

MENENTUKAN SOLUSI OPTIMAL PADA PEMROGRAMAN LINIER DENGAN n FUNGSI OBJEKTIF MENGGUNAKAN SOLVER METODE SIMPLEKS

Dewi Anggraini dan Faisal

Program Studi Matematika

Universitas Lambung Mangkurat

Jl. Jend. A. Yani km. 36 Kampus Unlam Banjarbaru

Email: de28383wi@yahoo.com

ABSTRAK

Pemrograman linier adalah suatu bentuk model matematika yang menggunakan teknik bahasa pemrograman untuk menyusun dan menyelesaikan permasalahan optimasi dengan fungsi objektif dan kendala yang bersifat linier. Model matematika untuk masalah optimasi yang berupa pemrograman linier dengan satu fungsi objektif dapat dituliskan sebagai berikut:

Fungsi objektif: Minimumkan atau Maksimumkan $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$\text{Fungsi kendala: } \begin{cases} f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq b_1 \\ \vdots \\ f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq b_k \\ \vdots \\ f_m(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_m \end{cases}$$
$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

Akan tetapi, pada kenyataannya terkadang terdapat lebih dari satu fungsi objektif yang harus dicapai, baik yang bersifat memaksimumkan, meminimumkan ataupun keduanya. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan tahapan dalam memperoleh solusi optimal pada pemrograman linier dengan n fungsi objektif menggunakan *Solver* metode simpleks pada suatu contoh kasus.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan mengumpulkan dan mempelajari referensi yang relevant tentang pemrograman linier dengan n fungsi objektif, *Solver Parameters*, dan metode simpleks. Kemudian, menentukan tahapan untuk memperoleh solusi optimal pada model tersebut melalui suatu contoh kasus.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa tahapan dalam menentukan solusi optimal pada pemrograman linier dengan n fungsi objektif menggunakan *Solver* metode simpleks adalah: mengidentifikasi dan memahami masalah; menentukan variabel keputusan (X_i), fungsi objektif $f_i(X_i)$, beserta fungsi kendalanya $g_i(X_i)$; memformulasikan komponen-komponen yang terdapat dalam model pemrograman linier ke dalam aplikasi *spreadsheet MS Excel*; menyelesaikan nilai optimal untuk setiap fungsi objektifnya dengan *Solver Parameters*; menentukan nilai optimal untuk fungsi objektif ke- i sebagai nilai target ke- i ; menentukan fungsi deviasi untuk setiap fungsi objektifnya; memberikan bobot w_i , untuk fungsi deviasi setiap fungsi objektifnya; menentukan nilai maksimum dari fungsi deviasi yang mungkin dari fungsi objektifnya (variabel Q); meminimumkan variabel Q sehingga diperoleh solusi optimal; dan pengambilan keputusan.

Kata Kunci: *Pemrograman Linier, n Fungsi Objektif, Solver Parameters, Metode Simpleks.*

Determine Optimal Solution of Linier Programming With n Objective Functions Using *Solver* Simpleks Method

Dewi Anggraini and Faisal

Mathematics and Natural Sciences Faculty
Lambung Mangkurat University, Banjarbaru, Indonesia
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Kampus Unlam Banjarbaru
Email: de28383wi@yahoo.com

ABSTRACT

Linear programming is a Mathematical model that uses programming language technique to model and solve optimization problems with linear objective functions and constraints. A Mathematical model for optimization problems such as, linear programming with one objective function can be written as:

Objective Function: Minimum or Maximum $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$\text{Constraints: } \begin{cases} f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq b_1 \\ \vdots \\ f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq b_k \\ \vdots \\ f_m(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_m \end{cases}$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

However, in fact there are sometimes more than one objective functions that should be reached, either be maximized, minimized or both. This research aims to determine procedures in obtaining the optimal solution of linear programming with n objective functions using *Solver* simplex method in a sample case.

The method of this research is a literature study by collecting and studying references that are relevant about linear programming models with n objective functions, *Solver Parameters*, and simplex method. Then, determining procedures to obtain the optimal solution to the model in a sample case.

The result shows that the procedures of obtaining optimal solution in a linear programming model with n objective functions using *Solver* simplex method are: identifying and understanding the problem; determining decision variables (X_i), objective functions $f_i(X_i)$, and constraints $g_i(X_i)$; formulating components in linear programming model into a spreadsheet *MS Excel*; solving the optimal value for each objective function with *Solver Parameters*; determining the optimal value for i th objective function as the i th goal value; determining deviation function for each objective function; giving weights w_i for the deviation function of each objective function; determining the maximum value of feasible deviation function from its objective functions (variable Q); minimizing variable Q to obtain the optimal solution; and making decision.

Keywords: *Linear Programming, n Objective Functions, Solver Parameters, Simplex Method.*

1. PENDAHULUAN

Pemrograman matematika merupakan bagian dari optimasi yang digunakan untuk memperoleh suatu hasil atau keputusan yang optimal dari tujuan (objektif) yang diinginkan dengan memenuhi syarat-syarat yang telah ditentukan. Model matematika untuk masalah ini berupa fungsi $f_i(X_i)$, dari variabel-variabel keputusan (X_i) , sehingga masalah optimasi ini dapat diartikan sebagai proses untuk menentukan nilai X_i , yang dapat memberikan nilai maksimum atau nilai minimum dari fungsi tersebut.

Masalah optimasi dapat dibagi menjadi dua kategori, yaitu masalah optimasi tak terkendala dan masalah optimasi terkendala. Masalah optimasi dikatakan tidak terkendala jika tidak ada sejumlah fungsi $g_i(X_i)$, yang menjadi batasan-batasan dalam masalah. Sebaliknya, masalah optimasi dikatakan terkendala jika terdapat sejumlah fungsi $g_i(X_i)$, yang menjadi batasan-batasan dalam masalah tersebut. Jika semua fungsi kendala tersebut merupakan fungsi linier, maka masalah optimasi di atas disebut sebagai pemrograman linier [1].

