Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 1-11

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL LINIER ORDE DUA MENGGUNAKAN METODE POLINOMIAL TAYLOR

Rezky Putri Rahayu, Yuni Yulida, Thresye
Program Studi Matematika Fakultas MIPA
Universitas Lambung Mangkurat
Email : rezkyputri18@gmail.com

ABSTRAK

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas. Pada persamaan diferensial terdapat koefisien yang berupa konstanta dan berupa fungsi. Solusi dari persamaan diferensial parsial yang koefisiennya berupa konstanta mudah ditentukan. Namun, solusi dari persamaan diferensial yang koefisiennya berupa fungsi cukup sulit ditentukan. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi tersebut yaitu dengan menggunakan polinomial Taylor. Metode ini dapat digunakan pada persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan koefisien berupa fungsi dengan dua variabel bebas. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan solusi polinomial Taylor pada persamaan diferensial parsial linier orde dua. Pada penelitian ini diperoleh solusi dari persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan mengasumsikan solusi dalam bentuk polinomial Taylor berderajat N

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{N}\sum_{s=0}^{N} \alpha_{r,s}(x-c_0)^r(y-c_1)^s,$$

dengan $\alpha_{r,s} = \frac{1}{r!s!}u^{(r,s)}(c_0,c_1)$ merupakan koefisien polinomial Taylor, atau dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks $u(x,y) = XAY$.

Kata Kunci : Persamaan diferensial parsial linier orde dua, deret Taylor, polinomial Taylor, matriks.

ABSTRACT

Partial differential equations are equations containing partial derivatives of one or more dependent variables against more than one independent variable. In the differential equations there constants and coefficients which form of the function. The solution of the differential equation in the form of the constant coefficient is easy to determined. However, the solution of differential equations whose coefficients form of function quite difficult to determine. One method that can be used to determine the solution that is by using Taylor polynomials. This method can be used in order linear partial differential equations with coefficients of the form two functions with two independent variables. The purpose of this study was to determine the Taylor polynomial solution in second order linear partial differential equations. In this study was obtained from the solution of linear partial differential equations second order by assuming a solution in the form of Taylor polynomials of degree N

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{N}\sum_{s=0}^{N} \alpha_{r,s}(x-c_0)^r(y-c_1)^s,$$

with $\alpha_{r,s} = \frac{1}{r!s!}u^{(r,s)}(c_0,c_1)$ is a Taylor polynomial coefficients, or can be expressed in the form of a matrix equation $u(x,y) = XAY$.

Keywords : Linear Partial Differential Equations Second Order, Taylor series , Taylor polynomials, matrix.

1. PENDAHULUAN

Pada bentuk persamaan diferensial parsial terdapat koefisien yang berupa konstanta dan berupa fungsi. Jika koefisiennya berupa konstanta maka solusi

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 1-11

persamaan diferensial parsial lebih mudah ditentukan. Namun, jika koefisiennya berupa fungsi maka solusi persamaan diferensial parsial tersebut cukup sulit ditentukan. Beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial parsial dengan koefisien berupa fungsi yaitu dengan polinomial Chebyshev dan polinomial Taylor. Kesan [6], menjelaskan tentang metode polinomial Chebyshev yang diterapkan pada persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan mengasumsikan solusi dari persamaan diferensial tersebut dalam bentuk deret Chebyshev. Namun, metode ini hanya mempunyai solusi pada selang tertutup $(x, y) \in [-1,1]$. Selanjutnya Kesan [7] juga menjelaskan tentang metode untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial yang memiliki koefisien berupa fungsi dan digunakan pada persamaan diferensial parsial linier orde dua. Dalam metode ini, persamaan diferensial parsial linier orde dua yang memiliki solusi pada selang $(x, y) \in [a, b]$ dan diasumsikan solusi pendekatan berbentuk polinomial Taylor dengan dua variabel bebas.

