KESTABILAN SISTEM PREDATOR-PREY LESLIE

Dewi Purnamasari, Faisal, Aisjah Juliani Noor
Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 35, 8 Banjarbaru

ABSTRAK

Dalam kehidupan nyata seringkali muncul dalam model matematika yang menggambarkan fenomena-fenomena alam baik fisik maupun non fisik. Dalam penerapannya model matematika tersebut biasanya berbentuk sistem persamaan diferensial. Salah satu model Matematika yang merupakan sistem persamaan diferensial non linier adalah sistem Predator-Prey yang dikemukakan oleh Leslie (1948). Sistem Predator-Prey merupakan model interaksi antara dua populasi yang terdiri dari dua persamaan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - cyx$$

$$\frac{dy}{dt} = ey - f\,\frac{y^2}{x}$$

dengan a, b, c, e dan f adalah konstanta positif. Dalam sistem Predator-Prey Leslie, hubungan masing-masing variabel pada proses interaksi antara prey dan predator saling terkait dan dipengaruhi oleh perubahan konstanta sistem, sehingga akan berpengaruh terhadap kestabilan sistem

Penelitian ini dilaksanakan dengan cara studi literatur dari buku dan jurnal-jurnal yang terkait dengan materi yang relevan dengan tinjauan yang dilakukan. Menentukan kestabilan sistem dimulai dengan mencari titik kesetimbangan dari sistem kemudian sistem dilinierisasi. Dari linierisasi sistem akan dicari akar karekteristik atau nilai eigen. Nilai eigen tersebut yang akan memperlihatkan kestabilan pada titik kesetimbangan sistem.

Hasil penelitian yang dilakukan menunjukkan bahwa sistem Predator-Prey Leslie stabil pada titik kesetimbangan K_2. Sedangkan pada titik kesetimbangan K_1 sistem Predator-Prey Leslie tidak stabil.

Kata Kunci: *Predator Prey Leslie, Matriks Jacobian, Kesetimbangan.*

ABSTRACT

Mathematical models are commonly used to describe physical and non-physical phenomena which appeared in the real world. Generally speaking, the application of mathematical models is usually formed into a differential equation system. For example, Predator-Prey Leslie system is one mathematical model of non-linier differential equation system which has been introduced by Leslie (1948). This system describes an interaction model between two populations which contain two equations as follows :

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - cyx$$

$$\frac{dy}{dt} = ey - f\frac{y^2}{x}$$

where a, b, c, e and f are positive constants.

In the Predator-Prey Leslie system, the relationship between each variable in the interaction process between prey and preadtor is dependend and influenced by changing value of system. Therefore, this will effect to the stability system.

The method of this research is a study of literature from relevant books and journals. To obtain a stability system, the stability poits of a system have to be found firest, then continue with linierization. From this, it will obtained characteristic roots or eigen values. These values will show a stable state at system equilibrium points.

As a result, it is found that Predator-Prey Leslie system, in this case, reaches a stability at equilibrium point K_2, but not the case at K_1.

***Keywords** : Predator-Prey Leslie, Jacobian Matrix, Equilibrium.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan Diferensial tersebut seringkali muncul dalam model matematika. Dalam penerapannya model matematika biasanya muncul dalam bentuk sistem persamaan diferensial Salah satu model matematika yang merupakan sistem persamaan diferensial non linier adalah sistem Predator-Prey yang dikemukakan oleh Leslie (1948). Sistem Predator-Prey merupakan model interaksi antara dua populasi yang terdiri dari dua persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - cyx \qquad (1)$$
$$\frac{dy}{dt} = ey - f\frac{y^2}{x}$$

dengan *x, y* adalah variabel yang bergantung pada *t,* sedangkan *a, b, c, e* dan *f* adalah konstanta positif [1].

