APLIKASI PERKONGRUENAN DALAM MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA PEUBAH

Yuni Yulida dan Muhammad Ahsar K

Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Kampus Unlam Banjarbaru
Email: y_yulida@yahoo.com, m_ahsar@yahoo.com

ABSTRAK

Di dalam paper ini dibahas tentang menentukan eksistensi dan penyelesaian sistem persamaan linear dua peubah berbentuk:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ \vdots \qquad & \vdots \\ a_nx + b_ny &= c_n \end{aligned} \qquad (1)$$

dengan x dan y bilangan bulat, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_n$ *bilangan bulat tak nol, dengan menggunakan aplikasi perkongruenan linear.*

***Kata Kunci**: Sistem Persamaan Linear, Perkongruenan Linear.*

ABSTRACT

This paper discusses the determination of existention and solution of linear equation system with two variables written as:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ \vdots \qquad & \vdots \\ a_nx + b_ny &= c_n \end{aligned} \qquad (1)$$

where x, y are integers, and $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots, c_n$ *are non-negative integers, using the application of linear congruency.*

***Keywords**: Linear Equation System, Linear Congruency.*

1. PENDAHULUAN

Penyelesaian Sistem (1) secara umum dapat dilakukan dengan berbagai metode, seperti eliminasi, substitusi dan lainnya, tetapi sulit menentukan apakah penyelesaian yang dicari merupakan bilangan bulat atau bukan, kecuali langsung diselesaikan dengan metode tertentu tersebut sehingga terlihat jelas setelah penyelesaiannya diperoleh. Untuk keperluan ini maka peneliti akan mengkaji bagaimana cara untuk menentukan apakah ada penyelesaian dalam bilangan bulat dari sistem persamaan linear pada sistem (1) dengan menggunakan aplikasi perkongruenan linear, kemudian dilanjutkan dengan menentukan penyelesaian akhir sistem (1).

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Keterbagian

Berikut ini definisi dan teorema yang menjelaskan tentang keterbagian.

Definisi 1

Bilangan bulat a membagi habis bilangan bulat b (ditulis a/b) bila dan hanya bila ada bilangan bulat k sehingga b=ak. Jika a tidak membagi habis b maka ditulis a/b.

Berikut ini definisi dan teorema yang menjelaskan tentang keterbagian.

Teorema 1

Jika a/b dan b/c maka a/c.

Teorema 2

Jika a/b dan a/c maka a/(b+c)

Teorema 3

Jika a/b maka a/cb, untuk bilangan bulat c sebarang.

Teorema 4

Jika a/b dan a/c maka a/(bm+cm), untuk sebarang bilangan bulat m dan n.

2.2. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Faktor-faktor persekutuan dapat dikatakan sebagai pembagi-pembagi bersama dari dua atau beberapa bilangan bulat. Berikut definisi faktor persekutuan dab faktor persekutuan terbesar.

Definisi 2

Suatu bilangan bulat d adalah faktor persekutuan dari a dan b bila dan hanya bila d/a dan d/b.

Definisi 3
Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat yang tidak nol, d adalah faktor persekutuan terbesar dari a dan b (ditulis"(a,b)") bila dan hanya bila b faktor persekutuan dari a dan b. Jika c faktor persekutuan dari a dan b, maka $c \le d$

Teorema 5 (algoritma pembagian)
Jika a dan b bilangan bulat sehingga b>0 maka terdapat q dan r tunggal anggota bilangan bulat sehingga a = bq + r dengan $0 \le r < m$.

2.3. Kekongruenan

Konsep kekongruenan mempelajari lebih mendalam mengenai konsep keterbagian beserta sifat-sifatnya. Kekongruenan merupakan cara lain untuk menelaah keterbagian dalam himpunan bilangan bulat, berikut definisi dan teorema tentang keterbagian

Definisi 4
Jika m suatu bilangan bulat positif maka a kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \equiv b (\bmod m)$ *bila dan hanya bila m membagi (a-b). Jika m tidak membagi (a-b) maka dikatakan a tidak kongruen dengan b mdulo m.*

Teorema 6
$a \equiv b (\bmod m)$ *, dengan m, a dan b bilangan bulat jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian sehingga a=b+km*

Teorema 7
Setiap bilangan bulat kongruen modulo m dengan tepat di antara 0, 1, 2 3, ..., (m-1). Jika $a \equiv r (\bmod m)$ *dengan* $0 \le r < m$ *, maka r disebut residu terkecil dari a modulo m.*

Definisi 5
Himpunan bilangan bulat $r_1, r_2, ..., r_m$ *disebut sistem residu lengkap modulo m bila dan hanya bila setiap bilangan bulat kongruen modulo m dengan satu dan hanya satu diantara* $r_1, r_2, ..., r_m$.