Berdasarkan pemaparan di atas, penulis mengkaji kembali artikel Kesan [7] yaitu untuk menentukan solusi polinomial Taylor pada persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan koefisien fungsi.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial Linier Orde Dua

Secara umum persamaan diferensial parsial linier untuk orde dua dengan dua variabel bebas x dan y memiliki bentuk persamaan sebagai berikut :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \qquad \text{... (1)}$$

dimana A, B, C, D, E, F, dan Gdapat berupa konstanta atau fungsi terhadap x dan y. Persamaan (1) disebut homogen jika $G(x, y)$ pada ruas kanan identik dengan nol untuk semua x dan y. Jika $G(x, y)$ tidak identik dengan nol, maka persamaan (1) disebut nonhomogen [3].

2.2. Deret Taylor

Teorema 2.1 [4]

Hanya ada satu deret pangkat dalam $x - c$ memenuhi untuk $f(x)$ sehingga

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \end{aligned} \qquad \text{... (2)}$$

berlaku untuk semua x dalam beberapa interval disekitar c dengan

$$a_n = \frac{f^n(c)}{n!} \qquad \text{... (3)}$$

Deret

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n \qquad \text{... (4)}$$

disebut deret Taylor.

Teorema 2.2 [2]

Misalkan $f(x, y)$ mempunyai turunan ketiga yang kontinu pada himpunan tutup D, maka untuk titik dalam (a, b) di D dan $(x, y) \in D$ berlaku

$$\mathrm{f(x,y) = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + (y-b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right] + R_2} \qquad \text{... (5)}$$

dengan

$$\lim_{\mathrm{h}\to(0,0)} \frac{\mathrm{R}_2}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0 \qquad \dots(6)$$

dan $\mathbf{h} = (\mathrm{x} - \mathrm{a}, \mathrm{y} - \mathrm{b})$.

Polinom di ruas kanan pada (6) *disebut* ***polinom Taylor derajat dua***.

2.2 Operasi Matriks

Operasi matriks yang digunakan dalam penelitian ini adalah penjumlahan matriks, perkalian matriks, transpos matriks, invers matriks, serta matriks diperbesar. Untuk menentukan nilai dari koefisien polinomial Taylor dapat digunakan metode operasi baris elementer atau eliminasi Gauss.

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Adapun prosedur pada penelitian ini adalah mengumpulkan dan mengkaji bahan-bahan yang berkaitan dengan persamaan diferensial parsial terutama untuk persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan dua variabel bebas. Kemudian, menentukan hubungan dasar suatu fungsi dua variabel dalam bentuk deret Taylor yang diturunkan terhadap x dan terhadap y sehingga diperoleh koefisien deret Taylor yang dinyatakan dalam bentuk matriks. Kemudian, menentukan solusi persamaan diferensial parsial (PDP) dengan mengasumsikan solusi serta koefisien-koefisien PDP dalam bentuk polinomial Taylor yang dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks. Selanjutnya, membentuk matriks diperbesar untuk menentukan matriks yang elemennya berupa koefisien polinomial Taylor sehingga diperoleh solusi pendekatan pada PDP linier ord dua.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan persamaan diferensial parsial linier (PDPL) orde dua dengan bentuk seperti pada persamaan (1) dengan syarat awal dan syarat batas

$$u(x,a) + u(x,b) + u(x,c_1) + u^{(0,1)}(x,a) + u^{(0,1)}(x,b) + u^{(0,1)}(x,c_1) = f(x) \qquad \dots(7)$$

$$u(a,y) + u(b,y) + u(c_0,y) + u^{(1,0)}(a,y) + u^{(1,0)}(b,y) + u^{(1,0)}(c_0,y) = g(y) \qquad \dots(8)$$

$$u(a,a) + u(a,b) + u(a,c_1) + u(b,a) + u(b,b) + u(b,c_1) + u(c_0,a) + u(c_0,b) + u(c_0,c_1) = \lambda \qquad \dots(9)$$

Dengan $a \le c_0 \le b$ dan $a \le c_1 \le b$, serta f sebagai fungsi terhadap x, g sebagai fungsi terhadap y dan λ sebagai konstanta. Syarat awal dan syarat batas pada persamaan (7), (8) disebut syarat awal dan syarat batas *Robin*. Sedangkan syarat awal dan syarat batas pada persamaan (9) disebut syarat awal dan syarat batas *Dirichlet*.