Model matematika untuk masalah optimasi yang berupa pemrograman linier dengan satu fungsi tujuan adalah sebagai berikut [2]:

Fungsi objektif: Minimumkan atau Maksimumkan $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (1.1)

$$\text{Fungsi kendala: } \begin{cases} f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq b_1 \\ \vdots \\ f_k(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq b_k \\ \vdots \\ f_m(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_m \end{cases} \quad (1.2)$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0 \quad (1.3)$$

Model PL di atas, hanya memuat satu fungsi objektif, yaitu untuk memaksimumkan atau meminimumkan. Akan tetapi, pada praktiknya terkadang terdapat lebih dari satu fungsi objektif. Sebagai contoh, suatu perusahaan minuman kaleng ingin meminimumkan jumlah zat pewarna yang diproduksi, sementara itu, pada kenyataannya tujuan ini dapat menimbulkan konflik terhadap tujuan lain yang berupa memaksimumkan profit yang akan dicapai. Peningkatan profit cenderung akan menghasilkan penambahan zat pewarna tersebut ke dalam minuman kaleng.

Penelitian ini mempelajari bagaimana menentukan solusi optimal pada pemrograman linier dengan lebih dari satu atau n fungsi objektif (*Multiple Objective Linier Programming/MOLP*) dengan menggunakan *Solver* metode simpleks untuk mengatasi masalah dominasi variabel keputusan.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pemrograman Linier (PL) atau *Linier Programming (LP)* dengan Satu Fungsi Objektif.

Pemrograman linier merupakan salah satu metode yang pada umumnya digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi [3]. Bentuk umum model PL

dengan satu fungsi objektif pada persamaan (1.1), (1.2) dan (1.3) juga dapat dituliskan [1] sebagai berikut:

$$\text{Fungsi objektif:} \quad \text{Minimumkan atau Maksimumkan } f(\mathbf{x}) \quad (1.4)$$

$$\text{Fungsi kendala:} \quad u_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$v_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \quad (1.5)$$

$$w_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (1.6)$$

dimana:

$\mathbf{x}$ = vektor berdimensi k

$f(\cdot)$ = fungsi objektif

$u_j(\cdot)$ = fungsi kendala pertidaksamaan ke- j

$v_j(\cdot)$ = fungsi kendala persamaan ke- j

$w_j(\cdot)$ = fungsi kendala pertidaksamaan ke- j

2.2 Asumsi-Asumsi Masalah Pemrograman Linier

Terdapat empat asumsi yang harus dipenuhi oleh suatu model PL [1], yaitu:

1. Asumsi Proporsionalitas, dimana perubahan nilai pada fungsi objektif adalah proporsional terhadap perubahan nilai variabel keputusannya X_i .
2. Asumsi Penambahan (*Additivity*), dimana setiap fungsi objektif dan fungsi kendala merupakan jumlahan dari perubahan nilai dari masing-masing variabel keputusannya X_i .
3. Asumsi Keterbagian (*Divisibility*), dimana nilai setiap variabel keputusan X_i , yang terdapat pada model PL tidak hanya bersifat bilangan bulat tetapi juga dapat berupa pecahan.
4. Asumsi Ketentuan (*Certainty*), dimana nilai dari setiap parameter atau koefisien variabel keputusan X_i , dalam suatu model PL berupa suatu konstanta tertentu.

2.3 Metode Penyelesaian Masalah Pemrograman Linier

Penyelesaian masalah PL dapat diperoleh melalui beberapa tahapan [1] sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi masalah, meliputi:
 - a. menentukan variabel keputusan X_i , yang terdapat dalam masalah optimasi;
 - b. mengidentifikasi fungsi objektifnya, $f_i(X_i)$; dan
 - c. menentukan fungsi kendala yang diperlukan, $g_i(X_i)$.
2. Membentuk model PL.
3. Mencari solusi model PL.
4. Uji model.
5. Interpretasi hasil.

2.4 Metode Simpleks

Pemrograman linier dapat diselesaikan dengan menggunakan berbagai jenis algoritma, antara lain: algoritma simpleks atau metode simpleks yang telah diformulasikan oleh George Dantzig pada tahun 1947, algoritma Karmarkar yang telah disusun oleh Narendra Karmarkar pada tahun 1983 dan lain-lain. Akan tetapi, metode yang dianggap paling efisien untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier adalah metode simpleks [3]. Hal ini dikarenakan keefisienan bentuk dan prosedur algoritma yang hanya memperhatikan titik-titik ekstrim pada daerah yang mungkin (*feasible region*).

2.5 Prinsip Iterasi Metode Simpleks

Terdapat 3 prinsip iterasi dari metode simpleks [2], yaitu:

1. mengidentifikasi sebarang solusi dasar yang mungkin (*feasible basic solution*) atau titik-titik ekstrim yang mungkin dari suatu masalah PL;
2. melakukan proses perubahan dari satu titik ekstrim yang satu ke titik ekstrim yang lain yang berdekatan sehingga dapat memberikan kontribusi positif (*improvement*) terhadap nilai fungsi objektifnya; dan
3. metode ini akan berakhir jika tidak ada lagi titik ekstrim terdekat yang memberikan perubahan lebih baik terhadap nilai fungsi objektifnya.

Metode simpleks ini mengalami keterbatasan dari segi efisiensi waktu, dan tingkat akurasi perhitungan tabulasi dalam menentukan solusi optimal masalah pemrograman linier dengan satu atau n fungsi tujuan jika terdapat lebih dari dua variabel keputusan, X_i . Untuk mengatasi hal tersebut maka digunakanlah *Solver Parameters* sebagai perangkat aplikasi atau alat bantu dalam menyelesaikan masalah optimasi.

2.6 Solver Parameters

Solver Parameters adalah salah satu aplikasi *MS Excel* yang memfasilitasi penyelesaian masalah optimasi. Terdapat 3 jenis algoritma untuk menyelesaikan masalah optimasi pada *Solver Parameter*, yaitu: *Standard GRG Nonlinear*, *Standard Simplex LP*, dan *Standard Evolutionary*.