Dalam sistem Predator-Prey Leslie, hubungan masing-masing variabel pada proses interaksi antara prey dan predator saling terkait dan dipengaruhi oleh perubahan konstanta sistem, sehingga akan berpengaruh terhadap kestabilan sistem.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1 [2]

Suatu persamaan yang meliputi turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut Persamaan Diferensial. Jika turunan fungsi hanya tergantung pada satu variabel bebas disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan bila tergantung pada lebih dari satu variabel disebut Persamaan Diferensial Parsial (PDP).

2.2 Sistem Persamaan Diferensial NonLinier

Persamaan yang terdiri dari dua atau lebih persamaan yang saling terkait maka dikategorikan sebagai sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial orde satu disajikan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
y'_1 &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
y'_2 &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\vdots \\
y'_n &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Dengan bentuk umumnya sebagai berikut :
$y'_i = f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $i = 1,2, \ldots ,n$ dan $a \le t \le b$. Jika fungsi $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bergantung pada t, maka sistem itu disebut sistem persamaan diferensial orde satu, dan ketika fungsi tersebut tidak linier maka sistem itu disebut sistem persamaan diferensial non linier orde satu. Untuk mengetahui solusi dari sistem persamaan diferensial non linier maka sistem perlu diubah ke dalam bentuk sistem persamaan linier. Linierisasi sistem tersebut menggunakan Matriks Jacobian [3].

2.3 Matriks Jacobian

Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial non linier sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\
\frac{dy}{dt} &= g(x, y)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

dengan x dan y adalah variabel yang bergantung pada t. Persamaan (3) memiliki titik kesetimbangan pada (x_0, y_0). Bila persamaan (3) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier, maka diperlukan linierisasi sistem dengan menggunakan Matriks Jacobian [4].

Bentuk Matriks Jacobian dari persamaan (9) sebagai berikut :

$$
J(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}
\tag{4}
$$

Proses Linierisasi dari suatu sistem persamaan diferensial non linier memerlukan titik kesetimbangan dari sistem itu sendiri [5]. Sehingga dari matriks Jacobian pada persamaan (4) menjadi sebagai berikut :

$$
J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}
\tag{5}
$$

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

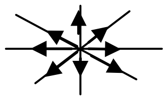
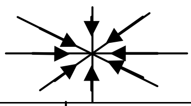
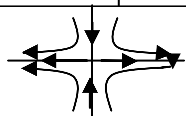
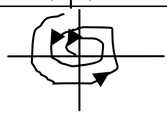
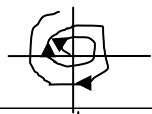
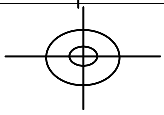
Definisi 2.2 [6]

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol **x** *di dalam R^n dinamakan vektor eigen (eigen vektor) dari A jika A***x** *adalah kelipatan skalar dari* **x***; yakni,*

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{6}$$

Skalar λ dinamakan nilai eigen (eigen value) dari A dan **x** *dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.*

2.5 **Kestabilan Titik Kesetimbangan dari Sistem *Otonomus***

x'= Ax Nilai eigen	det(λ - A) = 0 Tipe titik kesetimbangan	det A ≠ 0 stabilitas	Ruang Fase
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil	
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik	
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Titik pelana	Tidak stabil	
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$ $a > 0$	Titik spiral	Tidak stabil	
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$ $a < 0$	Titik spiral	Stabil asimtotik	
$\lambda_1 = ib, \lambda_2 = -ib$	Pusat atau titik spiral (fokus)	Tak tentu	

Tabel 1. Stabilitas Sistem Otonomus Non Linier [4]

2.6 Titik Kesetimbangan

Titik (x_1,x_2) merupakan titik kesetimbangan suatu persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{7}$$

Jika $f(t,x) = 0$ untuk semua nilai t. Oleh karena itu, maka (x_1,x_2) adalah penyelesaian sistem untuk semua t. Penyelidikan kestabilan titik kesetimbangan sistem harus terlebih dahulu mengetahui solusi sistem tersebut [7].