Solusi dari persamaan (1) dapat diasumsikan dalam bentuk polinomial Taylor berderajat N untuk N suatu bilangan bulat positif sebagai berikut :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{r=0}^{N}\sum_{s=0}^{N} \alpha_{r,s}(x-c_0)^r(y-c_1)^s, \qquad a \le (c_0,c_1) \le b \\ &= \sum_{r=0}^{N}\sum_{s=0}^{N} \frac{1}{r!\,s!} u^{(r,s)}(c_0,c_1)(x-c_0)^r(y-c_1)^s, \qquad \dots(10) \end{aligned}$$

ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 1-11

Persamaan (10) merupakan polinomial Taylor berderajat N saat $(x, y) = (c_0, c_1)$, dimana $\frac{1}{r!s!}u^{(r,s)}(c_0, c_1)$ untuk $r, s = 0,1, \ldots, N$ merupakan koefisien yang akan ditentukan. Koefisien polinomial Taylor pada persamaan (10) diturunkan terhadap x dan terhadap y sebanyak n kali, diperoleh

$$\begin{aligned} u^{(n,0)}(x, y) &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{r!\,s!}u^{(n+r,s)}(c_0, c_1)(x - c_0)^r(y - c_1)^s \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_{r,s}^{(n,0)}(x - c_0)^r(y - c_1)^s \qquad \ldots(11) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} u^{(0,n)}(x, y) &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{r!\,s!}u^{(r,n+s)}(c_0, c_1)(x - c_0)^r(y - c_1)^s \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_{r,s}^{(0,n)}(x - c_0)^r(y - c_1)^s \qquad \ldots(12) \end{aligned}$$

Kemudian, persamaan (11) dan (12) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu

$$A^{(n,0)} = M^n A \qquad (13)$$

dan

$$A^{(0,n)} = M^n A^t \qquad (14)$$

Berdasarkan persamaan matriks pada persamaan (13) dan (14) maka

$$A^{(n,n)} = M^n A (M^n)^t \qquad (15)$$

4.1 Metode untuk Menentukan Solusi PDPL Orde Dua

Diberikan persamaan diferensial parsial linier (PDPL) orde dua seperti pada persamaan (1) dengan asusi solusi pada persamaan (10) atau dalam bentuk matriks, yaitu

$$u(x, y) = XAY \qquad (16)$$

dimana $X = [1 \quad (x - c_0) \quad (x - c_0)^2 \quad \ldots \quad (x - c_0)^N]$,
$Y = [1 \quad (y - c_1) \quad (y - c_1)^2 \quad \ldots \quad (y - c_1)^N]^t$, dan

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0}^{(0,0)} & \alpha_{1,0}^{(0,0)} & \cdots & \alpha_{N,0}^{(0,0)} \\ \alpha_{1,0}^{(0,0)} & \alpha_{1,1}^{(0,0)} & \cdots & \alpha_{N,1}^{(0,0)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{0,N}^{(0,0)} & \alpha_{1,N}^{(0,0)} & \cdots & \alpha_{N,N}^{(0,0)} \end{bmatrix}$$

Selain itu, koefisien-koefisien pada PDPL orde dua juga diasumsikan dapat dibentuk dalam polinomial Taylor dan persamaan matriks. Persamaan matriks dari PDPL orde dua dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\big[a_{ij}C_i M^2 A(C_j)^t + b_{ij}C_i MA(C_j M)^t + c_{ij}C_i A(C_j M^2)^t \\ + d_{ij}C_i MA(C_j)^t + e_{ij}C_i A(C_j M)^t + f_{ij}C_i A(C_j)^t\big] = G \qquad (17) \end{aligned}$$

Bentuk matriks pada persamaan (17) setelah diekspansi dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{\sigma=1}^{6} W_\sigma A Y_\sigma = G \qquad (18)$$