Teorema 8
$a \equiv b (\bmod m)$ *bila dan hanya bila a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi m.*

Definisi 6
Himpunan bilangan bulat $r_1, r_2, ..., r_m$ *disebut residu lengkap modulo bila dan hanya bila setiap bilangan bulat kongruen modulo m dengan satu dan hanya satu diantara* $r_1, r_2, ...,$ *atau* r_m.

Teorema 9
Andaikan m bilangan bulat positif. Kongruensi modulo m memenuhi sifat-sifat berikut:
(i) Refleksif : Jika a bilangan bulat maka $a \equiv a \pmod{m}$
(ii) Simetris : Jika a dan b bilangan bulat sehingga $a \equiv b \pmod{m}$ *maka* $b \equiv a \pmod{m}$
(iii) Transitif : Jika a, b dan c bilangan bulat dengan $a \equiv b \pmod{m}$ *dan* $b \equiv c \pmod{m}$ *maka* $a \equiv c \pmod{m}$.

Teorema 10
Jika a, b, c dan m bilangan bulat dengan m>0 sedemikian sehingga $a \equiv b (mod\ m)$ maka
(i) $a + c \equiv b + c (mod\ m)$
(ii) $a - c \equiv b - c (mod\ m)$
(iii) $ac \equiv bc (mod\ m)$.

Teorema 11
Jika $ac \equiv bc (mod\ m)$ *dan (c,m)=1 maka* $a \equiv b (mod\ m)$.

Teorema 12
Jika $ac \equiv bc (mod\ m)$ *dan (c,m)=d maka* $a \equiv b (\mathrm{mod}\ \frac{m}{d})$.

2.4. Perkongruenan Linier

Perkongruenan linier $ax \equiv b \pmod{m}$ akan mempunyai solusi (penyelesaian) bila dan hanya bila ada bilangan bulat k dan x yang memenuhi persamaan ax=mk + b. Misalkan r memenuhi perkongruenan linier $ax \equiv b \pmod{m}$, maka setiap bilangan bulat ..., (r-3m), (r-2m), (r-m), r, (r+2m), (r3m),... memenuhi perkongruenan itu sebab a(r+km) $\equiv ar \equiv b \pmod{m}$ untuk setiap bilangan bulat k.

Diantara bilangan-bilangan bulat (r+km) dengan k = ...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...ada tepat satu dan hanya satu, katakan *s*, sehingga $0 \le s \le m$ karena tiap bilangan bulat terletak di antara dua kelipatan m yang berurutan.

Jika *s* = *r* - *km* untuk suatu bilangan bulat *k*. Dengan kata lain, *s* adalah residu terkecil modulo m yang memenuhi perkongruenan $ax \equiv b \pmod{m}$ dan $km \le r \le (k+1)m$ untuk suatu bilangan bulat *k*. Dengan kata lain, s adalah residu terkecil modulo *m* yang memenuhi perkongruenan $ax \equiv b \pmod{m}$. Selanjutnya *s* disebut solusi dari perkongruenan itu.

Teorema 13
Jika (a,m)/b, maka perkongruenan linier $ax \equiv b \pmod{m}$ *tidak memiliki solusi.*

Teorema 14
Jika (a,m)=1, maka perkongruenan linier $ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ *mempunyai tepat satu solusi*.

Andaikan solusi perkongruenan linier itu tidak tunggal misalkan *r* dan *s* masing-masing solusi dari $ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, maka $ar \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ dan $as \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$
Dengan sifat transitif diperoleh bahawa $ar \equiv as\,(\mathrm{mod}\, m)$, karena (a,m)=1 maka $r \equiv s\,(\mathrm{mod}\, m)$ ini berrati m/(r-s)

Tapi karena r dan s adalah solusi dari perkongruenan itu, maka *r* dan *s* masing-masing residu terkecil modulo m, sehingga $0 \le r < m$ dan $0 \le s < m$

Dari kedua ketidaksamaan diperoleh bahawa –m<r-s<m, tetapi m/(r-s) maka *r-s*=0 atau *r = s* .
Ini berarti bahwa solusi dari perkongruenan linier tunggal (terbukti).

