Jurnal Epsilon
http://ppjp.ulm.ac.id/journals/index.php/epsilon
p-ISSN: 1978-4422 | e-ISSN 2656-7660
Vol.15 No.2 (Desember 2021) Hal. 78-92
Terakreditasi SINTA 4, SK 158/E/KPT/2021

INVERS TERGENERALISASI MOORE PENROSE

Mardiyana*, Na'imah Hijriati, Thresye

[1]*Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat*
Jl. A. Yani KM. 36, Banjarbaru 70714, Kalimantan Selatan
**Email:* mardiyana.math17@gmail.com

ABSTRACT

The generalized inverse is a concept for determining the inverse of a singular matrix and and $m \times n$ matrix which has the characteristic of the inverse matrix. There are several types of generalized inverse, one of which is the Moore-Penrose inverse. The matrix X is called Moore Penrose inverse of a matrix if it satisfies the four penrose equations and is denoted by A^{+}. Furthermore, if the matrix X satisfies only the first two equations of the Moore-Penrose inverse and $AX = XA$, then X is called the group inverse of A and is denoted by $A^{\#}$. The purpose of this research was to determine the group inverse of a non-diagonalizable square matrix using Jordan's canonical form and Moore Penrose's inverse of a singular matrix, also a non-square matrix using the Singular Value Decomposition (SVD) method. The results of this study are the sufficient condition for a matrix A to have a group inverse, i.e., a matrix A has an index of 1 if and only if the product of two matrices forming A is a full rank factorization and is invertible. Whereas for a singular matrix R and a non-square R, the Moore-Penrose inverse can be determined using Singular Value Decomposition (SVD).

Keywords: generalized matrix inverse, Moore Penrose inverse, group inverse, Jordan canonical form, Singular Value Decomposition.

ABSTRAK

Invers tergeneralisasi merupakan suatu konsep untuk menentukan invers dari matriks singular dan matriks berukuran $m \times n$ yang memiliki karakteristik sifat invers matriks. Ada beberapa jenis invers tergeneralisasi, salah satunya invers Moore Penrose. Suatu matriks X disebut sebagai invers Moore Penrose dari matriks A jika memenuhi empat persamaan penrose dan dinotasikan dengan A^{+}. Kemudian, jika matriks X hanya memenuhi dua persamaan pertama dari invers Moore Penrose dan $AX = XA$, maka X disebut sebagai invers grup dari A dan disimbolkan sebagai $A^{\#}$. Adapun tujuan dari penelitian ini, yaitu untuk menentukan invers Grup dari suatu matriks persegi yang tidak dapat didiagonalisasi dengan menggunakan bentuk kanonik Jordan dan invers Moore Penrose dari matriks singular dan matriks non persegi menggunakan metode dekomposisi nilai singular (*Singular Value Decomposition* atau SVD). Hasil dari penelitian ini adalah syarat cukup suatu matriks $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ mempunyai invers Grup yaitu A mempunyai indeks 1 jika dan hanya jika perkalian dua buah matriks yang membentuk A merupakan faktorisasi rank penuh dan dapat dibalik. Sedangkan untuk suatu matriks singular R dan matriks non persegi R, invers Moore Penrosenya dapat ditentukan dengan menggunakan dekomposisi nilai singular (*Singular Value Decomposition* atau SVD).

Kata Kunci : invers matriks tergeneralisasi, invers Moore Penrose, invers grup, bentuk kanonik Jordan, dekomposisi nilai singular (*Singular Value Decomposition* atau SVD).

1. PENDAHULUAN

Invers tergeneralisasi merupakan suatu konsep untuk menentukan invers dari matriks singular dan matriks berukuran $m \times n$ yang memiliki karakteristik sifat invers matriks. Terdapat beberapa jenis invers tergeneralisasi, salah satunya invers Moore Penrose yang diperkenalkan oleh Roger Penroose dalam penelitiannya pada tahun 1954. Suatu matriks X disebut sebagai invers Moore Penrose dari matriks A jika memenuhi empat persamaan Penrose dan dinotasikan dengan A^+ (Ben-Israel & Greville, 1976). Kemudian, jika terdapat suatu matriks X yang hanya memenuhi dua persamaan pertama dari invers Moore Penrose dan $AX = XA$ maka X disebut sebagai invers grup dari A dan disimbolkan sebagai $A^\#$ (Ben-Israel & Greville, 1976).