Jurnal Matematika Murni dan Terapan "εpsilon"
ISSN: 1978-4422
Vol.11 No.1 (Juni 2017) Hal. 1-11

dimana $W_\sigma = [w_{ij}]$, $Y_\sigma = [y_{ij}]$ untuk $\sigma = 1,2,\ldots,6$.
Persamaan matriks (18) dapat dibentuk ke dalam persamaan matriks baru dengan menggunakan $x_{i(N+1)+l,j(N+1)+k} = w_{ij} \cdot y_{kl}; k = 0,1,2,\ldots,N,$
$j = 0,1,2,\ldots,N, l = 0,1,2,\ldots,N, i = 0,1,2,\ldots,N.$ Oleh karena itu, persamaan matriks baru dari persamaan (4.42) berukuran $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ dapat ditulis sebagai

$$\sum_{\sigma=1}^{6} X_\sigma \bar{A} = \bar{G}, \tag{19}$$

dimana $X_\sigma = [x_{z,q}], z, q = 0,1,2,\ldots,(N+1)(N+1); \sigma = 1,2,\ldots,N$ dan
$\bar{A} = [\alpha_{00} \quad \alpha_{01} \quad \cdots \quad \alpha_{0N} \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \cdots \quad \alpha_{1N} \quad \cdots \quad \alpha_{N0} \quad \alpha_{N1} \quad \cdots \quad \alpha_{NN}]$
$\bar{G} = [g_{00} \quad g_{01} \quad \cdots \quad g_{0N} \quad g_{10} \quad g_{11} \quad \cdots \quad g_{1N} \quad \cdots \quad g_{N0} \quad g_{N1} \quad \cdots \quad g_{NN}]$

4.2 Bentuk Matriks dari Syarat Awal dan Syarat Batas yang Diberikan

Pada PDPL orde dua telah diberikan syarat awal dan syarat batas untuk bentuk matriks pada persamaan (7), (8) dan (9). Selanjutnya, akan ditentukan hubungan bentuk matriks berdasarkan syarat awal dan syarat batas tersebut :

$$\begin{aligned}
X^{(0)}(c_0) &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0],\\
X^{(0)}(a) &= [1 \quad h_0 \quad h_0^2 \quad \ldots \quad h_0^N],\\
X^{(0)}(b) &= [1 \quad k_0 \quad k_0^2 \quad \ldots \quad k_0^N],\\
X^{(1)}(c_0) &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]M,\\
X^{(1)}(a) &= [0 \quad 1 \quad h_0 \quad \ldots \quad h_0^{N-1}]M,\\
X^{(1)}(b) &= [0 \quad 1 \quad k_0 \quad \ldots \quad k_0^{N-1}]M,
\end{aligned} \tag{20}$$

dimana $h_0 = a - c_0$, $k_0 = b - c_0$, dan $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & N \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
Y^{(0)}(c_1) &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]^t,\\
Y^{(0)}(a) &= [1 \quad h_1 \quad h_1^2 \quad \ldots \quad h_1^N]^t,\\
Y^{(0)}(b) &= [1 \quad k_1 \quad k_1^2 \quad \ldots \quad k_1^N]^t,\\
Y^{(1)}(c_1) &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]^t M,\\
Y^{(1)}(a) &= [0 \quad 1 \quad h_1 \quad \ldots \quad h_1^{N-1}]^t M,\\
Y^{(1)}(b) &= [0 \quad 1 \quad k_1 \quad \ldots \quad k_1^{N-1}]^t M,
\end{aligned} \tag{21}$$

dimana $h_1 = a - c_1$, $k_1 = b - c_1$.

Diasumsikan bahwa fungsi $f(x)$ dan $g(y)$ dapat diekspansi sebagai

$$f(x) = \sum_{r=0}^{N} f_r (x - c_0)^r = Xf$$

dan

$$g(y) = \sum_{s=0}^{N} g_s (y - c_1)^s = gY$$

dimana $f = [f_0 \quad f_1 \quad \ldots \quad f_N]$ dan $g = [g_0 \quad g_1 \quad \cdots \quad g_N]$.
Berdasarkan asumsi solusi dari polinomial Taylor dalam bentuk matriks pada persamaan (16), yaitu

$$u(x,y) = XAY$$

maka diperoleh

$$\begin{array}{ll} u(x,a) = XAY^{(0)}(a) & u(a,y) = X^{(0)}(a)AY \\ u(x,b) = XAY^{(0)}(b) & u(b,y) = X^{(0)}(b)AY \\ u(x,c_1) = XAY^{(0)}(c_1) & u(c_0,y) = X^{(0)}(c_0)AY \\ u^{(0,1)}(x,a) = XAY^{(1)}(a) & u^{(1,0)}(a,y) = X^{(1)}(a)AY \\ u^{(0,1)}(x,b) = XAY^{(1)}(b) & u^{(1,0)}(b,y) = X^{(1)}(b)AY \\ u^{(0,1)}(x,c_1) = XAY^{(1)}(c_1) & u^{(1,0)}(c_0,y) = X^{(1)}(c_0)AY \end{array} \tag{22}$$

