Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.10 No.2 (2016) Hal. 28-37

SOLUSI DARI PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINIER ORDE 2 DALAM BENTUK POLINOMIAL TAYLOR

Herlyn Basrina, Yuni Yulida, Thresye
Program Studi Matematika Fakultas MIPA
Universitas Lambung Mangkurat
Email : herlynbasrinaa@gmail.com

ABSTRAK

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang hanya mengandung turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. Persamaan diferensial biasa dapat dikatakan linier jika tidak ada perkalian antara variabel-variabel tak bebas dan turunannya. Solusi persamaan diferensial dapat berupa solusi pendekatan. Salah satu metode untuk menentukan solusi pendekatan dari persamaan diferensial linier adalah metode Taylor-Matrix. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial biasa linier orde 2 dalam bentuk polinomial Taylor. Penelitian ini dilakukan dengan cara studi literatur dari berbagai sumber, baik buku, artikel maupun jurnal. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa solusi dari persamaan diferensial biasa linier orde 2 berbentuk polinomial Taylor. Solusi tersebut diperoleh dengan mengasumsikan setiap fungsi pada persamaan diferensial biasa linier orde 2 dapat dinyatakan dalam bentuk polinomial Taylor, kemudian persamaan diferensial tersebut berserta kondisi yang diberikan diubah dalam bentuk matriks. Setelah itu matriks tersebut dibentuk menjadi matriks diperbesar dan diselesaikan.

Kata kunci : *Persamaan Diferensial Biasa Linier, Polinomial Taylor.*

ABSTRACT

Ordinary differential equations (ODE) is a differential equation that contains only ordinary derivatives of one or more dependent variables to one independent variable. Ordinary differential equations can be said to be linear if there is no multiplication between dependent variables and its derivatives. The solution of differential equation can be an approach solution. One of the methods for determine the approach solution of linear differential equations is the method of Taylor-Matrix. The purpose of the research is to determine the solutions of the second-order linear ordinary differential equations in the form of a Taylor polynomial. This research is conducted by literature study from any related source, books and some journal. The result of this research show that solutions of the second-order linear ordinary differential equations shaped of a Taylor polynomial. The solution is obtained by assume each function of the second-order linear ordinary differential equations can be expressed in the form of Taylor polynomials, then the differential equations and the given conditions transformed in the form of a matrix. After that, this matrix be formed into an augmented matrix and be solved.

Keywords : *Linear ordinary differential equations, Taylor polynomials.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang hanya mengandung turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. Persamaan diferensial biasa dapat dikatakan linier jika tidak ada perkalian antara variabel-variabel tak bebas dan turunannya. Persamaan diferensial linier ditinjau dari koefisien ada 2, yaitu koefisien fungsi konstan dan koefisien fungsi dalam variabel bebas. Salah satu contoh persamaan diferensial linier dengan koefisien fungsi dalam variabel bebas adalah persamaan Cauchy Euler. Persamaan Cauchy Euler bentuk koefisien fungsinya beraturan dan ditransformasi menjadi persamaan diferensial linier koefisien konstan sehingga solusi eksak mudah ditentukan. Disisi lain, Jika persamaan diferensial linier dengan koefisien fungsi dalam variabel bebas yang bentuk koefisien fungsinya lebih umum tidak bisa ditransformasi. Salah satu solusinya dapat ditentukan melalui metode numerik.

Menurut Munir [8] metode numerik merupakan metode yang menghasilkan solusi hampiran (*approximation*) atau solusi pendekatan. Metode Taylor-Matrix adalah salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier, dengan solusi yang dihasilkan berupa solusi pendekatan. Pada dasarnya solusi pendekatan pada metode ini berbentuk deret Taylor. Dalam menentukan koefisien deret Taylor yang belum diketahui digunakan hubungan rekursif dari koefisien deret Taylor yang ditransformasi ke dalam bentuk matriks, kemudian dibentuk matriks yang diperbesar. Solusi dari persamaan diferensial linier diperoleh dengan menyelesaikan matriks yang diperbesar tersebut, sebagaimana yang dinyatakan dalam C. Kesan [5].