Adapun untuk menentukan invers grup dari suatu matriks persegi, terlebih dahulu akan ditentukan syarat cukup suatu matriks persegi memiliki invers Grup. Selanjutnya, dengan menggunakan bentuk kanonik Jordan, invers grup dari suatu matriks yang tidak dapat didiagonalisasi dapat ditentukan. Lebih lanjut, dengan menggunakan dekomposisi nilai singular (*Singular Value Decomposition* atau SVD) ditentukan invers Moore Penrose dari suatu matriks singular dan matriks non persegi. Sehingga dalam tulisan ini, akan dijelaskan lebih lanjut tentang invers grup dari suatu matriks yang tidak dapat diagonalisasi dengan menggunakan bentuk kanonik Jordan serta invers Moore Penrose dari matriks singular dan matriks non persegi dengan menggunakan metode dekomposisi nilai singular (*Singular Value Decomposition* atau SVD).

2. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini, diberikan beberapa dasar teori yang digunakan dalam menentukan invers grup dan invers Moore Penrose dari suatu matriks.

2.1 Determinan dan Invers Matriks

Definisi 2.1.1 (Anton & Rorres, 2004)

Suatu hasilkali elementer bertanda (elementary product) dari suatu matriks A berukuran $n \times n$, adalah hasilkali dari n entri matriks A yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama. Determinan dari matriks A dinotasikan dengan $\det(A)$.

Definisi 2.1.2 (Anton & Rorres, 2004)

Jika A adalah matriks bujursangkar dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik (invertible) dan B disebut sebagai invers (inverse) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.

2.2 Faktorisasi *Full-Rank* (Faktorisasi Rank Penuh)

Definisi 2.2.1 (Piziak & Odell, 2007)

Misalkan $\mathbb{C}^r_{m\times n}$ *himpunan semua matriks berukuran* $m \times n$ *dengan rank* r *yang entri-entri matriksnya merupakan bilangan kompleks. Diberikan suatu matriks* $A \in \mathbb{C}^r_{m\times n}$ *dengan* $r > 0$. *Jika terdapat* $C \in \mathbb{C}^r_{m\times r}$ *dan* $R \in \mathbb{C}^r_{r\times n}$ *sedemikian sehingga* $A = CR$ *maka* A *dapat dikatakan memiliki faktorisasi full-rank atau faktorisasi rank penuh.*

2.3 Nilai Eigen,Vektor Eigen dan Vektor Eigen Tergeneralisasi.

Definisi 2.3.1 (Anton & Rorres, 2004)

Jika A *merupakan suatu matriks berukuran* $n \times n$, *maka terdapat suatu vektor tak nol* $\mathbf{x}$ *pada* R^n *yang disebut sebagai vektor eigen (eigenvector) dari* A, *jika* Ax *adalah kelipatan skalar dari* x *sebagai berikut,*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

untuk sebarang skalar λ. *Skalar* λ *disebut sebagai nilai eigen (eigenvalue) dari matriks* A *dan* $\mathbf{x}$ *disebut sebagai vektor eigen yang terkait dengan* λ.

Jika diketahui bahwa λ_i merupakan nilai-nilai eigen dari matriks A, maka multiplisitas aljabar λ_i menyatakan banyaknya nilai eigen λ_i sebagai perkalian akar-akar karakteristik dari matriks A. Sedangkan multiplisitas geometri λ_i menyatakan dimensi ruang eigen dari matriks A.

Definisi 2.3.2 (Dewi & Liliana, 2017)

Diberikan suatu matriks A *berukuran* $n \times n$. *Vektor eigen tergeneralisasi dari* A *diberikan sebagai berikut.*

$$(A - \lambda_r I)\mathbf{u_r} = \mathbf{u_{r-1}}$$

dengan r *merupakan rank dari matriks* A. *Jika* $\mathbf{u_r}$ *merupakan vektor eigen tergeneralisasi dari vektor eigen* $\mathbf{u_{r-1}}$.

2.4 Bentuk Kanonik Jordan.

Definisi 2.4.1 (Weintraub, 2008)

Suatu matriks $J_{n\times n}$ *dengan entri-entri di lapangan* F *merupakan bentuk kanonik Jordan apabila terdapat blok-blok Jordan di sepanjang diagonal utamanya dan terdapat entri - entri nol di luar blok-blok Jordan tersebut.*

Berikut diberikan ilustrasi matriks bentuk kanonik Jordan berukuran 4×4 .