2.7 Kestabilan Sistem Persamaan Diferensial

Titik kesetimbangan dikatakan stabil jika untuk sebarang syarat awal yang cukup dengan titik kesetimbangan maka orbit (trayektori) dari penyelesaian tetap dekat dengan penyelesaian di titik kesetimbangannya. Titik kesetimbangan dikatakan stabil asimtotik jika titik kesetimbangan tersebut stabil dan trayektori dari penyelesaian yang dekat menuju titik kesetimbangan untuk t menuju tak hingga [7].

2.8 Sistem Predator-Prey Leslie

Pada tahun 1948 Ilmuwan Leslie mengemukakan suatu sistem Predator-Prey sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - cyx$$
$$\frac{dy}{dt} = ey - f\frac{y^2}{x} \tag{8}$$

dengan x, y adalah variabel yang bergantung pada t, sedangkan a, b, c, e dan f adalah konstanta positif [1].

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem Predator-Prey Leslie dapat ditentukan jika $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ sama dengan nol, dengan demikian persamaan (1) menjadi

$$\begin{aligned} ax - bx^2 - cxy &= x(a - bx - cy) = 0 \\ ey - f\frac{y^2}{x} &= y(e - f\frac{y}{x}) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Hal ini mengakibatkan terdapat dua buah titik kesetimbangan yakni K_1 (a/b, 0) dan titik $K_2\left(\frac{fa}{ce+fb}, \frac{ae}{ce+fb}\right)$.

3.2 Linierisasi Sistem

Sistem Predator-Prey Leslie merupakan sistem persamaan diferensial non linier, untuk itu dalam mempermudah proses perhitungan perlu merubah sistem dari sistem persamaan diferensial non linier menjadi sistem persamaan diferensial linier dengan menggunakan matriks Jacobian. Hanya perlu menentukan turunan parsial dari setiap komponen pada vektor titik kesetimbangan untuk menghasilkan sistem linier. linierisasi menggunakan matriks Jacobian akan menghasilkan bentuk sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(ax - bx^2 - cxy)}{\partial x} & \frac{\partial(ax - bx^2 - cxy)}{\partial y} \\ \frac{\partial(ey - f\frac{y^2}{x})}{\partial x} & \frac{\partial(ey - f\frac{y^2}{x})}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a - 2bx - cy & -cx \\ f\frac{y^2}{x^2} & e - 2f\frac{y}{x} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Atau dapat ditulis dengan bentuk

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a-2bx-cy & -cx \\ f\dfrac{y^2}{x^2} & e-2f\dfrac{y}{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{11}$$

3.3 Kestabilan Sistem Predator-Prey Leslie Pada Titik Kesetimbangan

3.3.1 Titik Kesetimbangan $K_1(a/b,0)$

Kesetimbangan sistem Predator-Prey Leslie pada titik kesetimbangan $K_1(a/b,0)$ dapat diketahui dengan mensubtitusikan titik kesetimbangan tersebut ke dalam persamaan (11)

$$J(a/b,0) = \begin{bmatrix} a-2b(a/b)-c(0) & -c(a/b) \\ -f\dfrac{(0)^2}{(a/b)^2} & e+2f\dfrac{(0)}{(a/b)} \end{bmatrix}$$

$$J(a/b,0) = \begin{bmatrix} -a & -c(a/b) \\ 0 & e \end{bmatrix} \tag{12}$$

Atau dapat ditulis dalam bentuk seperti

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -a & -c(a/b) \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{13}$$

Persamaan (13) merupakan penyelesaian nontrivial jika determinan

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & -c(a/b) \\ 0 & e-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

Dari persamaan (36) akan didapatkan persamaan karakteristik

$$(-a-\lambda)(e-\lambda)-(0)(-ca/b)=0$$

$$\Leftrightarrow (-a-\lambda)(e-\lambda)=0 \tag{15}$$

Apabila persamaan (15) difaktorkan maka persamaan karakteristik tersebut mempunyai nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = -a$$

$$\lambda_2 = e \tag{16}$$

Dari persamaan (1) diketahui bahwa konstanta *a, e > 0,* sehingga mengakibatkan sistem Predator-Prey Leslie pada titik kesetimbangan $K_1(a/b,0)$ tidak stabil dengan tipe titik kesetimbangan titik pelana (saddle).