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Deret Taylor

Definisi 2.1.1 [8]
Andaikan f dan semua turunannya f', f'', f''', …, kontinu di dalam selang [a,b]. Misalkan $x_0 \in [a,b]$, maka untuk nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x \in [a,b]$, f(x) dapat diperluas ke dalam deret Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^m}{m!}f^{(m)}(x_0) + \cdots \qquad \dots(1)$$

2.2 Polinomial Taylor

Menurut James [9] jumlahan parsial ke-*n* dari deret (2.2) disebut sebagai polinomial Taylor berderajat ke-*n* dari f di x_0 yang dinotasikan sebagai $T_n(x)$ adalah:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad \dots(2) \end{aligned}$$

2.3 Matriks

Definisi 2.3.1 [7]
Matriks ialah suatu kumpulan angka-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjangnya dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris.

Berikut diberikan beberapa jenis matriks:

2.3.1 Matriks Baris dan Kolom

Menurut Anton [1] sebuah matriks dengan hanya satu kolom disebut *matriks kolom* dan sebuah matriks dengan hanya satu baris disebut *matriks baris*.

2.3.2 Matriks Persegi

Matriks persegi (*square matriks*) ialah suatu matriks dimana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom ($m = n$). Apabila $m = n$, maka matriks $\boldsymbol{A}$ disebut *square matriks* orde *n.* Sering disebut matriks kuadrat atau matriks jajar genjang [7].

2.4 Operasi Matriks

Definisi 2.4.1 [1]
Jika $\boldsymbol{A}$ *dan* $\boldsymbol{B}$ *adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah* $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ *adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota* $\boldsymbol{A}$ *dengan anggota-anggota* $\boldsymbol{B}$ *yang berpadanan, dan selisih* $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ *adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota* $\boldsymbol{A}$ *dengan anggota-anggota* $\boldsymbol{B}$ *yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak bisa ditambahkan atau dikurangkan.*

Definisi 2.4.2 [1]
Jika $\boldsymbol{A}$ *adalh sebarang matriks dan c adalah sebarang skalar, maka hasil kali,* $c\boldsymbol{A}$ *adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota* $\boldsymbol{A}$ *dengan* c.

Definisi 2.4.3 [1]
Jika $\boldsymbol{A}$ *sebuah matriks* $m \times r$ *dan* $\boldsymbol{B}$ *adalah sebuah matriks* $r \times n$*, maka hasil kali* $\boldsymbol{AB}$ *adalah matriks* $m \times n$ *yang anggota-anggotanya didefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari anggota dalam baris I dan kolom j dari* $\boldsymbol{AB}$*, pilih baris I dari matriks* $\boldsymbol{A}$ *dan kolom j dari matriks* $\boldsymbol{B}$*. Kalikan anggota-anggotanya yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya.*

2.5 Sistem Persamaan Linier

Sebarang sistem persamaan linear m dalam n peubah bisa ditulis sebagai

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad \ldots (3)$$

sistem persamaan (3) dapat dituliskan sebagai persamaan matriks

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \quad \ldots (4)$$

dengan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks koefisien, $\boldsymbol{x}$ matriks peubah, dan $\boldsymbol{b}$ matriks konstanta.

Matriks (4) bisa disingkat dengan menggandengkan $\boldsymbol{b}$ ke $\boldsymbol{A}$ sebagai kolom terakhir

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

ini disebut matriks diperbesar *(augment matrix)* atau matriks yang diperbanyak untuk sistem tersebut [1].

2.6 Eliminasi Gaussian dan Eliminasi Gauss-Jordan

Mereduksi suatu matriks menjadi bentuk baris-eselon disebut eliminasi Gaussian. Mereduksi suatu matriks menjadi bentuk baris-eselon tereduksi disebut eliminasi Gauss-Jordan [1].

2.7 Tranpose Suatu Matriks

Definisi 2.7.1 [1]

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebarang matriks $m \times n$, maka transpose $\boldsymbol{A}$ dinyatakan dengan $\boldsymbol{A^T}$, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapat dengan mempertukarkan baris dan kolom dari $\boldsymbol{A}$; yaitu kolom pertama dari $\boldsymbol{A^T}$ adalah baris pertama dari $\boldsymbol{A}$, kolom kedua dari $\boldsymbol{A^T}$ adalah baris kedua dari $\boldsymbol{A}$, dan seterusnya.

2.8 Matriks Identitas

Definisi 2.8.1 [6]

Matriks identitas adalah matriks $\boldsymbol{I}= (\delta_{ij})$ berorde $n \times n$, dimana

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & jika\ i = j \\ 0 & jika\ i \neq j \end{cases}$$

$\boldsymbol{I}$ sebagai matriks $n \times n$ dengan bilangan-bilangan 1 pada diagonal utamanya dan 0 selain itu, maka $\boldsymbol{I}$ memenuhi

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$$

dengan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks persegi.