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks J di atas tersusun atas 2 buah blok Jordan yang mana tersusun atas blok Jordan berukuran 1×1, yaitu $[1]$ dan blok Jordan berukuran 2×2, yaitu $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.4.2 (Fletcher & Sorensen, 1983)

Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ terdapat matriks nonsingular $X \in \mathbb{C}_{n\times n}$ sedemikian sehingga

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix}$$

yang mana untuk setiap $J_i = \lambda_i I + E_i$ merupakan matriks persegi dengan orde k_i, $E_i = \begin{pmatrix} 0 & I_{k_i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $\lambda_i \in \mathbb{C}$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$.

Berikut akan diberikan langkah-langkah untuk menentukan bentuk kanonik Jordan dari suatu matriks yang tidak dapat didiagonalisasi berdasarkan Teorema 2.4.2.

1. Menentukan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ dari suatu matriks $A_{n\times n}$ dengan menggunakan persamaan karakteristik sebagai berikut.
$$\det(\lambda I - A) = 0.$$
atau dapat juga dituliskan sebagai berikut.
$$|\lambda I - A| = 0.$$
2. Menentukan vektor eigen dari suatu matriks $A_{n\times n}$ berdasarkan nilai eigen yang diperoleh pada langkah 1.
3. Menentukan multiplisitas aljabar α_k berdasarkan persamaan karakteristik dan nilai eigen yang diperoleh dalam langkah 1. Selanjutnya, menentukan multiplisitas geometri γ_k berdasarkan nilai eigen dan dimensi vektor eigen yang diperoleh dalam langkah 1 dan langkah 2.
4. Menentukan vektor eigen tergeneralisasi dari matriks $A_{n\times n}$ berdasarkan Definisi 2.3.2 sebagai berikut.
$$(A - \lambda_i I)\mathbf{u_r} = \mathbf{u_{r-1}}.$$
dengan r merupakan rank dari matriks A, $\mathbf{u_r}$ merupakan vektor eigen tergeneralisasi dan $\mathbf{u_{r-1}}$ merupakan vektor eigen matriks A yang diperoleh dalam langkah 2.
5. Membentuk matriks nonsingular P yang entri-entrinya terdiri dari vektor eigen yang diperoleh pada langkah 2 dan vektor eigen tergeneralisasi yang diperoleh pada langkah 4.
6. Menentukan invers dari matriks nonsingular P.
7. Menentukan matriks J yang merupakan bentuk kanonik Jordan dari A berdasarkan Teorema 2.4.2 berikut.
$$J = P^{-1}AP\ .$$

Contoh 2.4.3

Diberikan suatu matriks sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan langkah-langkah diatas, diperoleh bentuk kanonik Jordan dari A, yaitu $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2.5 Dekomposisi QR

Teorema 2.5.1 (Anton & Rorres, 2004)

Jika A merupakan suatu matriks berukuran $m \times n$ yang mempunyai vektor-vektor kolom yang bebas linier, maka matriks A tersebut dapat difaktorkan menjadi,

$$A = QR$$

dengan Q merupakan suatu matriks $m \times n$ yang mempunyai vektor-vektor kolom ortonormal dan R merupakan suatu matriks segitiga atas $n \times n$ yang dapat dibalik.

Berdasarkan Teorema 2.5.1, (Stoer & Bulirsch, 2002)[8] menyatakan bahwa terdapat dua kemungkinan untuk menentukan *pseudoinvers* dari matriks A dengan menggunakan dekomposisi QR. Pertama, jika $A_{m\times n}$ dengan $m \geq n$ dan $rank\ A = n$, maka

$$A^{+} = R^{-1}Q^{*} \quad (1)$$

dengan Q^{*} merupakan transpose konjugat dari matriks Q.

Kedua, jika $A_{m\times n}$ dengan $m < n$ dan $rank\ A = m$, maka

$$A^{+} = Q(R^{*})^{-1} \quad (2)$$

dengan R^{*} merupakan transpose konjugat dari matriks R.

