untuk matriks G_n dengan $c_j \neq 1$ diperoleh
   $$det\ G_n = \begin{cases} (-1)^n\,(c_k)^n & ; jika\ \ k\ genap \\ (c_k)^n & ; jika\ k\ ganjil \end{cases}$$
   d. Untuk matriks G_m dengan $c_j \neq 1$ diperoleh
   $$det\ G_m = \begin{cases} (-1)^m (c_k)^m & ; jika\ \ k\ genap \\ (c_k)^m & ; jika\ k\ ganjil \end{cases}$$

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linier*. Edisi 7 Jilid 1. Interaksara, Batam.

[2] Karaduman, Erdal. 2004. *An Aplication of Fibonacci Numbers in Matrices.* Applied Mathematics and Computation. 147: 903-908.

[3] Karaduman, Erdal. 2005. *On Determinants of Matrices With General Fibonacci Numbers Entries.* Applied Mathematics and Computation. 167: 670-676.