2.9 Determinan Matriks

Definisi 2.9.1 [6]

Determinan dari suatu matriks $\boldsymbol{A}$ berorde n x n, dinyatakan sebagai det(A), adalah suatu skalar yang diasosiasikan dengan matriks A dan didefinisikan secara induktif sebagai:

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & jika\ n = 1 \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & jika\ n > 1 \end{cases} \quad ...(5)$$

dimana

$$A_{11} = (-1)^{1+j} \det(M_{ij}) \qquad j = 1, 2, \dots, n \quad ...(6)$$

Adalah kofaktor-kofaktor yang diasosiasikan dengan entri-entri dalam baris pertama dari $\boldsymbol{A}$.

2.10 Invers Suatu Matriks

Definisi 2.10.1 [1]

Jika A adalah sebuh matriks bujur sangkar, dan jika sebuah matriks B yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$, maka $\boldsymbol{A}$ disebut bisa dibalik dan $\boldsymbol{B}$ disebut invers $\boldsymbol{A}$.

Jika *A* bisa dibalik, maka inversnya akan dinyatakan dengan simbol $\boldsymbol{A^{-1}}$. Jadi,

$$\boldsymbol{AA^{-1}} = \boldsymbol{I} \qquad \text{dan} \qquad \boldsymbol{A^{-1}A} = \boldsymbol{I}$$

Teorema 2.10.2 [1]
Jika $\boldsymbol{A}$ *dalah suatu matriks* $n \times n$ *yang bisa dibalik, maka untuk setiap matriks* $\boldsymbol{b}, n \times 1$, *sistem persamaan* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *tepat mempunyai satu penyelesaian, yaitu,* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A^{-1}b}$.

Teorema 2.10.3 [1]
Suatu matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A}$ *dapat dibalik jika dan hanya jika* $det(A) \neq 0$.

2.11 Pangkat Suatu Matriks

Definisi 2.11.1 (Anton, 2000)
Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka didefinisikan pangkat bulat tak-negatif dari $\boldsymbol{A}$ *sebagai*

$$\boldsymbol{A^0} = \boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{A^n} = \underbrace{\boldsymbol{A\,A \dots A}}_{n \text{ faktor}} \quad (n > 0)$$

Lebih jauh, jika $\boldsymbol{A}$ *bisa dibalik, maka didefinisikan pangkat bulat negatif sebagai*

$$(\boldsymbol{A^{-1}})^n = \underbrace{\boldsymbol{A^{-1}\,A^{-1} \dots A^{-1}}}_{n \text{ faktor}}$$

2.12 Persamaan Diferensial

Definisi 2.12.1 [10]
Persamaan yang mengandung turunan satu atau lebih variabel tak bebas, terhadap satu atau lebih variabel bebas, disebut persamaan diferensial (PD).

Definisi 2.12.2 [2]
Tingkat (orde) dari persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan yang termuat dalam persamaan diferensial.

Definisi 2.12.3 [2]
Derajat (degree) dari persamaan diferensial adalah pangkat dari turunan tingkat tertinggi yang termuat dalam persamaan diferensial.

2.13 Persamaan Diferensial Biasa

Definisi 2.13.1 [4]
Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah suatu persaman yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad \dots(7)$$

dimana $y, y', \dots, y^{(n)}$ *semua ditentukan nilainya oleh x.*

2.14 Persamaan Diferensial Linier

Definisi 2.14.1 [3]
Persamaan diferensial biasa orde n adalah linier jika dapat ditulis dalam bentuk

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (a_0(x) \neq 0) \qquad \dots(8)$$

fungsi $a_0(x)$, $a_1(x), \dots, a_n(x)$ *merupakan koefisien-koefisien dari persamaan diferensial, dan* $f(x)$ *disebut suku nonhomogen. Jika koefisien fungsinya konstan,* *persamaan diferensial disebut mempunyai koefisien konstan. Selanjutnya, persamaan diferensial dikatakan homogen jika* $f(x) = 0$ *dan nonhomogen jika* $f(x) \neq 0$. *Persamaan diferensial biasa yang tidak dapat ditulis dalam bentuk persamaan* (2.11) *disebut persamaan diferensial biasa nonlinier.*