Ada 3 komponen utama dari model *spreadsheet* pada *Solver Parameters*, yaitu:

1. *Set* atau *Target Cell*
Cell ini mewakili fungsi objektif pada model yang dapat berupa memaksimumkan atau meminimumkan.
2. *Variable* atau *Changing Cells*
Cells ini mewakili variabel-variabel keputusan pada model.
3. *Constraint Cells*
Cells ini mewakili formulasi ruas kiri dari fungsi-fungsi kendala pada model beserta nilai limit bawah dan atasnya.

Ketiga komponen di atas secara langsung berhubungan dengan *cells* yang terdapat pada *spreadsheet* yang digunakan ketika mengimplementasikan model PL. Hubungan ini dapat dilihat pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Hubungan Antara Komponen Pada Model Pemrograman Linier Secara Aljabar dengan Model *Spreadsheet*

Komponen yang digunakan pada model PL secara aljabar	Komponen yang digunakan pada <i>Solver Parameters</i> di <i>Spreadsheet</i>
Fungsi Objektif	<i>Set</i> atau <i>Target Cell</i>
Variabel Keputusan	<i>Variable</i> atau <i>Changing Cells</i>
Formulasi ruas kiri dari fungsi-fungsi kendala	<i>Constraint Cells</i>

Tabel 1 menunjukkan hubungan antara komponen model PL secara aljabar dengan komponen *Solver Parameters* dalam mengimplementasikan model ke dalam *spreadsheet*. Fungsi objektif pada model PL aljabar berhubungan dengan *Set* atau *Target Cell* pada *Solver Parameters*, variabel keputusan pada model PL aljabar berhubungan dengan *Variable* atau *Changing Cells* pada *Solver Parameters*, dan formulasi ruas kiri dari fungsi-fungsi kendala yang berbeda pada model PL aljabar berhubungan dengan *Constraint Cells* pada *Solver Parameters*. Walaupun terminologi komponen yang digunakan pada model PL aljabar berbeda dengan yang digunakan pada *Solver Parameters* di *spreadsheet*, tetapi konsep dasarnya adalah sama.

2.7 Prosedur Kerja *Solver Parameters*

Prosedur kerja *Solver Parameters* pada aplikasi MS. Excel dalam menyelesaikan masalah PL sebagai berikut [2]:

1. *Solver Parameters* secara temporari akan mengubah semua pertidaksamaan yang terdapat dalam fungsi kendala menjadi persamaan dengan menambahkan satu variabel baru untuk setiap fungsi kendala yang bersifat “kurang dari atau sama dengan” ($\leq$) dan mengurangi satu variabel baru untuk setiap fungsi kendala yang bersifat “lebih dari atau sama dengan” ($\geq$). Variabel-variabel baru yang digunakan ini disebut sebagai variabel “*slack*”.
2. *Solver* secara otomatis telah mengatur variabel *slack* yang diperlukan untuk menyelesaikan suatu masalah PL. *Solver* akan menghadirkan variabel *slack* ini pada “*Answer Report*”. Nilai yang terdapat pada kolom *slack* pada *Answer Report* menunjukkan nilai optimal dari variabel *slack*.
3. Setelah semua kendala pertidaksamaan dalam suatu masalah PL diubah ke dalam persamaan, maka model PL akan memiliki suatu sistem persamaan linier dari fungsi-fungsi kendalanya. Jika terdapat suatu jumlahan dari k variabel dalam suatu l sistem persamaan, satu cara untuk menemukan solusi terhadap sistem persamaan tersebut adalah dengan memilih sebarang k variabel dan menemukan nilainya yang dapat menjelaskan l sistem persamaan, dengan asumsi bahwa semua variabel lainnya merupakan himpunan yang nilainya sama dengan nilai limit bawahnya (pada umumnya sama dengan 0). Strategi ini memerlukan variabel yang lebih banyak daripada fungsi kendala pada sistem persamaannya, sehingga $k \geq l$. k variabel yang terpilih untuk menyelesaikan sistem persamaan dalam model PL disebut sebagai variabel dasar (*basic variable*).
4. Jika suatu solusi dari sistem persamaan dapat diperoleh dengan menggunakan himpunan yang diberikan dari variabel dasar dimana variabel non-dasar (*non-*

basic variable) sama dengan 0, maka solusi ini disebut sebagai solusi dasar yang mungkin (*feasible basic solution*). Setiap solusi dasar yang mungkin berhubungan dengan satu dari titik-titik ekstrim pada daerah yang mungkin dari masalah PL dan diketahui bahwa solusi optimal PL juga dapat terjadi pada satu titik ekstrim.

5. Menemukan himpunan variabel dasar beserta nilai optimalnya agar menghasilkan solusi dasar yang mungkin berkaitan dengan titik ekstrim optimal dari daerah *feasible* nya.

2.8 Program Target/Tujuan atau Goal Programming (GP)

Goal Programming (GP) merupakan suatu teknik optimasi dengan asumsi bahwa fungsi kendala dalam model berupa *soft/flexible constraint* (suatu kendala dengan nilai target pada sisi sebelah kanan bersifat fleksibel), daripada *hard/fix constraint* (suatu kendala dengan nilai target pada sisi sebelah kanan bersifat *fix* atau tidak boleh terlampaui) [2].

2.9 Program Linier dengan n Fungsi Objektif atau Multiple Objective Linier Programming (MOLP).

Pemrograman linier dengan n fungsi objektif atau MOLP merupakan salah satu masalah khusus dari GP. Model ini diaplikasikan pada masalah optimasi yang mempunyai lebih dari satu fungsi objektif. Permasalahan seperti ini banyak terjadi di bidang ekonomi, bisnis, industri, perencanaan *network*, perencanaan produksi dan pemerintahan serta berbagai kelompok bidang ilmu lainnya, sehingga dengan MOLP ini memungkinkan berbagai variasi fungsi objektif dimasukkan ke dalam model masalah optimasi yang serupa [2].