2.6 Dekomposisi Nilai Singular (*Singular Value Decomposition* atau SVD)

Definisi 2.6.1 (Meyer, 2000)

Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dengan rank r. Terdapat nilai eigen positif dari $A^{*}A$ (dan AA^{*}) yaitu $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$. Nilai singular dari A didefinisikan oleh $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Definisi 2.6.2 (Hourigan & Mcindoo, 1998)

Dekomposisi nilai singular dari sebuah faktorisasi matriks ukuran $m \times n$ merupakan matriks A berikut

$$A = U\sum V^{T} = u_1\sigma_1 v_1^{T} + u_2\sigma_2 v_2^{T} + \cdots + u_n\sigma_n v_n^{T}$$

dengan U merupakan matriks orthogonal $m \times m$, V matriks orthogonal $n \times n$ dan $\sum$ merupakan matriks ukuran $m \times n$ yang diagonal utamanya merupakan nilai singular dari A, dimana

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$$

dengan $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ merupakan nilai singular dari A.

2.7 Invers Moore Penrose dan Invers Grup

Definisi 2.7.1 (Zekraoui & Özel, 2017)

Apabila terdapat suatu matriks $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$. Matriks A dikatakan mempunyai invers Moore-Penrose jika terdapat matriks $X \in \mathbb{C}_{n\times m}$ sedemikian sehingga,

$$AXA = A. \tag{3}$$

$$XAX = X. \tag{4}$$

$$(AX)^* = AX. \tag{5}$$

$$(XA)^* = XA. \tag{6}$$

Selanjutnya, maka X dinotasikan dengan A^+. Kemudian AA^+ dan A^+A merupakan matriks Hermitian jika A dan A^+ memenuhi invers-{1}.

Definisi 2.7.2 (Ben-Israel & Greville, 1976)

Suatu matriks X disebut sebagai invers grup dari matriks A jika memenuhi beberapa persamaan berikut.

$$AXA = A. \tag{7}$$

$$XAX = X. \tag{8}$$

$$AX = XA. \tag{9}$$

Selanjuntya, maka X dinotasikan dengan $A^\#$.

2.8 Indeks 1 dari Suatu Matriks

Definisi 2.8.1 (Ben-Israel & Greville, 1976)

Bilangan bulat positif terkecil k yang memenuhi,

$$rank\ (A^k) = rank\ (A^{k+1})$$

disebut sebagai indeks 1 dari suatu matriks A berukuran $m \times n$.

Teorema 2.8.2 (Ben-Israel & Greville, 1976)

Suatu matriks persegi A memiliki invers grup jika dan hanya jika A mempunyai indeks 1 yaitu

$$rank\ (A) = rank(A^2).$$

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan prosedur sebagai berikut:

a) Memberikan definisi dan teorema yang terkait dengan determinan dan invers, nilai eigen, vektor eigen dan vektor eigen tergeneralisasi, bentuk kanonik Jordan, dekomposisi QR, dekomposisi nilai singular (*singular value decomposition* atau SVD), invers Moore Penrose dan invers grup, dan indeks 1 dari suatu matriks.

b) Menentukan matriks bentuk kanonik Jordan J dari suatu matriks $A_{m\times n}$.
c) Menentukan matriks J^{+} dari bentuk kanonik Jordan J
d) Menentukan invers grup X dari matriks bentuk Kanonik Jordan
e) Menunjukkan bahwa X merupakan invers grup dari bentuk kanonik Jordan J.
f) Menentukan matriks $R^{*}R$ dan RR^{*} dari suatu matriks singular R dan matriks non persegi $R_{m\times n}$.
g) Menentukan matriks ortonormal $V_{n\times n}$ dan matriks ortonormal $U_{m\times m}$ yang entri-entrinya terdiri dari vektor-vektor eigen matriks $R^{*}R$ yang ortonormal.
h) Menentukan matriks Σ berukuran $m \times n$ dan matriks Σ^{+} berukuran $n \times m$.
i) Menentukan invers Moore Penrose X dari matriks singular R dan matriks non persegi $R_{m\times n}$.
j) Menunjukkan bahwa X merupakan invers Moore Penrose dari matriks singular R dan matriks non persegi $R_{m\times n}$.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Invers Grup dari Suatu Matriks Persegi

Berikut ini diberikan syarat cukup suatu matriks persegi memiliki invers grup.