Teorema 15 [1]
Jika (a,m)=d dan d/b maka perkongruenan linier $ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ mempunyai *tepat d solusi.*

2.5. Sistem Perkongruenan Linier

Berikut ini teorema yang menjelaskan tentang sistem perkongruenan linier adalah:

Teorema 16 (teorema sisa)
Sistem perkongruenan linier $x \equiv d_i \ (\mathrm{mod}\, b_i)$, *i =1, 2, 3, ... , k dengan* (b_i, b_j)*=1, untuk setiap* $i \ne j$ *memiliki solusi bersama modulo*($b_1.b_2.b_3...b_k$) *dan solusi bersama itu tunggal.*

Bukti:
Dengan menggunakan induksi matematik untuk bilangan asli k
Untuk *k=1*
Berarti $x \equiv d_1\left(\mathrm{mod}\, b_1\right)$jelas mempunyai solusi
Untuk *k=2*
Berarti membentuk sistem perkongruenan linier yaitu:

$$x \equiv d_1\left(\mathrm{mod}\, b_1\right)$$
$$x \equiv d_2\left(\mathrm{mod}\, b_2\right)$$

dengan $\left(b_1, b_2\right) = 1$

Sekarang, apakah sistem di atas mempunyai solusi bersama?
Berdasarkan definisi perkongruenan linier maka
$x \equiv d_1\left(\mathrm{mod}\, b_1\right)$ maka $x = d_1 + kb_1$ dengan k adalah bilangan bulat, kemudian substitusi ke persamaan yang kedua :

$$d_1 + k_1 b_1 = d_2\left(\mathrm{mod}\, b_2\right)$$
$$k_1 b_1 = d_2 - d_1\left(\mathrm{mod}\, b_2\right) \qquad (***)$$

dengan k_1 suatu variabel
karena $(b_1, b_2) = 1$ maka perkongruenan (***) ini mempunyai satu solusi untuk k_1 modulo b_2 katakanlah t, maka $k_1 = t + k_2 b_2$ untuk suatu k_2 memenuhi perkongruenan terakhir ini.

Jadi:

$$x = d_1 + kb_1 = d_1 + (t + k_2 b_2) b_1$$

$$x = d_1 + tb_1 + k_2 b_1 b_2$$

$$x \equiv (d_1 + tb_1)(\mathrm{mod}\, b_1 b_2)$$

perkongruenan memenuhi untuk $k=2$
untuk sistem $x \equiv d_i \; (\mathrm{mod}\, b_i) \quad n = 1, 2, 3, \ldots, (r-1)$ mempunyai solusi bersama misalkan solusinya s maka sistem dapat dinyatakan sebagai suatu perkongruenan yaitu:

$$x \equiv s\,(\mathrm{mod}\, b_1.b_2.b_3..b_{r-1})$$

$$x \equiv d_r\,(\mathrm{mod}\, b_r)$$

Sistem di atas mempunyai solusi bersama mod $(b_1 b_2 b_3 \ldots b_r)$ karena $(b_1 b_2 b_3 \ldots b_{r-1}.b_r) = 1$ sebab b_i dan b_j saling prima untuk $i \neq j$. Sehingga terbukti bahwa sistem perkongruenan $x \equiv d_i \; (\mathrm{mod}\, b_i) \quad n = 1, 2, 3, \ldots, r$ mempunyai solusi.

Akan dibuktikan bahwa solusi itu tunggal
Misalkan r dan s adalah solusi bersama dari sistem tersebut maka

$$r \equiv d_i \; (\mathrm{mod}\, b_i) \quad dan$$

$$s \equiv d_i \; (\mathrm{mod}\, b_i)$$

sehingga

$$r - s \equiv (d_i - d_i)(\mathrm{mod}\, b_i)$$

$$r - s \equiv 0\,(\mathrm{mod}\, b_i)$$

maka $b_i \big|_{(r-s)}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, k$.