Dengan menggunakan konsep dan model LP, MOLP dapat dimodelkan sebagai:

$$\text{Min}\{C_x : x \in M\} \quad (2.11)$$

dimana:

C = suatu matrik $p \times n$ dengan $p \geq 2$, dimana baris-baris $c^1, c^2, \dots, c^p$ adalah

koefisien dari fungsi kendala linier p , $(c^i, x) = i$, $i = 1, 2, \dots, p$.

$M \subset \mathcal{R}^n$ = suatu himpunan konveks polihedral tak kosong [3].

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Deskripsi Contoh Kasus

Data pengamatan yang diambil pada penelitian kali ini adalah suatu contoh kasus dari pemrograman linier berupa ekspansi *fast-food counter* dari sebuah perusahaan yang bernama *Chick'n-Pick'n*. Perusahaan tersebut mempunyai 3 jenis *fast-food counter*, yaitu *lunch counter*, *an-eat in (mall)*, dan *stand-alone* yang masing-masing didesign untuk keperluan yang berbeda-beda. Setiap *counter* memiliki *the number of jobs* (jumlah lowongan kerja), *start-up costs* (dana awal pendirian), dan *annual returns* (pendapatan tahunan) yang berbeda-beda.

Perusahaan *Chick'n-Pick'n* ingin memperluas operasi dari *counter-counter* yang dimilikinya sehingga dapat memaksimalkan *annual returns* dan *the number of jobs created* [2].

3.2 Identifikasi Variabel Keputusan dalam Sistem yang Terdapat Pada Contoh Kasus

Masalah ekspansi perusahaan *Chick'n-Pick'n* ini mempunyai tiga variabel keputusan, yaitu:

X_1 : berapa banyak lokasi *lunch counter* yang akan dibangun atau diekspansikan operasinya.

X_2 : berapa banyak lokasi *mall* yang akan dibangun atau diekspansikan operasinya.

X_3 : berapa banyak lokasi *stand-alone* yang akan dibangun atau diekspansikan operasinya.

sedemikian sehingga diharapkan jumlah ekspansi dari ketiga variabel keputusan tersebut akan berakibat pada peningkatan nilai *annual returns* dan *the number of jobs created*.

3.3 Penentuan Fungsi Objektif dan Formulasinya Secara Matematika

Seperti yang telah diketahui bahwa Perusahaan *Chick'n-Pick'n* ini ingin menambah jumlah operasi dari *counter-counter* yang dimilikinya sehingga dapat memaksimalkan *annual returns* dan *the number of jobs created*. Sehingga, dalam hal ini terdapat dua fungsi objektif yang sama, yaitu memaksimalkan *annual returns* dan *the number of jobs created*.

Secara Matematika, kedua fungsi objektif tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\text{Max} : \$85,000X_1 + \$125,000X_2 + \$175,000X_3 \quad (4.1)$$

$$\text{Max} : 9X_1 + 17X_2 + 35X_3 \quad (4.2)$$

dimana persamaan (4.1) menjelaskan tentang fungsi objektif yang pertama untuk memaksimalkan *annual returns* dengan ditambahkan jaringan operasi dari ketiga jenis *counter* yang dimiliki perusahaan tersebut, sedangkan persamaan (4.2) menjelaskan tentang fungsi objektif yang kedua untuk memaksimalkan *the number of jobs created* dengan ditambahkan jaringan operasi dari ketiga jenis *counter* yang dimiliki perusahaan tersebut.

3.4 Penentuan Fungsi-Fungsi Kendala yang Diperlukan dan Formulasinya Secara Matematika

Perluasan jaringan operasi ketiga *counter* yang dimiliki perusahaan *Chick'n-Pick'n* ini mempunyai 4 kendala umum, yaitu:

- keterbatasan biaya awal operasi (*start-up costs*) yang dimiliki, yaitu sebesar \$ 2,000,000.
- keterbatasan lokasi pendirian *lunch counter*, yaitu 5 area.
- keterbatasan lokasi pendirian *mall*, yaitu 7 area.
- keterbatasan lokasi pendirian *stand-alone*, yaitu 3 area.

Sedangkan kendala khusus yang dimiliki adalah bahwa jumlah *counter* yang didirikan haruslah bernilai positif integer (bukan berupa nilai pecahan atau negatif).

Sehingga secara Matematika, kelima kendala tersebut di atas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\$150,000X_1 + \$275,000X_2 + \$450,000X_3 \leq 2,000,000, \text{ kendala untuk } \textit{start-up costs} \quad (4.3)$$

$$X_1 \leq 5, \text{ kendala untuk lokasi pendirian } \textit{lunch counter} \quad (4.4)$$

$$X_2 \leq 7, \text{ kendala untuk lokasi pendirian } \textit{mall} \quad (4.5)$$

$$X_3 \leq 3, \text{ kendala untuk lokasi pendirian } \textit{stand-alone} \quad (4.6)$$

$$X_1, X_2, X_3 = \textit{integer}, \text{ kendala untuk nilai positif integer bagi jumlah lokasi } \textit{counter} \text{ yang didirikan} \quad (4.7)$$

3.5 Pembentukan Model Pemrograman Linier dengan n Fungsi Objektif

Setelah mengidentifikasi variabel keputusan, fungsi objektif dan fungsi kendala dari masalah perusahaan *Chick'n-Pick'n* di atas, maka dapat dibentuk suatu model MOLP secara keseluruhan sebagai berikut:

Fungsi Objektif:

$$\text{Max} : \$85,000X_1 + \$125,000X_2 + \$175,000X_3$$

$$\text{Max} : 9X_1 + 17X_2 + 35X_3$$

Fungsi Kendala:

$$\$150,000X_1 + \$275,000X_2 + \$450,000X_3 \leq 2,000,000 \text{ (start-up costs)}$$

$$X_1 \leq 5 \text{ (lunch counter)}$$

$$X_2 \leq 7 \text{ (mall)}$$

$$X_3 \leq 3 \text{ (stand-alone)}$$

$$X_1, X_2, X_3 = \textit{integer} \text{ (positif integer)}$$

3.6 Tahapan dalam Menentukan Solusi Optimal Model MOLP

Untuk menentukan solusi terbaik dari MOLP dengan 2 fungsi objektif pada persamaan (4.1) dan (4.2), diperlukan beberapa tahapan sebagai berikut:

1. Menentukan solusi untuk setiap fungsi objektif yang telah didefinisikan pada subbab 4.3 untuk memperoleh nilai optimalnya masing-masing. Penyelesaian nilai optimal ini dilakukan dengan menggunakan metode *simpleks* melalui *Solver Parameters* pada aplikasi *MS. Excel* sebagai berikut:

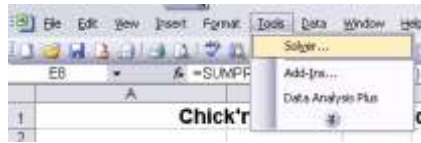
- a. Fungsi Objektif ke-1 (*Annual Returns*)

	A	B	C	D	E	F
1	Chick'n-Pick'n Fast-Food Chain					
2						
3		Lunch Counter	Mall	Stand-Alone		
4	Number to Expand	0	0	0		
5						
6	Objective				Totals	
7						
8	Annual Returns	\$85,000	\$125,000	\$175,000	\$0	
9	Number of Jobs Created	9	17	35	0	
10						
11	Constraints				Available	Required
12						
13	Costs Start-Up	\$150,000	\$275,000	\$450,000	\$0	\$2,000,000
14	Sites Lunch Counter	1	0	0	0	5
15	Sites Mall	0	1	0	0	7
16	Sites Stand-Alone	0	0	1	0	3

Gambar 1. Tampilan *Spreadsheet* Penyelesaian MOLP dengan Metode Simpleks untuk Fungsi Objektif ke-1 (*Annual Returns*)

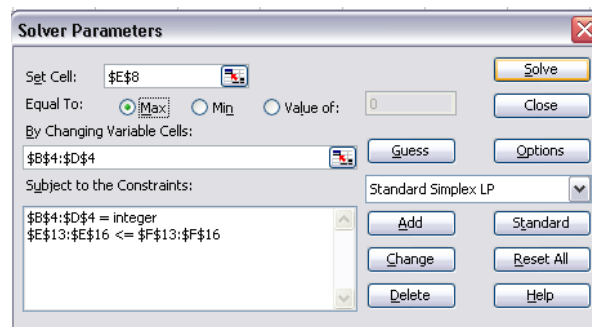
Pada Gambar 1 terlihat bahwa model MOLP pada kasus perusahaan *Chick'n-Pick'n* dengan 2 fungsi objektif beserta fungsi kendalanya telah

diformat pada aplikasi *spreadsheet MS.Excel*, dimana dalam hal ini akan dimaksimumkan nilai dari fungsi objektif ke-1, yaitu *annual returns*.



Gambar 2. *Toolbar Solver Parameters* Pada *MS. Excel*

Gambar 2 menunjukkan letak *Solver Parameters* pada *MS. Excel* yang digunakan untuk membantu mempermudah penyelesaian MOLP dengan metode simpleks.



Gambar 3. *Solver Parameters* Metode Simpleks

Gambar 3 menunjukkan sistem penyelesaian nilai optimal untuk fungsi objektif ke-1, yaitu memaksimumkan *annual returns*, $Max : \$85,000X_1 + \$125,000X_2 + \$175,000X_3$. Fungsi objektif ini diformulasikan pada cell E8 sebagai: $=SUMPRODUCT(\$B\$8:\$D\$8, \$B\$4:\$D\$4)$, dimana nilai dari variabel keputusan X_1, X_2, X_3 dapat berubah-ubah (*changing*), sedemikian sehingga dapat menghasilkan nilai optimal terhadap fungsi objektifnya.

Fungsi kendala yang dimiliki fungsi objektif ke-1 ini adalah:

1. persamaan (4.3) sampai dengan (4.6), yang diformulasikan sebagai: $\$E\$13:\$E\$16 \leq \$F\$13:\$F\16 , dan
 2. persamaan (4.7), yang diformulasikan sebagai: $\$B\$4:\$D\$4 = \text{integer}$.
- Setelah fungsi objektif dan kendala terformulasikan dengan benar, maka aktifkan *Solvernya*.



Gambar 4. Tampilan *Solver Results* untuk Menyimpan Hasil dari *Solver Parameters*

Setelah *Solver* bekerja, maka akan tampil hasil solusi dari fungsi objektif ke-1 (maksimum *annual returns*). Hasil tersebut dapat disimpan dengan mengaktifkan *icon Keep Solver Solution*, sehingga outputnya akan tampak pada Gambar 5 berikut:

	A	B	C	D	E	F
1	Chick'n-Pick'n Fast-Food Chain					
2						
3		Lunch Counter	Mall	Stand-Alone		
4	Number to Expand	4	5	0		
5	Objective				Totals	
6						
7	Annual Returns	\$85,000	\$125,000	\$175,000	\$965,000	
8	Number of Jobs Created	9	17	35	121	
9						
10	Constraints				Available	Required
11						
12	Costs Start-Up	\$150,000	\$275,000	\$450,000	\$1,975,000	\$2,000,000
13	Sites Lunch Counter	1	0	0	4	5
14	Sites Mall	0	1	0	5	7
15	Sites Stand-Alone	0	0	1	0	3

Gambar 5. *Spreadsheet* Hasil Optimal MOLP untuk Fungsi Objektif ke-1 (*Annual Returns*) dengan Metode Simpleks

Interpretasi Hasil:

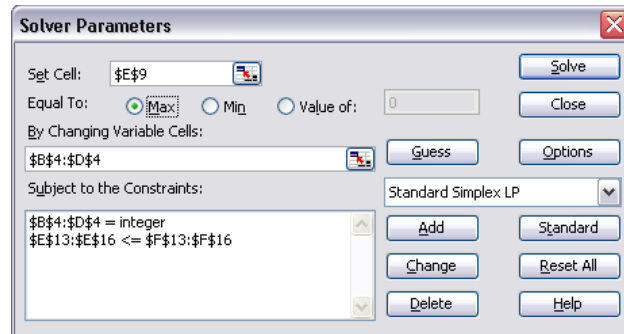
Nilai optimal untuk fungsi objektif yang pertama, yaitu *annual returns* sebesar \$ 965,000 dengan pendirian *lunch counter* sebanyak 4 lokasi, *mall* sebanyak 5 lokasi dan tidak satu pun lokasi untuk pendirian *stand-alone*. Sedangkan *the number of jobs created* yang dihasilkan pada tahap ini adalah sebesar 121 pekerjaan.

b. Fungsi Objektif 2 (*The Number of Jobs Created*)

	A	B	C	D	E	F
1	Chick'n-Pick'n Fast-Food Chain					
2						
3		Lunch Counter	Mall	Stand-Alone		
4	Number to Expand	0	0	0		
5	Objective				Totals	
6						
7	Annual Returns	\$85,000	\$125,000	\$175,000	\$0	
8	Number of Jobs Created	9	17	35	0	
9						
10	Constraints				Available	Required
11						
12	Costs Start-Up	\$150,000	\$275,000	\$450,000	\$0	\$2,000,000
13	Sites Lunch Counter	1	0	0	0	5
14	Sites Mall	0	1	0	0	7
15	Sites Stand-Alone	0	0	1	0	3

Gambar 6. *Spreadsheet* Penyelesaian MOLP dengan Metode Simpleks untuk Fungsi Objektif ke-2 (*The Number of Jobs Created*)

Pada Gambar 6 terlihat bahwa model MOLP pada kasus perusahaan *Chick'n-Pick'n* dengan 2 fungsi objektif beserta fungsi kendalanya telah diformat pada aplikasi *spreadsheet MS.Excel*, dimana dalam hal ini akan dimaksimalkan nilai dari fungsi objektif ke-2, yaitu *the number of jobs created*.



Gambar 7. Solver Parameters Metode Simpleks

Gambar 7 menunjukkan sistem penyelesaian nilai optimal untuk fungsi objektif ke-2, yaitu memaksimumkan *the number of jobs created*, $Max: 9X_1 + 17X_2 + 35X_3$. Fungsi objektif ini diformulasikan pada cell E9 diformulasikan sebagai: =SUMPRODUCT(\$B\$9:\$D\$9,\$B\$4:\$D\$4), dimana nilai dari variabel keputusan X_1, X_2, X_3 dapat berubah-ubah (*changing*) sedemikian sehingga dapat menghasilkan nilai optimal terhadap fungsi objektifnya.

Fungsi kendala yang dimiliki fungsi objektif ke-2 adalah sama dengan fungsi kendala yang dimiliki fungsi objektif ke-1.

Solusi optimal untuk fungsi objektif ke-2 dapat diperoleh dengan menggunakan prosedur *Solver Parameters* yang sama dengan fungsi objektif ke-1, sehingga outputnya akan tampak pada Gambar 8 berikut:

	A	B	C	D	E	F
1	Chick'n-Pick'n Fast-Food Chain					
2						
3		Lunch Counter	Mall	Stand-Alone		
4	Number to Expand	4	0	3		
5	Objective				Totals	
6						
7	Annual Returns	\$85,000	\$125,000	\$175,000	\$865,000	
8						
9	Number of Jobs Created	9	17	35	141	
10						
11	Constraints				Available	Required
12						
13	Costs Start-Up	\$150,000	\$275,000	\$450,000	\$1,950,000	\$2,000,000
14	Sites Lunch Counter	1	0	0	4	5
15	Sites Mall	0	1	0	0	7
16	Sites Stand-Alone	0	0	1	3	3

Gambar 8. Spreadsheet Hasil Optimal MOLP untuk Fungsi Objektif ke-2 (*The Number of Jobs Created*) dengan Metode Simpleks

Interpretasi Hasil:

Hasil maksimum untuk fungsi objektif ke-2, yaitu *the number of jobs created* sebesar 141 pekerjaan dengan pendirian *lunch counter* sebanyak 4 lokasi, *stand-alone* sebanyak 3 lokasi dan tidak ada satu pun lokasi untuk mendirikan *mall*. Sedangkan *annual returns* yang dihasilkan pada tahap ini adalah sebesar \$ 865,000.

2. Pernyataan ulang fungsi objektif sebagai suatu target (*goal*) dengan menggunakan nilai objektif optimal yang diperoleh pada langkah 1a dan 1b sebagai nilai target masing-masing fungsi objektifnya (lihat Tabel 3).

Tabel 3. Nilai Optimal yang Diperoleh untuk Setiap Fungsi Objektif

Solution	Number of Lunch Counter to Expand (X_1)	Number of Mall to Expand (X_2)	Number of Stand Alone to Expand (X_3)	Annual Return	Number of Jobs Created
1	4	5	0	\$ 965,000	121
2	4	0	3	\$ 865,000	141

Tabel 3 menunjukkan bahwa masalah *Chick'n-Pick'n* ini mempunyai 2 nilai target yang diperoleh dari nilai optimal setiap fungsi objektifnya, yaitu:
 Target 1: *annual returns* sebaiknya mendekati \$ 965,000.
 Target 2: *the number of jobs created* sebaiknya mendekati 141.

3. Untuk setiap target, didefinisikan suatu fungsi deviasi yang mengukur seberapa besar deviasi yang terjadi baik dalam suatu nilai mutlak maupun persentase atau jumlah dimana sebarang solusi yang diberikan tidak memenuhi syarat target.