Lemma 4.1.1

Diberikan suatu matriks $C \in \mathbb{C}_{n\times r}$ dengan rank r dan $R \in \mathbb{C}_{r\times n}$ dengan rank r. Terdapat suatu matriks persegi $A = CR$ yang merupakan faktorisasi rank penuh dari $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dengan rank r. Jika RC dapat dibalik maka terdapat invers grup dari A dengan $A^{\#} = C(RC)^{-2}R$.

Kemudian dari Lemma 4.1.1 diperoleh Akibat sebagai berikut.

Akibat 4.1.2

Diberikan matriks persegi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ dengan rank r dan $A = CR$ merupakan faktorisasi rank penuh. Matriks A memiliki indeks 1 jika dan hanya jika RC dapat dibalik.

4.2 Aplikasi Bentuk Kanonik Jordan dalam Menentukan Invers Grup.

Invers grup dari suatu matriks persegi yang mempunyai indeks 1 dapat ditentukan dengan menggunakan bentuk kanonik Jordan, yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4.2.1

Diberikan suatu matriks A yang mempunyai indeks 1 dan $A = PJP^{-1}$ dengan P merupakan matriks nonsingular dan J merupakan bentuk kanonik Jordan dari A. Terdapat invers grup dari A dengan $X = PJ^{+}P^{-1}$.

Bukti.

Diketahui A merupakan suatu matriks dengan indeks 1 dan $A = PJP^{-1}$. Sehingga, berdasarkan Teorema 2.8.2 matriks A mempunyai suatu invers grup dan $rank\, J = rank\, J^2$.
Kemudian, diketahui $X = PJ^{+}P^{-1}$, akan ditunjukkan bahwa X memenuhi Definisi 2.7.2 dan X merupakan invers grup dari A.

i) $$\begin{aligned} AXA &= PJP^{-1}(PJ^{+}P^{-1})PJP^{-1} \\ &= PJJ^{+}JP^{-1} \\ &= PJP^{-1} \\ &= A \end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned} XAX &= PJ^{+}P^{-1}(PJP^{-1})PJ^{+}P^{-1} \\ &= PJ^{+}JJ^{+}P^{-1} \\ &= PJ^{+}P^{-1} \\ &= X \end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned} AX &= PJP^{-1}(PJ^{+}P^{-1}) \\ &= I \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} XA &= PJ^{+}P^{-1}(PJP^{-1}) \\ &= I \end{aligned}$$

Sehingga, benar bahwa $AX = XA = I$.

Jadi, terbukti bahwa X merupakan invers grup dari A dan disimbolkan dengan $A^{\#}$.■

Kemudian berdasarkan Teorema 2.4.2 dan Teorema 4.2.1, berikut diberikan langkah-langkah untuk menentukan invers grup dari bentuk kanonik Jordan.

1. Menentukan bentuk kanonik Jordan J dari suatu matriks A.
2. Menentukan vektor-vektor basis $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n}$ dari matriks J.
3. Menentukan basis-basis orthogonal $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ dari matriks J.
4. Menentukan basis ortonormal $\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \dots, \mathbf{q_n}$ dari matriks J sebagai berikut.
$$\mathbf{q_1} = \frac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|}$$
$$\mathbf{q_2} = \frac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{q_n} = \frac{\mathbf{v_n}}{\|\mathbf{v_n}\|}$$
5. Membentuk matriks Q berdasarkan vektor basis ortonormal $\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \dots, \mathbf{q_n}$ sebagai berikut.
$$Q = [\mathbf{q_1}|\mathbf{q_2}|\dots|\mathbf{q_n}]$$
6. Membentuk matriks segiatas R dari hasil kali dalam vektor basis $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n}$ dengan vektor basis ortonormal $\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \dots, \mathbf{q_n}$ sebagai berikut.

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{q_1} \rangle & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{q_1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u_n}, \mathbf{q_1} \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{q_2} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{u_n}, \mathbf{q_2} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{u_n}, \mathbf{q_n} \rangle \end{bmatrix}$$

7. Membentuk suatu matriks J^+ dengan memperhatikan rank dari matriks J berdasarkan persamaan (1) dan (2).
8. Membentuk matriks X berdasarkan Teorema 4.2.1 sebagai berikut.
$$X = PJ^+P^{-1}$$
9. Menunjukkan bahwa X merupakan invers grup dari bentuk kanonik Jordan yang memenuhi Definisi 2.7.2.

Berdasarkan langkah-langkah diatas berikut akan diberikan contoh untuk menentukan invers grup dari bentuk kanonik Jordan.