$$\begin{array}{ll} u(a,a) = X^{(0)}(a)AY^{(0)}(a) & u(a,b) = X^{(0)}(a)AY^{(0)}(b) \\ u(a,c_1) = X^{(0)}(a)AY^{(0)}(c_1) & u(b,a) = X^{(0)}(b)AY^{(0)}(a) \\ u(b,b) = X^{(0)}(b)AY^{(0)}(b) & u(b,c_1) = X^{(0)}(b)AY^{(0)}(c_1) \\ u(c_0,a) = X^{(0)}(c_0)AY^{(0)}(a) & u(c_0,b) = X^{(0)}(c_0)AY^{(0)}(b) \\ u(c_0,c_1) = X^{(0)}(c_0)AY^{(0)}(c_1) & \end{array} \tag{23}$$

Kemudian, persamaan (22) dan (23) disubstitusi ke dalam persamaan (7), (8), dan (9) sehingga diperoleh persamaan matriks dari syarat awal dan syarat batas yang diberikan, yaitu

$AU = f, VA = g$, dan $QAZ = \lambda$ (24)

dengan

$$U = \left(Y^{(0)}(a) + Y^{(0)}(b) + Y^{(0)}(c_1) + Y^{(1)}(a) + Y^{(1)}(b) + Y^{(1)}(c_1)\right)$$
$$V = \left(X^{(0)}(a) + X^{(0)}(b) + X^{(0)}(c_0) + X^{(1)}(a) + X^{(1)}(b) + X^{(0)}(c_0)\right)$$
$$Q = \left(X^{(0)}(a) + X^{(0)}(b) + X^{(0)}(c_0)\right)$$
$$Z = \left(Y^{(0)}(a) + Y^{(0)}(b) + Y^{(0)}(c_1)\right)$$

4.3 Metode Pembentuk untuk Solusi

Diasumsikan persamaan (4.42) dalam bentuk

$$\bar{X}\bar{A} = \bar{G} \tag{25}$$

Dengan $\bar{X} = \sum_{\sigma=1}^{6} X_\sigma$

Kemudian, dapat dibentuk matriks diperbesar dari persamaan (24) menjadi $[\bar{X}; \bar{G}]$ atau

$$\begin{bmatrix} \overline{x_{0,0}} & \overline{x_{0,1}} & \cdots & \overline{x_{0,N(N+2)}} & ; & g_{00} \\ \overline{x_{1,0}} & \overline{x_{1,1}} & \cdots & \overline{x_{1,N(N+2)}} & ; & g_{01} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & ; & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & ; & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & ; & \cdot \\ \overline{x_{N(N+2),0}} & \overline{x_{N(N+2),1}} & \cdots & \overline{x_{N(N+2),N(N+2)}} & ; & g_{NN} \end{bmatrix} \tag{26}$$

Jika masing-masing dibentuk matriks baru dari syarat awal dan syarat batas persamaan (24) yaitu $\overline{UA} = f, \overline{VA} = g^t$, dan $\overline{QA} = \lambda$, maka matriks diperbesar dari bentuk matriks yang baru menjadi $[\bar{U}; f], [\bar{V}; g^t]$, dan $[\bar{Q}; \lambda]$ atau dapat ditunjukkan sebagai