Jadi r-s suatu keli[atan persekutuan dari $b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$ karena $(b_i, b_j) = 1$ untuk $i \neq j$ maka ($(b_1, b_2, b_3, \ldots b_k)\big|_{(r-s)}$. Tapi r dan s adalah solusi perkongruenan, berarti r dan s adalah residu terkecil modulo ($b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$) sehingga –($b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$)< r-s < ($b_1, b_2, b_3, \ldots b_k$). Mengingat bahwa (r-s) adalah kelipatan persekutuan dari $b_1 b_2 b_3 \ldots b_k$ dan $(b_i, b_j) = 1$ untuk $i \neq j$ dapat disimpulkan r-s = 0 atau r = s.
Jadi solusi bersama dari sistem $x \equiv d_i \; (\mathrm{mod}\, b_i) \quad n = 1, 2, 3, \ldots, k$ tunggal.

Teorema 17 [1]
Sistem perkongruenan linier $x \equiv b_i \pmod{m_i}$, *i =1, 2, 3, ... , k dan* $M_i = (m_1.m_2 \ldots m_k) : m_i$, *i =1, 2, 3, ... , k dan* s_i *adalah solusi* $M_i x \equiv 1 \pmod{m_i}$, *i =1, 2, 3, ... , k maka* $s = a_1 s_1 M_1 + a_2 s_2 M_2 + \ldots + a_k s_k M_k$ *memenuhi sistem* [1].

Teorema 18 [2]
Sistem perkongruenan linier $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \equiv b_i \pmod{m_i},\ i = 1, \ldots, r$ *mempunyai solusi jika dan hanya jika sistem persamaan linier* $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n - m_i y_i = b_i$, y_i *(tidak diketahui) merupakan anggota Z mempunyai solusi dalam himpunan bilangan bulat.*

Teorema 19 [2]
Sistem perkongruenan linier $a_i x \equiv b_i \pmod{m_i},\ m_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, r$ memiliki solusi jika dan hanya jika $(a_i, b_i) \mid c_i$, $i = 1, \ldots, n$ dan $(a_i b_j, a_j b_i) \mid a_i c_j - a_j c_i$; $i, j = 1, \ldots, n$.

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi literatur. Peneliti mengumpulkan buku/bahan bacaan yang berhubungan dengan konsep sistem linear dua peubah, perkongruenan dan sistem perkongruenan linear untuk dikaji lebih lanjut.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan Sistem (1), untuk memenentukan penyelesaian Sistem (1) dengan menggunakan aplikasi perkongruenan linear ada dua langkah yang dilakukan yaitu

1. Menentukan Eksistensi penyelesaian bilangan bulat Sistem (1)

1.1. Sistem (1) diubah dalam bentuk sistem perkongruenan linear (pilih salah satu dalam bentuk variabel *x* atau *y*) dengan menggunakan Definisi 4 dan Teorema 6. Jika dipilih dalam variabel *x* maka Sistem (1) menjadi

$$\begin{aligned} a_1 x &\equiv c_1 \pmod{b_1} \\ a_2 x &\equiv c_2 \pmod{b_2} \\ &\vdots \\ a_n x &\equiv c_n \pmod{b_n}. \end{aligned} \tag{2}$$

atau jika dipilih variable *y* maka berbentuk:

$$\begin{aligned} &b_1 y \equiv c_1 \pmod{a_1} \\ &b_2 y \equiv c_2 \pmod{a_2} \\ &\vdots \\ &b_n y \equiv c_n \pmod{a_n}. \end{aligned} \tag{3}$$

1.2. Menentukan eksistensi penyelesaian bilangan bulat dari sistem perkongruenan linear yang telah dibentuk.

Sistem (1) mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika sistem perkongruenan linear mempunyai penyelesaian. Ini berarti Sistem (1) akan memiliki penyelesaian bilangan bulat jika Sistem (2) atau (3) memiliki penyelesaian. Untuk keperluan itu maka harus diselidiki Sistem (2) atau (3) terlebih dahulu.