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Adapun prosedur pada menentukan solusi persamaan diferensial biasa linier orde 2 yang berbentuk polinomial Taylor adalah menentukan hubungan rekursif dari koefisien deret Taylor, kemudian hubungan rekursif dari koefisien deret Taylor dibentuk dalam hubungan matriks dan membentuk matriks yang diperbesar, lalu menentukan koefisien Taylor dengan menyelesaikan matriks yang diperbesar menggunakan eliminasi Gauss-Jordan, sehingga diperoleh solusi dari persamaan diferensial biasa linier orde 2 dalam bentuk polinomial Taylor.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan persamaan diferensial biasa linier orde 2

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = f(x) \qquad \ldots(9)$$

dengan $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, dan $f(x)$ diasumsikan sebagai fungsi-fungsi yang kontinu dan dapat diekspansi Taylor pada interval $a \leq x \leq b$, dan diberikan syarat tambahan, yaitu:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{1}\left[a_i y^{(i)}(a) + b_i y^{(i)}(b) + c_i y^{(i)}(c)\right] = \lambda \\ &\sum_{i=0}^{1}\left[\alpha_i y^{(i)}(a) + \beta_i y^{(i)}(b) + \gamma_i y^{(i)}(c)\right] = \mu \end{aligned} \qquad \ldots(10)$$

dengan $a \leq c \leq b$, koefisien $a_i,\ b_i,\ c_i,\ \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i, \lambda,$ dan μ adalah konstanta riil dan solusi (9) dinyatakan dalam bentuk deret berikut

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} y^{(n)}(c)(x-c)^n \quad , a \leq c \leq b \qquad \ldots(11)$$

yang mana persamaan (11) adalah polinomial Taylor berderajat N dengan $x = c$, dengan $y^{(n)}(c),\ n = 0, 1, 2, \ldots, N$ adalah koefisien yang akan ditentukan.

4.1 Membentuk Persamaan Matriks dari Hubungan Rekursif Antara Koefisien Taylor

Misalkan sutu fungsi $y(x)$ dan turunannya diasumsikan dapat diekspansi dalam deret Taylor disekitar $x = c$ sebagai berikut

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\sim} a_r (x-c)^r \qquad \ldots(12)$$

dan

$$y^{(n)}(x) = \sum_{r=0}^{\sim} a_r^{(n)} (x-c)^r \qquad \ldots(13)$$

selanjutnaya turunkan persamaan (13) terhadap x sehingga diperoleh

$$y^{(n+1)}(x) = \sum_{r=1}^{\sim} r a_r^{(n)} (x-c)^{r-1} \qquad \dots (14)$$

kemudian ganti r dengan $r+1$, sehingga persamaan (14) dapat ditulis menjadi

$$y^{(n+1)}(x) = \sum_{r=0}^{\sim} (r+1) a_{(r+1)}^{(n)} (x-c)^{r} \qquad \dots (15)$$

Berdasarkan persamaan (13), diperoleh

$$y^{(n+1)}(x) = \sum_{r=0}^{\sim} a_r^{(n+1)} (x-c)^{r} \qquad \dots (16)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (15) dan (16), diperoleh hubungan rekursif sebagai berikut

$$a_r^{(n+1)} = (r+1) a_{(r+1)}^{(n)}\ ; \qquad r, n = 0,1,2,\dots \qquad \dots (17)$$

Misalkan $r = 0,1,2,\dots,N$ dan asumsikan nilai $a_r^{(n)} = 0$ untuk $r > N$. Kemudian dari persamaan (17) diperoleh

$$\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{n})}, \quad n = 0,1,2,\dots \qquad \dots (18)$$

dengan

$$\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})} = \begin{bmatrix} a_0^{(n+1)} \\ a_1^{(n+1)} \\ a_2^{(n+1)} \\ \vdots \\ a_{N-1}^{(n+1)} \\ a_N^{(n+1)} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{n})} = \begin{bmatrix} a_0^{(n)} \\ a_1^{(n)} \\ a_2^{(n)} \\ \vdots \\ a_N^{(n)} \end{bmatrix}$$

berdasarkan persamaan (18), diperoleh hubungan

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{1})} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{2})} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{1})} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{3})} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{2})} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{A} \qquad \dots (19) \end{gathered}$$

dengan

$$\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{0})} = \boldsymbol{A} = [a_0 \ \ a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ \ a_N]^T$$

Oleh karena itu, persamaan matriks (19) memberikan hubungan antara koefisien Taylor matriks $\boldsymbol{A}$ dari $y(x)$ dan koefisien Taylor matriks $\boldsymbol{A}^{(\boldsymbol{n})}$ dari turunan ke n dari $y(x)$.