Hal ini dilakukan dengan cara sebagai berikut:

$$\% \text{ deviasi} = \frac{\text{nilai target yang diperoleh} - \text{nilai optimal sebenarnya}}{\text{nilai target yang diperoleh}}$$

Pada kasus ini, nilai target diperoleh dari memaksimumkan fungsi objektif yang telah didefinisikan. Sehingga nilai optimal yang sebenarnya tidak akan pernah lebih besar dari nilai target yang diperoleh. Sehingga pada kasus ini dapat dituliskan:

$$\% \text{ deviasi returns} = \frac{\$ 965,000 - (\$ 85,000 X_1 + \$ 125,000 X_2 + \$ 175,000 X_3)}{\$ 965,000} \quad (4.8)$$

$$\% \text{ deviasi jobs created} = \frac{141 - (9 X_1 + 17 X_2 + 35 X_3)}{141} \quad (4.9)$$

4. Untuk setiap fungsi yang diidentifikasi pada langkah 3, diberikan suatu bobot, yaitu:

Untuk % deviasi *annual returns* menjadi:

$$w_1 \left(\frac{\$ 965,000 - (\$ 85,000 X_1 + \$ 125,000 X_2 + \$ 175,000 X_3)}{\$ 965,000} \right) \quad (4.10)$$

dan

Untuk % deviasi *the number of jobs created* menjadi:

$$w_2 \left(\frac{141 - (9 X_1 + 17 X_2 + 35 X_3)}{141} \right) \quad (4.11)$$

sehingga fungsi objektifnya menjadi:

$$\text{Min : } w_1 \left(\frac{\$ 965,000 - (\$ 85,000 X_1 + \$ 125,000 X_2 + \$ 175,000 X_3)}{\$ 965,000} \right) + w_2 \left(\frac{141 - (9 X_1 + 17 X_2 + 35 X_3)}{141} \right) \quad (4.12)$$

Kemudian, akan dicari nilai maksimum dari masing-masing % deviasi *annual returns* dan *the number of jobs created* pada persamaan (4.10) dan (4.11) dan dinyatakan sebagai Q .

$$Q : \text{Maksimum dari } w_1 \left(\frac{\$965,000 - (\$85,000X_1 + \$125,000X_2 + \$175,000X_3)}{\$965,000} \right), \\ w_2 \left(\frac{141 - (9X_1 + 17X_2 + 35X_3)}{141} \right)$$

Variabel Q ini diimplementasikan pada suatu kriteria *Minimax*, dimana akan dicari % deviasi terkecil dari kemungkinan deviasi terbesar yang terjadi, sehingga:

$$\text{Min : Maksimum dari } w_1 \left(\frac{\$965,000 - (\$85,000X_1 + \$125,000X_2 + \$175,000X_3)}{\$965,000} \right), \\ w_2 \left(\frac{141 - (9X_1 + 17X_2 + 35X_3)}{141} \right)$$

atau

$$\text{Min : } Q \quad (4.13)$$

dengan suatu kendala yang memerlukan nilai dari fungsi deviasi yang diboboti agar kurang dari variabel *Minimax* Q , yaitu:

$$w_1 \left(\frac{\$965,000 - (\$85,000X_1 + \$125,000X_2 + \$175,000X_3)}{\$965,000} \right) \leq Q \quad (4.14)$$

$$w_2 \left(\frac{141 - (9X_1 + 17X_2 + 35X_3)}{141} \right) \leq Q \quad (4.15)$$

5. Penyelesaian model yang telah direvisi dengan tujuan meminimumkan Q , yaitu:

Fungsi Objektif:

$$\text{Min : } Q$$

Fungsi Kendala:

$$\$150,000X_1 + \$275,000X_2 + \$450,000X_3 \leq 2,000,000 \text{ (start-up costs)}$$

$$X_1 \leq 5 \text{ (lunch counter)}$$

$$X_2 \leq 7 \text{ (mall)}$$

$$X_3 \leq 3 \text{ (stand-alone)}$$

$$w_1 \left(\frac{\$965,000 - (\$85,000X_1 + \$125,000X_2 + \$175,000X_3)}{\$965,000} \right) \leq Q \quad (\text{target 1})$$

kendala *Minimax*)

$$w_2 \left(\frac{141 - (9X_1 + 17X_2 + 35X_3)}{141} \right) \leq Q \text{ (target 2 kendala Minimax)}$$

$$X_1, X_2, X_3 = \text{int eger (positif integer)}$$

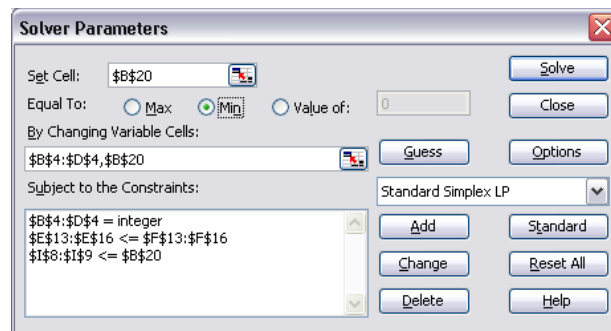
$$w_1, w_2 = \text{konstanta positif}$$

Masalah ini dapat diselesaikan melalui *Solver Parameters* menggunakan metode simpleks sebagai berikut:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Chick'n-Pick'n Fast-Food Chain								
2									
3		Lunch Counter	Mall	Stand-Alone					
4	Number to Expand	0	0	0					
5									
6	Objective				Totals	Target Value	% Deviation	Weight	Weight % Deviation
7									
8	Annual Returns	\$95,000	\$125,000	\$175,000	90	\$965,000	1.00	1.00	1.00
9	Number of Jobs Created	9	17	25	0	141	1.00	0.33	0.33
10									
11	Constraints				Available	Required			
12									
13	Costs Start-Up	\$150,000	\$275,000	\$450,000	90	\$2,000,000			
14	Sites Lunch Counter	1	0	0	0	5			
15	Sites Mall	0	1	0	0	7			
16	Sites Stand-Alone	0	0	1	0	3			
17									
18									
19	Objective								
20	Minimax Variable	0.00							

Gambar 9. Spreadsheet Penyelesaian MOLP dengan Metode Simpleks untuk Minimax Variabel Q

Gambar 9 menampilkan format aplikasi model revisi MOLP pada kasus perusahaan *Chick'n-Pick'n* dengan 2 fungsi objektif beserta fungsi kendalanya pada spreadsheet *MS.Excel*, dimana dalam hal ini nilai dari variabel Q pada cell B20 akan diminimumkan untuk mendapatkan nilai minimum dari kemungkinan % deviasi terbesar yang mungkin dari nilai target ke-1 (*annual returns*) dan target ke-2 (*the number of jobs created*).