Contoh 4.2.2

Diberikan suatu matriks sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Invers grup dari bentuk kanonik Jordan yang diperoleh dari matriks A dapat ditentukan sebagai berikut.

1. Berdasarkan langkah 1 dan dari Contoh 2.4.3 diperoleh bentuk kanonik Jordan dari A, yaitu $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Menentukan vektor-vektor basis dari J sebagai berikut.
$$\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
3. Menentukan basis orthogonal $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ dan $\mathbf{v_4}$ dari matriks J dan diperoleh,
$$\mathbf{v_1} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \qquad \mathbf{v_3} = (0 \quad 0 \quad 4 \quad 0)$$
$$\mathbf{v_2} = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 0) \qquad \mathbf{v_4} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 4)$$
4. Menentukan basis orthonormal q_1, q_2, q_3 dan q_4 dari matriks J dan diperoleh,
$$\mathbf{q_1} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \qquad \mathbf{q_3} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$
$$\mathbf{q_2} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \qquad \mathbf{q_4} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$
5. Membentuk matriks Q berdasarkan vektor-vektor basis ortonomal, sebagai berikut.
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Menentukan matriks segitiga atas R dari hasil kali dalam vektor-vektor basis dalam Langkah 2 dan Langkah dan diperoleh,
$$R = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{q_1} \rangle & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{q_1} \rangle & \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{q_1} \rangle & \langle \mathbf{u_4}, \mathbf{q_1} \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{q_2} \rangle & \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{q_2} \rangle & \langle \mathbf{u_4}, \mathbf{q_2} \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{q_3} \rangle & \langle \mathbf{u_4}, \mathbf{q_3} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \langle \mathbf{u_4}, \mathbf{q_4} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
7. Membentuk suatu matriks J^+ berdasarkan langkah 7. Karena, J merupakan matriks bentuk kanonik Jordan berukuran 4×4 dan $rank\, J = 4$, berdasarkan persamaan (1) diperoleh,
$$J^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
8. Membentuk matriks X berdasarkan Teorema 4.2.1 dan diperoleh,
$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{13}{16} & 1 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{9}{16} & \frac{1}{2} & \frac{5}{16} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
9. Menunjukkan bahwa X merupakan invers grup dari bentuk kanonik Jordan dan memenuhi Definisi 2.7.2.

   Dengan mensubstitusikan matriks $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{13}{16} & 1 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{9}{16} & \frac{1}{2} & \frac{5}{16} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dan $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ke dalam persamaan (7), (8) dan (9), terbukti bahwa X merupakan invers grup dari A dan dinotasikan dengan $A^{\#}$.

Akan tetapi, terdapat kekurangan dalam menentukan invers tergeneralisasi dari bentuk kanonik Jordan. Hal ini dikarenakan jika terdapat matriks uniter P, maka invers tergeneralisasi dari bentuk Kanonik Jordan tidak dapat ditentukan. Berikut diberikan Lemma yang mendukung pernyataan tersebut.

Lemma 4.2.3

Setiap matriks $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ yang tidak dapat didiagonalisasikan tidak memiliki invers Moore Penrose.

4.3 Invers Tergeneralisasi Moore Penrose Pada Bentuk Dekomposisi Nilai Singular (*Singular Value Decomposition* atau SVD).

Invers tergeneralisasi Moore Penrose dari suatu matriks singular dan matriks non-persegi dapat ditentukan dengan menggunakan dekomposisi nilai singular

(*Singular Value Decomposition* atau SVD), yang dinyatakan dalam lemma dan definisi berikut.

Lemma 4.3.1

Diberikan $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dengan rank r. Terdapat matriks uniter $U \in \mathbb{C}_{m\times m}$, $V \in \mathbb{C}_{n\times n}$ dan matriks $\sum = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{m\times n}$, dengan D merupakan matriks diagonal yang elemen diagonal $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ tak nol dan merupakan akar kuadrat dari nilai eigen AA^* (yang juga nilai eigen bukan nol dari A^*A) sedemikian sehingga $A = U\sum V^*$.

Definisi 4.3.2

Diberikan suatu matriks A berukuran $m \times n$. Vektor eigen orthonormal dari AA^* (yaitu vektor kolom matriks U) disebut sebagai vektor singular kiri dari A sedangkan A^*A (yaitu vektor kolom matriks V) disebut sebagai vektor singular kanan dari A. Selanjutnya, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ untuk $i = 1, \dots, r$ disebut sebagai nilai singular dari A dan faktorisasi $A = U\sum V^*$ disebut sebagai dekomposisi nilai singular atau bisa disingkat sebagai SVD.