Misalkan dipilih Sistem (2). Sistem (2) dapat ditulis menjadi $a_i x \equiv c_i \pmod{b_i}$, dengan $b_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$. Sistem (2) memiliki penyelesaian jika dan hanya jika $(a_i, b_i) | c_i$, $i = 1, \ldots, n$ dan $(a_i b_j, a_j b_i) | a_i c_j - a_j c_i$; $i, j = 1, \ldots, n$ (lihat kembali Teorema 19)

Jika langkah ini terpenuhi, Sistem (2) atau (3) memiliki penyelesaian, berakibat Sistem (1) memiliki penyelesaian bilangan bulat. Dengan kata lain eksistensi penyelesaian bilngan bulat Sistem (1) dijamin. Selanjutkan, jika tidak terpenuhi maka berhenti sampai langkah ini.

2. Menentukan penyelesaian dari Sistem (1)

2.1. Jika pada langkah 1 dijamin eksistensi penyelesaian bilangan bulat maka kembali ke langkah 1.1, dengan mengunakan Sistem (2) yaitu $a_i x \equiv c_i \pmod{b_i}$ atau Sistem (3) yaitu $b_i y \equiv c_i \pmod{a_i}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$. Kemudian diubah dalam sistem perkongruenan linier yang lebih sederhana yaitu koefisien variabel *x*-nya adalah 1.

Sistem (2) dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} &x \equiv d_1 \pmod{e_1} \\ &x \equiv d_2 \pmod{e_2} \\ &\vdots \\ &x \equiv d_n \pmod{e_n} \end{aligned} \tag{4}$$

dengan ketentuan nilai $e_1 = b_1$ untuk kasus pada Teorema 11 atau $e_1 = \dfrac{b_1}{s}$ untuk kasus pada Teorema 12 .

Sebagai catatan, jika $a_i x \equiv c_i \pmod{b_i}$ yang digunakan maka $b_1 \neq b_2 \neq \ldots \neq b_i$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$, jika ada nilai yang sama maka digunakan alternatif lain yaitu Sistem (3) berbentuk $b_i y \equiv c_i \pmod{a_i}$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$, lakukan hal yang sama mengubah koefisien *y* menjadi 1, dengan catatan $a_1 \neq a_2 \neq \ldots \neq a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Jika Sistem (3) terdapat modulo yang sama maka penyelesaian tidak dapat diperoleh kesimpulan dengan cara ini karena modulo pada sistem perkongruenan yang dibentuk harus tidak sama dan saling prima. Jika pada Sistem (2) atau (3) tidak memenuhi karena ada modulo yang sama maka harus dicari alternatif penyelesaian yang lain.

2.2. Menentukan penyelesaian Sistem (1)

Sistem (4) dapat ditulis menjadi $x \equiv d_i \pmod{e_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dengan $(e_i, e_j) = 1$, berdasarkan Teorema 16 untuk setiap $i \neq j$ memiliki penyelesaian bersama modulo $(e_1.e_2.e_3...e_n)$ dan penyelesaian bersama itu tunggal. Penyelesaian Sistem tunggal, asalkan diperoleh suatu penyelesaian berupa nilai x dan y yang tunggal.

Kemudian untuk menentukan penyelesaian sistem (1), pandang Sistem perkongruenan linear $x \equiv d_i$ (mod e_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ dan $M_i = (e_1.e_{2...}e_n):e_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ dan s_i adalah solusi $M_i x \equiv 1 \pmod{e_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ maka $s = d_1 s_1 M_1 + d_2 s_2 M_2 + \ldots + d_n s_n M_n$ memenuhi sistem (Teorema 17). Jadi penyelesian Sistem (1) adalah penyelesaian bersama modulo$(e_1.e_2.e_3...e_n)$. atau dapat dituliskan $x \equiv s$ (mod $(e_1.e_2...e_n)$), ubah nilai s dalam perkonruenan paling sederhana, diperoleh nilai x sebagai penyelesaian akhir dari Sistem (1). Kemudian nilai x yang telah diperoleh substitusi ke salah satu persamaan pada Sistem (1) sehingga akan diperoleh nilai y sebagai penyelesaian. Jadi penyelesaian akhir dari Sistem (1) diperoleh berupa nilai x dan y yang tunggal.

5.3. Aplikasi dalam Menentukan Penyelesaian Sistem Persamaaan

Berikut beberapa contoh penggunaan aplikasi perkongruenan dalam menyelesaikan Sistem (1).