$$\begin{bmatrix} \overline{u_{0,0}} & \overline{u_{0,1}} & \cdots & \overline{u_{0,N(N+2)}} & ; & f_0 \\ \overline{u_{1,0}} & \overline{u_{1,1}} & \cdots & \overline{u_{1,N(N+2)}} & ; & f_1 \\ . & . & \cdots & . & ; & . \\ . & . & \cdots & . & ; & . \\ . & . & \cdots & . & ; & . \\ \overline{u_{N(N+2),0}} & \overline{u_{N(N+2),1}} & \cdots & \overline{x_{N(N+2),N(N+2)}} & ; & f_N \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{v_{0,0}} & \overline{v_{0,1}} & \cdots & \overline{v_{0,N(N+2)}} & ; & g_0 \\ \overline{v_{1,0}} & \overline{v_{1,1}} & \cdots & \overline{v_{1,N(N+2)}} & ; & g_1 \\ . & . & \cdots & . & ; & . \\ . & . & \cdots & . & ; & . \\ . & . & \cdots & . & ; & . \\ \overline{v_{N(N+2),0}} & \overline{v_{N(N+2),1}} & \cdots & \overline{x_{N(N+2),N(N+2)}} & ; & g_N \end{bmatrix} \tag{28}$$

dan

$$[\overline{q_{0,0}} \quad \overline{q_{0,1}} \quad \cdots \quad \overline{v_{0,N(N+2)}} \quad ; \quad \lambda] \tag{29}$$

Akibatnya, dengan menggantikan persamaan (27), (28), dan (29) oleh baris terakhir ke $2N+1$ dari persamaan (26), maka diperoleh suatu matriks diperbesar yang baru dengan bentuk sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \overline{x_{0,0}} & \overline{x_{0,1}} & \cdots & \overline{x_{0,N(N+2)}} & ; & g_{0,0} \\ \overline{x_{1,0}} & \overline{x_{1,1}} & \cdots & \overline{x_{1,N(N+2)}} & ; & g_{0,1} \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ \overline{x_{N^2-1,0}} & \overline{x_{N^2-1,1}} & \cdots & \overline{x_{N^2-1,N(N+2)}} & ; & g_{N-2,N-1} \\ \overline{u_{0,0}} & \overline{u_{0,1}} & \cdots & \overline{u_{0,N(N+2)}} & ; & f_0 \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ \overline{u_{N,0}} & \overline{u_{N.1}} & \cdots & \overline{u_{N,N(N+2)}} & ; & f_N \\ \overline{v_{0,0}} & \overline{v_{0,1}} & \cdots & \overline{v_{0,N(N+2)}} & ; & g_0 \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ \overline{v_{N,0}} & \overline{v_{N,1}} & \cdots & \overline{v_{N,N(N+2)}} & ; & g_N \\ \overline{q_{0,0}} & \overline{q_{0,1}} & \cdots & \overline{q_{N,N(N+2)}} & ; & \lambda \end{bmatrix} \tag{30}$$

Untuk menentukan matriks A maka dapat digunakan metode eliminasi Gauss atau metode operasi baris elementer sehingga dapat memenuhi asumsi solusi yang berupa persamaan matriks $u(x,y) = XAY$. Dengan kata lain, solusi pendekatan tersebut dapat ditentukan dengan menentukan matriks A yang entri-entrinya berupa koefisien polinomial Taylor.

Contoh

Diberikan PDPL orde dua dengan koefisien berupa variabel berbentuk

$$u_y - \frac{x^2}{2} u_{xx} = 0 \tag{31}$$

dengan syarat awal berbentuk $u(x,0) = x^2$

Kemudian, diasumsikan solusi dari PDPL orde dua persamaan (10) untuk $N = 2$ dalam bentuk polinomial Taylor

$$u(x,y)=\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}\alpha_{r,s}(x-c_0)^r(y-c_1)^s,\qquad (c_0,c_1)=(0,0) \tag{32}$$

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan (17) dapat dibentuk persamaan matriks, yaitu

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\left[e_{ij}C_iA(C_jM)^t-a_{ij}C_iM^2A(C_j)^t\right]=\mathbf{0} \tag{33}$$

dengan $A=\begin{bmatrix}\alpha_{00}&\alpha_{01}&\alpha_{02}\\\alpha_{10}&\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{20}&\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{bmatrix}$, $M=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$,

$M^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $(M)^t=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}$, dan