3.3.2 Titik Kesetimbangan K_2

Kesetimbangan sistem Predator-Prey Leslie pada titik kesetimbangan $K_2\left(\dfrac{fa}{ce+fb}, \dfrac{ae}{ce+fb}\right)$ dapat diketahui dengan mensubtitusikan titik kesetimbangan tersebut ke dalam persamaan (11).

$$J\left(\frac{fa}{ce+fb},\frac{ae}{ce+fb}\right)=\begin{bmatrix} a-2b\left(\frac{fa}{ce+fb}\right)-c\left(\frac{ae}{ce+fb}\right) & -c\left(\frac{fa}{ce+fb}\right) \\ f\,\dfrac{\left(\frac{ae}{ce+fb}\right)^2}{\left(\frac{fa}{ce+fb}\right)^2} & e-2f\,\dfrac{\left(\frac{ae}{ce+fb}\right)}{\frac{fa}{ce+fb}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\dfrac{bfa}{ce+fb} & -\dfrac{acf}{ce+fb} \\ \dfrac{ce^2}{f} & -e \end{bmatrix} \tag{17}$$

Atau dapat ditulis dalam bentuk i

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\dfrac{bfa}{ce+fb} & -\dfrac{acf}{ce+fb} \\ \dfrac{ce^2}{f} & -e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{18}$$

Persamaan (18) mempunyai penyelesaian nontrivial jika determinan

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{bfa}{ce+fb}-\lambda & -\dfrac{acf}{ce+fb} \\ \dfrac{ce^2}{f} & -e-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{19}$$

Dari persamaan (39) akan didapatkan persamaan karakteristik berikut

$$\left(-\frac{bfa}{ce+fb}-\lambda\right)(-e-\lambda)-\left(-\frac{acf}{ce+fb}\right)\left(\frac{ce^2}{f}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{ebfa}{ce+fb}\right)+\left(\frac{bfa}{ce+fb}\right)\lambda+e\lambda+\lambda^2+\left(\frac{e^2ac^2f}{f(ce+fb)}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+\left(e+\frac{bfa}{ce+fb}\right)\lambda+\left(\frac{e^2ac^2f}{f(ce+fb)}+\frac{ebfa}{ce+fb}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+\left(\frac{e^2c+ebf+bfa}{ce+fb}\right)\lambda+\left(\frac{e^2ac^2f+ebf^2a}{f(ce+fb)}\right)=0 \tag{20}$$

dengan $A = 1$, $B = \left(\frac{e^2c+ebf+bfa}{ce+fb}\right)$ dan $C = \left(\frac{e^2ac^2f+ebf^2a}{f(ce+fb)}\right)$, sehingga persamaan (20) dapat dituliskan dengan bentuk

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0 \tag{21}$$

Apabila persamaan (40) difaktorkan maka persamaan karakteristik tersebut mempunyai nilai eigen yaitu :

$$\lambda_{12} = \frac{-\left(\frac{e^2c + ebf + bfa}{ce + fb}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{e^2c + ebf + bfa}{ce + fb}\right)^2 - 4\left(\frac{e^2ac^2 f + ebf^2 a}{f(ce + fb)}\right)}}{2} \quad (22)$$

Atau dapat dituliskan

$$\lambda_{12} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2} \quad (23)$$

dengan D adalah diskriminan.