Contoh 1:

Tentukan penyelesaian dalam bilangan bulat dari sistem persamaan linier berikut ini dengan aplikasi perkongruenan linear:

$$\begin{aligned} 6x - y &= 3 \\ 5x - 2y &= -1 \end{aligned} \tag{5}$$

Penyelesaian

Menentukan eksistensi penyelesaian bilangan, dengan mengubah sistem di atas dalam bentuk perkongruenan berikut

$$\begin{aligned} 6x &\equiv 3 \pmod{1} \\ 5x &\equiv -1 \pmod{2} \end{aligned} \tag{6}$$

dengan a_1=6 b_1=1 c_1=3
a_2=5 b_2=2 c_2=-1

syarat 1: $(a_i, b_i) | c_i$

untuk persamaan pertama terpenuhi karena $(6,1)|3$. Untuk persamaan kedua terpenuhi karena $(5,2)|-1$. Jadi Sistem (5) memenuhi syarat 1.

Syarat 2: $(a_i b_j, a_j b_i)|a_i c_j - a_j c_i$

$$(a_1 b_2, a_2 b_1)|a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$(12,5)|-6-15$$

$$1|-31$$

Jadi Sistem (5) memenuhi syarat 2. Jadi Sistem (5) memiliki penyelesaian bilangan bulat *Langkah kedua menentukan penyelesaian Sistem (5).* Perhatikan kembali Sistem (6), diubah menjadi:

$$x \equiv 0 \pmod 1$$

$$x \equiv 1 \pmod 2$$

diketahui bahwa: d_1=0 e_1=1 M_1=2

d_2=1 e_2=2 M_2=1

sehingga diperoleh perkongruenan:

$$2x \equiv 1 \pmod 1$$

$$x \equiv 1 \pmod 2$$

menjadi

$$x \equiv 0 \pmod 1 \qquad (7)$$

$$x \equiv 1 \pmod 2$$

berdasarkan Sistem (7) diperoleh s_1= 0 dan s_2=1

$$s = d_1.s_1.M_1 + d_2.s_2.M_2$$

$$= 0.0.2 + 1.1.1$$

$$=1.$$

Jadi penyelesaian sistem (7) adalah $x \equiv 1 \pmod 2$, karena bentuk ini yang sederhana, diperoleh nilai s=1 dalam perkongruenan tidak berubah lagi dan berarti nilai x=1 sebagai penyelesaian Sistem (5). Kemudian nilai x = 1 substitusi ke salah satu persamaan pada sistem persamaan linear sehingga diperoleh nilai y= 3. Jadi himpunan penyelesaian sistem (5) adalah {1,3}.

Contoh 2: Tentukan penyelesaian dalam bilangan bulat dari sistem persamaan linear berikut ini dengan aplikasi perkongruenan linear:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ x + 3y &= 5 \\ 3x + y &= 15 \\ 2x + 5y &= 10 \end{aligned} \qquad (8)$$

Penyelesaian

Menentukan eksistensi penyelesaian bilangan, dengan mengubah sistem di atas dalam bentuk perkongruenan berikut:

$$x \equiv 5 \pmod 2$$
$$x \equiv 5 \pmod 3$$
$$3x \equiv 15 \pmod 1$$
$$2x \equiv 10 \pmod 5$$

menjadi

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 2 \\ x &\equiv 2 \pmod 3 \\ 3x &\equiv 0 \pmod 1 \\ 2x &\equiv 0 \pmod 5 \end{aligned} \qquad (9)$$

dengan $a_1 = 1$ $b_1 = 2$ $c_1 = 1$
$a_2 = 1$ $b_2 = 3$ $c_2 = 2$
$a_3 = 3$ $b_3 = 1$ $c_3 = 0$
$a_4 = 2$ $b_4 = 5$ $c_4 = 0$

syarat 1: $(a_i, b_i) | c_i$

Persamaan pertama terpenuhi karena $(1,2)|1$, persamaan kedua terpenuhi karena $(1,3)|2$, persamaan pertama terpenuhi karena $(3,1)|0$. Untuk persamaan kedua terpenuhi karena $(2,5)|0$. Jadi Sistem Memenuhi syarat 1

Syarat 2: $(a_i b_j, a_j b_i) | a_i c_j - a_j c_i$

Untuk persamaan pertama dan kedua

$(3,2)|1$

Untuk persamaan pertama dan ketiga

$(1,6)|-3$

Untuk persamaan pertama dan keempat

$(5,4)|-2$

Untuk persamaan kedua dan ketiga

$(1,9)|-6$

Untuk persamaan kedua dan keempat

$(5,6)|-4$

Untuk persamaan ketiga dan keempat

$(15,2)|0$ memenuhi syarat 2

Jadi eksistensi penyelesaian bilangan bulat dari Sistem (8).