4.2 Metode *Taylor – Matrix* untuk Persamaan Diferensial Biasa Linier Orde 2

Untuk memperoleh solusi dari persamaan (9) yang dinyatakan dalam bentuk (11) yaitu

$$y(x) = \sum_{r=0}^{N} a_r (x-c)^r, \qquad \text{dengan } a_r = \frac{y^{(r)}(c)}{r!}, \qquad r = 0,1,2,\dots,N \quad \dots (20)$$

asumsikan fungsi $P(x)$, $Q(x)$, dan $R(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk polinomial Taylor berderajat N, sebagai berikut:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{N} p_i (x-c)^i,\ Q(x) = \sum_{i=0}^{N} q_i (x-c)^i,\ R(x) = \sum_{i=0}^{N} r_i (x-c)^i \quad \dots (21)$$

selanjutnya persamaan (21) disubstitusi ke persamaan (9), diperoleh

$$\sum_{i=0}^{N} \left\{ p_i (x-c)^i y'' + q_i (x-c)^i y' + r_i (x-c)^i y \right\} = f(x) \quad \dots (22)$$

Bentuk matriks dari ekspansi Taylor secara umum, yaitu

$$(x-c)^p y^{(s)}(x) = \boldsymbol{X C_p A^{(s)}} \quad \dots (23)$$

berdasarkan hubungan dari persamaan (19), diperoleh

$$\boldsymbol{A^{(s)}} = \boldsymbol{M^s A}$$

maka persamaan (23) menjadi

$$(x-c)^p y^{(s)}(x) = \boldsymbol{X C_p M^s A}, \qquad s = 0, 1, 2;\ p = 0, 1, 2, \dots, I \quad \dots (24)$$

dengan

$$\boldsymbol{X} = [1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \dots \quad (x-c)^N]$$

dan

$$\boldsymbol{C_p} = [C_{ij}]_{(N+1)\times(N+1)} \begin{cases} 1; & untuk\ i-j=p \\ 0; & selainnya \end{cases}$$

Selanjutnya, diasumsikan fungsi $f(x)$ dapat diekspansi dalam deret Taylor dan dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{r=0}^{N} f_r (x-c)^r$$

atau dalam bentuk matriks

$$[f(x)] = \boldsymbol{XF} \quad \dots (25)$$

persamaan (24) dan persamaan (25) disubstitusi ke persamaan (22) diperoleh

$$\left(\sum_{i=0}^{N} p_i \boldsymbol{C_i M^2} + q_i \boldsymbol{C_i M} + r_i \boldsymbol{C_i} \right) \boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} \quad \dots (26)$$

secara singkat, persamaan (26) dapat ditulis dalam bentuk

$$\boldsymbol{WA} = \boldsymbol{F} \quad \dots (27)$$

dengan

$$\boldsymbol{W} = [W_{mn}] = \left(\sum_{i=0}^{I} p_i \boldsymbol{C_i M^2} + q_i \boldsymbol{C_i M} + r_i \boldsymbol{C_i} \right),\ m, n = 0,1,2, \dots, N;\ I = 0,1, \dots$$

dengan demikian maka persamaan (27) dapat dibentuk matriks yang diperbesar, yaitu sebagai berikut:

$$[\boldsymbol{W}; \boldsymbol{F}] \text{ atau } \overline{\boldsymbol{W}} = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & . & . & . & w_{0N} & ; & f_0 \\ w_{10} & w_{11} & . & . & . & w_{1N} & ; & f_1 \\ \cdot & \cdot & . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & . & . & . & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{N0} & w_{N1} & . & . & . & w_{NN} & ; & f_N \end{bmatrix} \quad \dots (28)$$

berikutnya, dapat diperoleh bentuk matriks dari kondisi (10) dengan mengikuti persamaan (11) dan turunannya yang sama dengan persamaan matriks

$$y^{(0)}(x) = [1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \quad \dots \quad (x-c)^N] \boldsymbol{A}$$

dan $\dots (29)$

$$y^{(1)}(x) = [0 \quad 1 \quad 2(x-c) \quad 3(x-c)^2 \quad \dots \quad N(x-c)^N] \boldsymbol{A}$$

dengan menggunakan persamaan (29), maka $y^{(i)}(a)$, $y^{(i)}(b)$, dan $y^{(i)}(c)$, $i = 0{,}1$, dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} y^{(0)}(c) &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]\boldsymbol{A} \\ y^{(0)}(a) &= [1 \quad h \quad h^2 \quad \dots \quad h^N]\boldsymbol{A} \\ y^{(0)}(b) &= [1 \quad k \quad k^2 \quad \dots \quad k^N]\boldsymbol{A} \\ y^{(1)}(c) &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]\boldsymbol{A} \\ y^{(1)}(a) &= [0 \quad 1 \quad 2h \quad \dots \quad Nh^{N-1}]\boldsymbol{A} \\ y^{(1)}(b) &= [0 \quad 1 \quad 2k \quad \dots \quad Nk^{N-1}]\boldsymbol{A} \end{aligned} \qquad \dots(30)$$