$\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

Kemudian, persamaan matriks (33) akan diekspansi menjadi

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\left[e_{ij}C_iA(C_jM)^t-a_{ij}C_iM^2A(C_j)^t\right]=\mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2}[(e_{i0}C_iA(C_0M)^t-a_{i0}C_iM^2A(C_0)^t)\\
&+(e_{i1}C_iA(C_1M)^t-a_{i1}C_iM^2A(C_1)^t)\\
&+\left(e_{i2}C_iA(C_2M)^t-a_{ij}C_iM^2A(C_j)^t\right)=\mathbf{0}\\
&\Leftrightarrow [(e_{00}C_0A(C_0M)^t-a_{00}C_0M^2A(C_0)^t)\\
&\quad+(e_{01}C_0A(C_1M)^t-a_{01}C_0M^2A(C_1)^t)\\
&\quad+(e_{02}C_0A(C_2M)^t-a_{02}C_0M^2A(C_2)^t)\\
&\quad+(e_{10}C_1A(C_0M)^t-a_{10}C_1M^2A(C_0)^t)\\
&\quad+(e_{11}C_1A(C_1M)^t-a_{11}C_1M^2A(C_1)^t)\\
&\quad+(e_{12}C_1A(C_2M)^t-a_{12}C_1M^2A(C_2)^t)\\
&\quad+(e_{20}C_2A(C_0M)^t-a_{20}C_2M^2A(C_0)^t)\\
&\quad+(e_{21}C_2A(C_1M)^t-a_{21}C_2M^2A(C_1)^t)\\
&\quad+(e_{22}C_2A(C_2M)^t-a_{22}C_2M^2A(C_2)^t)]=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

Kemudian, persamaan matriks yang telah diekspansi dan memiliki koefisien yang sama dapat dikelompokkan sesuai dengan koefisiennya masing-masing, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow [e_{00}C_0A(C_0M)^t+e_{01}C_0A(C_1M)^t+e_{02}C_0A(C_2M)^t\\
&\quad+e_{10}C_1A(C_0M)^t+e_{11}C_1A(C_1M)^t+e_{12}C_1A(C_2M)^t\\
&\quad+e_{20}C_2A(C_0M)^t+e_{21}C_2A(C_1M)^t+e_{22}C_2A(C_2M)^t\\
&\quad-[a_{00}C_0M^2A(C_0)^t+a_{01}C_0M^2A(C_1)^t+a_{02}C_0M^2A(C_2)^t\\
&\quad+a_{10}C_1M^2A(C_0)^t+a_{11}C_1M^2A(C_1)^t+a_{12}C_1M^2A(C_2)^t\\
&\quad+a_{20}C_2M^2A(C_0)^t+a_{21}C_2M^2A(C_1)^t+a_{22}C_2M^2A(C_2)^t]=\mathbf{0}\\
&\Leftrightarrow (e_{00}C_0A(C_0M)^t-a_{20}C_2M^2A(C_0)^t)=\mathbf{0}\\
&\Leftrightarrow (2C_0A(C_0M)^t-C_2M^2A(C_0)^t)=\mathbf{0}\\
&\Leftrightarrow (2A(M)^t-C_2M^2A)=\mathbf{0}
\end{aligned} \tag{34}$$

dengan $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Persamaan (34) merupakan persamaan matriks yang berukuran 3×3 dari ekspansi polinomial Taylor untuk $N = 4$.

Persamaan (34) akan dibentuk persamaan matriks baru diperoleh

$$2\left(\begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2\left(\begin{bmatrix} \alpha_{01} & 2\alpha_{02} & 0 \\ \alpha_{11} & 2\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & 2\alpha_{22} & 0 \end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2\alpha_{01} & 4\alpha_{02} & 0 \\ 2\alpha_{11} & 4\alpha_{12} & 0 \\ 2\alpha_{21} & 4\alpha_{22} & 0 \end{bmatrix}\right) - \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha_{20} & 2\alpha_{21} & 2\alpha_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\alpha_{01} & 4\alpha_{02} & 0 \\ 2\alpha_{11} & 4\alpha_{12} & 0 \\ 2\alpha_{21} - 2\alpha_{20} & 4\alpha_{22} - 2\alpha_{21} & -2\alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Selanjutnya, diketahui pada persamaan (32) di sekitar $(c_0, c_1) = (0,0)$ dan memiliki syarat awal, maka $u(x, c_1) = XAY^{(0)}(c_1)$ maka $u(x, 0) = XAY^{(0)}(0)$ dengan $X = [1 \quad x \quad x^2]$ dan $Y^{(0)} = [1 \quad 0 \quad 0]^t$, selanjutnya