*Langkah kedua menentukan penyelesaian Sistem (*8*).* Perhatikan kembali Sistem (9), diubah menjadi:

$$x \equiv 1 \pmod 2$$
$$x \equiv 2 \pmod 3$$
$$x \equiv 0 \pmod 1$$
$$x \equiv 0 \pmod 5$$

diketahui bahwa

d_1=1 e_1=2 M_1=15
d_2=2 e_2=3 M_2=10
d_3=0 e_3=1 M_3=30
d_4=0 e_4=5 M_4= 6

sehingga diperoleh sistem perkongruenan berikut:

$$15x \equiv 1 \pmod 2$$
$$10x \equiv 1 \pmod 3$$
$$30x \equiv 1 \pmod 1$$
$$6x \equiv 1 \pmod 5$$

menjadi

$$x \equiv 1 \pmod 2$$
$$x \equiv 1 \pmod 3$$
$$x \equiv 0 \pmod 1$$
$$x \equiv 1 \pmod 5$$

berdasarkan sistem perkongruenan linear di atas diperoleh s_1= 1 s_2=1 s_3= 0 s_4=1

$$s = d_1.s_1.M_1 + d_2.s_2.M_2 + d_3.s_3.M_3 + d_4.s_4.M_4$$
$$= 1.15.1 + 2.10.1 + 0.0.30 + 0.1.6$$
$$=35$$

Jadi penyelesaian sistem perkongruenan linear adalah

$$x \equiv 35 (\text{mod } (2.3.1.5))$$
$$x \equiv 35 (\text{mod } 30) \Rightarrow x \equiv 5 (\text{mod } 30).$$

karena bentuk ini yang sederhana dan diperoleh nilai s=5, dan sekaligus nilai x= 5 sebagai penyelesaian sistem persamaan linear. Kemudian nilai x=5 substitusi ke salah satu persamaan pada sistem persamaan linear (8) sehingga diperoleh nilai y = 0. Jadi Himpunan penyelesaian Sistem (8) adalah {5,0}.

5. KESIMPULAN

Penyelesaian Sistem (1) dengan menggunakan Perkongrueanan linear terdiri dari dua langkah.Langkah pertama mentransformasi menjadi sistem perkongruenan linear. Selanjutnya menentukan eksistensi penyelesaian dalam bilangan bulat Sistem (1), jika dan hanya jika $(a_i, b_i) \mid c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ dan $(a_i b_j, a_j b_i) \mid a_i c_j - a_j c_i\ ; i, j = 1, \ldots, n$. Jika tidak maka tidak dapat dilanjutkan lagi ke langkah berikutnya. Jika eksistensi penyelesaian bilangan bulat dijamin maka dilanjutkan menentukan penyelesaian dari sistem (1).

6. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Sukarman, H.1993. *Teori Bilangan*. Jakarta. Universitas Terbuka, Depdikbud.

[2]. Smarandache, F. 1987. *Algorithms for Solving Linier Congruences and Systems of Linier Congruences*. Jurnal Gamma year X, Nos.1-2, october, hal: 5-6.

[3]. Ahsar, M. & Soesanto, O. 2006. Menentukan Solusi Persamaan Linier Diophantus (PDL) melalui Solusi Perkongruenan Linier. *Seminar Nasional Teori dan Aplikasi Statistika: Kemarin, Hari ini dan Esok*, Kerjasama Jurusan Matematika –UNM dengan IKAPSTAT ITS, Februari.

[4]. Niven, I. 1972. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Third Edition. New York, Wiley.

[5]. Rosen, K. H. 1993. *Elementary Number Theory And Its Applications*. Third Edition. New Jersey, Wesley Publishing Company.

[6]. Schrijver, A. 1987. *Theory of Linier and Integer Programming*. Amsterdam, Departemen of Econometrics-Tilburg University.

[7]. Wirasto, R.M. 1972. *Pengantar Ilmu Bilangan*. Yogyakarta, Yayasan Pembinaan Fkie-IKIP Yogyakarta.