Berdasarkan Lemma 4.3.1 dan Definisi 4.3.2, invers tergeneralisasi Moore Penrose pada dekomposisi nilai singular atau SVD dapat ditentukan dengan $R^+ = V\Sigma^+U^*$ dan diperoleh langkah-langkah untuk menentukan invers tergeneralisasi Moore Penrose dari suatu matriks singular R dan suatu matriks R berukuran $m \times n$ sebagai berikut.

1. Menentukan matriks R^*R berukuran $n \times n$ dan matriks RR^* berukuran $m \times m$, dengan R^* merupakan transpose konjugat dari $R_{m\times n}$.
2. Menentukan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ dari R^*R dan RR^* dengan menggunakan persamaan karakteristik sebagai berikut.
$$\det(\lambda I - R^*R) = 0 \text{ atau } |\lambda I - R^*R| = 0$$
dan
$$\det(\lambda I - RR^*) = 0 \text{ atau } |\lambda I - RR^*| = 0$$
3. Menentukan nilai singular $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i$ dari matriks R sebagai berikut.
$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$$
$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$$
$$\vdots$$
$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$
4. Menentukan vektor-vektor eigen dari R^*R dan RR^* berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dalam langkah 2.
5. Menentukan matriks $V_{n\times n}$ yang entri-entrinya terdiri dari vektor-vektor eigen matriks R^*R yang ortonormal.
6. Menentukan matriks $U_{m\times m}$ yang entri-entrinya terdiri dari vektor-vektor eigen matriks RR^* yang ortonormal.

7. Menentukan matriks Σ berukuran $m \times n$ yang bersesuaian dengan $R_{m\times n}$, yang mana entri-entri disepanjang diagonalnya merupakan nilai singular yang diperoleh dalam langkah 3 dan entri-entri di luar diagonal bernilai nol.
8. Menentukan matriks Σ^+ berukuran $n \times m$ berdasarkan langkah 7 yang bersesuaian dengan matriks ortonormal V dalam langkah 5 dan matriks ortonormal U dalam langkah 6 yaitu
$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
dengan $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_i} \end{pmatrix}$
9. Menentukan matriks X berdasarkan Lemma 4.3.1 yakni,
$$X = V\Sigma^+U^*$$
dengan V merupakan matriks berukuran $n \times n$, U^* merupakan transpose konjugat dari matriks U yang berukuran $m \times m$ dan matriks Σ^+ berukuran $n \times m$ yang diperoleh dalam langkah 8.
10. Menunjukan bahwa X merupakan invers tergeneralisasi Moore Penrose dari R yang memenuhi Definisi 2.7.1 dan disimbolkan dengan R^+.

4.4 Aplikasi Dekomposisi Nilai Singular (*Singular Value Decomposition* atau SVD) Untuk Menentukan Invers Moore Penrose Pada Matriks Singular dan Matriks Non Persegi.

Pada bagian ini, diberikan contoh atau ilustrasi numerik untuk menentukan invers tergeneralisasi Moore Penrose pada suatu matriks singular dan matriks non persegi.

Contoh 4.4.1

Diberikan suatu matriks $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Invers Moore Penrose dari matriks $B_{2\times 3}$ dapat ditentukan dengan langah-langkah sebagai berikut.

1. Berdasarkan langkah 1 dalam Subbab 4.3 diperoleh $B^*B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Berdasarkan langkah 2 dalam Subbab 4.3 diperoleh nilai-nilai eigen dari B^*B yaitu $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 0$ dan nilai-nilai eigen dari BB^*, yaitu $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.
3. Menentukan nilai-nilai singular dari $B_{2\times 3}$ berdasarkan Definisi 2.15.1 yaitu $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sqrt{6}$.