dengan $h = a - c$ dan $k = b - c$

Selanjutnya, persamaan (30) disubstitusi ke dalam persamaan (10) dan disederhanakan hingga dipeoleh bentuk matriks dari persamaan (10), yaitu

$$\boldsymbol{UA} = [\lambda] \text{ dan } \boldsymbol{VA} = [\mu]$$

atau matriks diperbesar

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{U}} &= [u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_N \quad ; \quad \lambda] \text{ dan} \\ \overline{\boldsymbol{V}} &= [v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_N \quad ; \quad \mu] \end{aligned} \qquad \dots(31)$$

dimana u_j dan v_j adalah konstanta yang berkaitan dengan koefisien a_i, b_i, c_i, α_i, β_i, dan γ_i dalam persamaan (10) dan h dan k dalam persamaan (30).

Selanjutnya, dua baris terakhir dari matriks diperbesar (28) diganti dengan matriks diperbesar (31), sehingga diperoleh

$$\overline{\boldsymbol{W}^*} = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \dots & w_{0N} & ; & f_0 \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N} & ; & f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & \dots & w_{N-2,N} & ; & f_{N-2} \\ u_0 & u_1 & \dots & u_N & ; & \lambda \\ v_0 & v_1 & \dots & v_N & ; & \mu \end{bmatrix} \qquad \dots(32)$$

jika determinan $\boldsymbol{W}^* \neq 0$, maka dapat ditulis

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{W}^*)^{-1}\boldsymbol{F} \qquad \dots(33)$$

dengan demikian matriks $\boldsymbol{A}$ atau koefisien a_r dapat ditentukan.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dalam penelitian mengenai solusi dari persamaan diferensial biasa linier orde 2 dalam bentuk polinomial Taylor maka dapat disimpulkan bahwa langkah-langkah untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa linier menggunakan metode Taylor-matrix adalah sebagai berikut:

1. setiap fungsi pada persamaan diferensial biasa linier orde 2 diasumsikan dapat dinyatakan dalam bentuk polinomial Taylor berderajat N, sehingga persamaan diferensial biasa linier orde 2 tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks $\boldsymbol{WA} = \boldsymbol{F}$ atau matriks diperbesar $\overline{\boldsymbol{W}}$
2. syarat yang diberikan pada persaman diferensial biasa linier orde 2 dibentuk menjadi matriks $\overline{\boldsymbol{U}}$ dan $\overline{\boldsymbol{V}}$
3. dua baris terakhir dari matriks $\overline{\boldsymbol{W}}$ diganti dengan matriks $\overline{\boldsymbol{U}}$ dan $\overline{\boldsymbol{V}}$ sehingga diperoleh matriks $\overline{\boldsymbol{W}^*}$
4. solusi polinomial *Taylor* diperoleh dengan menyelesaikan matriks $\overline{\boldsymbol{W}^*}$ sehingga diperoleh matriks $\boldsymbol{A} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N]^T$.

.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linier Edisi Ketujuh.* Interaksara. Batam.
[2] Ayres .JR, Frank. 1981.*Theory and Problem of differential Equations.* Schaum’s Outline Series. Mc Graw Hill.
[3] Farlow, Stanly. J. 1994. *An Introduction to Differential Equation and Their Application.* Mc Graw Hill, Inc. USA.
[4] Finzio, N dan Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa Edisi Kedua.* Erlangga. Jakarta.
[5] Kesan, Cenk. (2003). “*Taylor* Polynomial Solution of Differential Equations”. *Journal of Aplied Mathematics and Computation*. 142, 155-156.
[6] Leon, Steven.J. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya Edisi Kelima.* Erlangga. Jakarta.
[7] Supranto, J. 1998. *Pengantar Matrix Edisi Keenam.* Rineka Cipta. Jakarta.
[8] Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik.* Informatika Bandung. Bandung.
[9] Stewart, James. 2003. *Kalkulus Edisi Keempat.* Erlangga. Jakarta.
[10] Zill, Dennis. G. 2005. *A First Course Differential Equations with Modeling Applications Eighth Edition.* Thompson Learning. Inc USA.