$u(x, 0) = XAY^{(0)}(0)$

$x^2 = [1 \quad x \quad x^2]A[1 \quad 0 \quad 0]^t$

$[0 \quad 0 \quad 1]^t = A.Y^{(0)}(0)$ (36)

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (35) dapat dibentuk suatu matriks diperbesar sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (37)$$

Syarat awal dalam bentuk matriks pada persamaan (36), digunakan untuk mengganti baris ke $2N + 1$ ke dalam persamaan (37)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Dari persamaan (38) dapat ditentukan nilai koefisien dari polinomial Taylor untuk $N = 2$ dengan bentuk matriks diperbesar dengan menggunakan metode operasi baris elementer dari persamaan (4.66) seperti pada (Lampiran 2) maka dapat diperoleh nilai dari koefisien polinomial Taylor untuk $N = 2$, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Nilai koefisien pada matriks A di atas disubstitusi ke dalam persamaan matriks $u(x, y) = XAY$ dan diperoleh

$$u(x, y) = x^2 + x^2 y + \frac{(xy)^2}{2} \tag{39}$$

Solusi pada persamaan (39) merupakan solusi pendekatan dengan orde $N = 2$ dan dapat dituliskan

$$u(x, y) = x^2 (1 + y + \frac{y^2}{2}) \tag{40}$$

Solusi dari persamaan (40) akan konvergen ke solusi eksak $x^2 e^y$.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan diperoleh langkah-langkah untuk menentukan solusi PDP linier orde dua menggunakan metode polinomial Taylor sebagai berikut :

1. Membentuk persamaan matriks dalam bentuk polinomial Taylor dari bentuk PDPL orde dua yang diberikan.
2. Mengekspansi bentuk pada langkah 1 dan mengelompokkan setiap suku yang memiliki koefisien yang sama. Kemudian, dari ekspansi tersebut akan terbentuk persamaan matriks baru.
3. Menyelesaikan persamaan matriks pada langkah 2 hingga terbentuk suatu matriks. Kemudian, dibentuk matriks diperbesar.
4. Perhatikan syarat awal dan syarat batas yang diberikan untuk PDPL orde dua. Syarat awal dan syarat batas tersebut dibentuk dalam persamaan matriks
5. Membentuk matriks diperbesar dengan mengaplikasikan syarat awal dan syarat batas pada langkah 4.
6. Gunakan operasi baris elementer atau metode eliminasi Gauss untuk menentukan nilai dari koefisien polinomial Taylor dari langkah 5.

7. Substitusi nilai koefisien yang diperoleh dari langkah 6 ke asumsi solusi dari PDPL orde dua yang berbentuk $u(x,y) = XAY$. Jadi diperoleh solusi pendekatan dari PDPL orde dua yang diberikan.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linier Edisi 7 Jilid 1*. Interaksara. Batam.
[2] Budi, W. S. 2001. *Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya.* ITB. Bandung.
[3] Farlow, S. J. 1982. *Partia Differential Equations for Scientists and Engineers*. John Wiley and Sons. New York
[4] Gazali, Wiaria & Soedadyatmodjo. 2005. *Kalkulus.* Graha Ilmu, Yogyakarta.
[5] Imron, Chairul dan Sentot Didik S. 2007. *Modul Aljabar Linier.* Departemen Pendidikan Nasional. Surabaya.
[6] Kesan, Cenk. 2003. Chebyshev Polynomial Solutions of Second Order Linear Partial Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation.* 134: 109–124.
[7] Kesan, Cenk. 2004. Taylor Polynomial Solutions of Second Order Linear Partial Differential Equation. *Applied Mathematics and Computation*. 152: 29-41.
[8] Murphy, Michael G., *et al*. 1983. *Algebra and Trigonometry.* United States of America.
[9] Raslan, K.R *et al*. 2012. Differential Trasform Method for Solving Partial Differential Equations with Variable Coefficients. *International Journal of Physical Science.* 7(9): 1412-1419.
[10] Ross, S. L. 1984. *Differential Equation Third Edition*. John Wiley & Sons. New York.
[11] Supranto, J. 1998. *Pengantar Matriks.* Rineka Cipta. Jakarta.