Diketahui semua konstanta pada sistem Predator-Prey Leslie adalah positif sehingga nilai B dan C pada persamaan (23) selalu positif ($B, C > 0$). Berdasarkan teori diskriminan maka ada tiga kemungkinan nilai eigen yang memenuhi kestabilan sistem Predator-Prey Leslie pada titik kesetimbangan $K_2\left(\frac{fa}{ce+fb}, \frac{ae}{ce+fb}\right)$ yaitu :

1) Diskriminan persamaan (23) kurang dari nol ($D < 0$) dan $B > 0$, menghasilkan nilai eigen berupa bilangan kompleks yang bagian riil nya kurang dari nol. Hal tersebut mengakibatkan sistem Predator-Prey Leslie stabil asimtotik pada titik kesetimbangan $K_2\left(\frac{fa}{ce+fb}, \frac{ae}{ce+fb}\right)$ dengan tipe titik kesetimbangan spiral.
2) Diskriminan dari persamaan (23) lebih dari nol ($D > 0$), $B > 0$ dan $C > 0$, nilai eigen dapat diketahui dengan proses berikut :
   Diketahui $B = \sqrt{B^2}$ dan $\sqrt{B^2 - 4C} < \sqrt{B^2}$ maka $\sqrt{B^2 - 4C} < B$ atau dapat dituliskan $\sqrt{D} < B$. Sehingga dari persamaan (40) diperoleh :

   $$\lambda_1 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2} \text{ dan } \lambda_2 = \frac{-B - \sqrt{D}}{2} \quad (48)$$

   karena $\sqrt{D} < B$, berdasarkan opersai penjumlahan dalam matematika maka diperoleh kedua nilai eigen adalah riil negatif. Hal tersebut mengakibatkan sistem Predator-Prey Leslie stabil asimtotik pada titik kesetimbangan $K_2\left(\frac{fa}{ce+fb}, \frac{ae}{ce+fb}\right)$ dengan tipe titik kesetimbangan simpul.
3) Diskriminan dari persamaan (23) sama dengan nol ($D = 0$), diperoleh $\lambda_{12} = -\frac{B}{2}$ atau dengan kata lain didapatkan nilai eigen berupa akar riil dan kembar. Jika kedua nilai eigen berupa akar kembar dan riil negatif, maka hal tersebut mengakibatkan sistem Predator-Prey Leslie tidak stabil pada titik kesetimbangan $K_2\left(\frac{fa}{ce+fb}, \frac{ae}{ce+fb}\right)$ dengan tipe titik kesetimbangan simpul atau spiral (fokus).

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh beberapa kesimpulan sebagai-berikut :

1. Sistem Predator-Prey Leslie tidak stabil pada titik kesetimbangan K_1 dengan tipe titik kesetimbangan titik pelana (saddle).
2. Sistem Predator-Prey Leslie stabil pada titik kesetimbangan K_2 dengan tipe titik kesetimbangan berbentuk simpul atau spiral (fokus).

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Berryman A. 1992. *Ecology*. Ecological society of America http://www.jstor.org/stable/1940005, diakses pada tanggal 28 Januari 2009.

[2]. Finizio & Ladas. 1988. *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Model*. Erlangga. Jakarta.

[3]. Boyce, William E & Di.Prima, Ricchar C. 1997. *Elementery Differential Equations and Boundary Value Problem*. John Wiley & Sons. United States of America.

[4]. Edwards & Penney. 2005.*Differential Equation & linier Algebra second edition*. Pearson Prentice Hall. The United States of America.

[5]. Jennifer. 2008. *A Differential Equations Aproach to The Lorenz System*. http://www.pas.rochester.edu/~Jennifer/senior%20sem.ppt, diakses pada tanggal : 6 Maret 2009.

[6]. Anton, H. 1994. *Aljabar Linier Elementer*. *Edisi kelima*. Erlangga. Jakarta.

[7]. Borreli, R.L. & C.S. Coleman. 1996. *Differential Equations: A Modeling Perspective*. Wiley, New York.