4. Berdasarkan langkah 4 dalam Subbab 4.3 diperoleh vektor-vektor eigen dari B^*B yaitu $\mathbf{p_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p_2} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ dan diperoleh pula vektor-vektor eigen dari BB^* yaitu $\mathbf{q_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{q_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. Berdasarkan langkah 5 dalam Subbab 4.3 diperoleh matriks V yang entri-entrinya terdiri dari vektor-vektor eigen matriks B^*B yang ortonormal, yaitu $= \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.
6. Berdasarkan langkah 6 dalam Subbab 4.3 diperoleh matriks U yang entri-entrinya terdiri dari vektor-vektor eigen matriks BB^* yang ortonormal, yaitu $U = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.
7. Berdasarkan langkah 7 dalam Subbab 4.3 diperoleh matriks Σ, yaitu $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$.
8. Berdasarkan langkah 8 dalam Subbab 4.3 diperoleh matriks Σ^+, yaitu $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
9. Menentukan matriks X berdasarkan Lemma 4.3.1, yaitu.

$$X = V\Sigma^+U^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

10. Menunjukkan bahwa X merupakan invers grup dari bentuk kanonik Jordan dan memenuhi Definisi 2.7.1.

Matriks $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ disubstitusi ke dalam Persamaan (3), (4), (5) dan (6), terbukti bahwa X merupakan invers Moore Penrose dari B dan dinotasikan dengan B^+.

Contoh 4.4.3

Diberikan suatu matriks $G_{3\times 3}$ yaitu $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i & 1 & 0 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Selanjuntnya dengan menggunakan langkah-langkah yang sama seperti dalam Contoh 4.4.1, diperoleh invers Moore Penrose dari G, yaitu $G^+ = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{4} & -\frac{i}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang terdapat dalam pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Invers grup dari suatu matriks A yang tidak dapat didiagonalisasi, dapat ditentukan menggunakan bentuk kanonik Jordan, yakni dengan cara membentuk matriks J^+ yang merupakan matriks Moore Penrose dari matriks Jordan J dan matriks P yang dibentuk dari vektor eigen dan vektor eigen tergeneralisasi dari matriks A. Invers grup dari matriks A adalah $X = PJ^+P^{-1}$. Kemudian, terdapat syarat cukup agar suatu matriks persegi A mepunyai invers grup, yaitu A mempunyai indeks 1 jika dan hanya jika perkalian dua buah matriks yang membentuk A merupakan faktorisasi rank penuh dan dapat dibalik.
2. Invers Moore Penrose dari suatu matriks singular R dan matriks R berukuran $m \times n$ dapat ditentukan dengan menggunakan metode dekomposisi nilai singular. Invers Moore Penrose dari matriks R yang diperoleh menggunakan metode ini adalah $X = V\Sigma^+U^*$, dengan matriks V dibentuk dari vektor-vektor eigen matriks R^*R yang ortonormal dan matriks U dibentuk dari vektor-vektor eigen matriks RR^* yang ortonormal. Sedangkan, matriks Σ dibentuk dari nilai-nilai singular matriks R.

REFERENSI

Anton, H., & Rorres, C. (2004). *Aljabar Linier Elementer : Versi Aplikasi* (R. Indriasari & I. Harmein (eds.); Edisi ke-8). Erlangga.

Ben-Israel, A., & Greville, T. N. E. (1976). Generalized Inverses: Theory and Applications. *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique*, *44*(2), 301. https://doi.org/10.2307/1403291

Dewi, I., & Liliana, K. (2017). Membawa Matriks ke Dalam Bentuk Kanonik Jordan. *Euclid*, *2*, 568–577.

Fletcher, R., & Sorensen, D. C. (1983). An Algorithmic Derivation of The Jordan Canonical Form. *The Americal Mathematical Monthly*, *90*, 12–16.

Hourigan, J. S., & Mcindoo, L. V. (1998). *A scientific Report on Singular Value*

Decomposition. 1–9. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi1651=10.1.1.42.

Meyer, C. D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9780898719512

Piziak, R., & Odell, P. L. (2007). *Matrix Theory: From Generalized Inverses to Jordan Form* (1st ed.). Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/https://doi.org/10.1201/9781420009934

Stoer, J., & Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis.* (2nd ed.). Springer- Verlag.

Weintraub, S. H. (2008). Jordan Canonical Form: Application to Differential Equations. In *Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics* (Vol. 1, Issue 1). Morgan &cLaypool publishers. https://doi.org/10.2200/s00146ed1v01y200808mas002

Zekraoui, H., & Özel, C. (2017). Some matrix factorizations related to the generalized inverses. *In Applied Mathematical Modelling, October 2017*. https://www.researchgate.net/publication/320620520