Gambar 10. Solver Parameters Menggunakan Metode Simpleks

Gambar 10 menunjukkan sistem penyelesaian optimal untuk variabel Q, yaitu meminimumkan fungsi deviasi maksimum yang mungkin terjadi, dimana cell B20 menunjukkan formulasi dari fungsi objektif MOLP yang telah direvisi, yaitu:

Min : Q

Fungsi-fungsi kendala yang dimiliki pada model revisi ini, yaitu:

- a. Dana awal yang dimiliki.

$$\$150,000X_1 + \$275,000X_2 + \$450,000X_3 \leq 2,000,000 (\text{start-up costs})$$

dapat diformulasikan sebagai:

=SUMPRODUCT(\$B\$9:\$D\$9,\$B\$4:\$D\$4) pada cell E13. Nilai ini harus kurang dari atau sama dengan 2,000,000, sehingga pada cell F13 diformulasikan sebagai: \$E\$13 <= \$F\$13.

- b. Kapasitas lokasi pendirian *counter*.
 $X_1 \leq 5$ (*lunch counter*) diformulasikan sebagai $\$E\$14 \leq \$F\14 ,
 $X_2 \leq 7$ (*mall*) diformulasikan sebagai $\$E\$15 \leq \$F\15 ,
 $X_3 \leq 3$ (*stand-alone*) diformulasikan sebagai $\$E\$16 \leq \$F\16 ,
 sehingga fungsi kendala (a) dan (b) dapat dituliskan menjadi:
 $\$E\$13:\$E\$16 \leq \$F\$13:\$F\16 .
- c. Bobot % deviasi.
 Diketahui bahwa target ke-1 kendala *Minimax*:
 $w_1 \left(\frac{\$965,000 - (\$85,000X_1 + \$125,000X_2 + \$175,000X_3)}{\$965,000} \right) \leq Q$ yang
 diformulasikan sebagai $\$I\$8 \leq \$B\20 , dan target ke-2 kendala *Minimax*:
 $w_2 \left(\frac{141 - (9X_1 + 17X_2 + 35X_3)}{141} \right) \leq Q$ yang diformulasikan sebagai $\$I\$9 \leq$
 $\$B\20 , sehingga bobot % deviasi kedua kendala tersebut adalah: $\$I\$8:\$I\$9 \leq$
 $\$B\20 .
- d. Positif integer dari variabel keputusan X_1, X_2 , dan X_3 .
 $X_1, X_2, X_3 = \text{integer}$ (positif integer) diformulasikan sebagai $\$B\$4:\$D\$4 =$
 integer.
- e. Bobot yang diberikan pada % deviasi w_1, w_2 adalah konstanta positif .
 Pada kasus ini diketahui bahwa pihak perusahaan menginginkan nilai optimal
 dari *annual returns* tiga kali lebih besar daripada *the number of jobs created*,
 sehingga bobot untuk % deviasi fungsi objektif ke-1 (*annual returns*) adalah 1
 (terlihat pada *cell* H8), sedangkan bobot untuk % deviasi fungsi objektif ke-2
 (*the number of jobs created*) adalah 0.33 (terlihat pada *cell* H9).
6. Pemeriksaan solusi penyelesaian masalah.
 Setelah fungsi objektif dan kendala terformulasikan dengan benar, maka
 aktifkan *Solver*nya. Hasilnya terlihat pada Gambar 11 sebagai berikut:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Chick'n-Pick'n Fast-Food Chain								
2									
3		Lunch Counter	Mall	Stand-Alone					
4	Number to Expand	3	4	1					
5									
6	Objective				Totals	Target Value	% Deviation	Weight	Weight % Deviation
7									
8	Annual Returns	\$85,000	\$125,000	\$175,000	\$965,000	\$965,000	0.04	1.00	0.04
9	Number of Jobs Created	9	17	35	130	141	0.08	0.33	0.03
10									
11	Constraints				Available	Required			
12									
13	Cash Start-Up	\$150,000	\$275,000	\$450,000	\$2,000,000	\$2,000,000			
14	Sites Lunch Counter	1	0	0	3	5			
15	Sites Mall	0	1	0	4	7			
16	Sites Stand-Alone	0	0	1	1	3			
17									
18									
19	Objective								
20	Minimax Variable	0.04							

Gambar 11. Spreadsheet Hasil Optimal MOLP untuk *Minimax* Variabel Q dengan Metode Simpleks

Interpretasi Hasil:

Nilai optimal untuk variabel *Minimax Q* adalah 0.04. Hal ini berarti % deviasi yang minimum dari % deviasi maksimum yang mungkin adalah sebesar 0.04 (dapat dilihat pada *cell G8:G9*). Sehingga pada model revisi ini diperoleh nilai optimal untuk fungsi objektif ke-1 (*annual returns*), yaitu \$ 930,000 dan fungsi objektif ke-2 (*the number of jobs created*), yaitu 130 dengan pendirian *lunch counter* sebanyak 3 lokasi, *mall* sebanyak 4 lokasi dan *stand-alone* sebanyak 1 lokasi.

7. Validasi Model dan Interpretasi Hasil

Tabel 4. Nilai Optimal dari Setiap Fungsi Objektif dan *Minimax* Variabel *Q* (% Deviasi)

Solution	Number of Lunch Counter to Expand (X_1)	Number of Mall to Expand (X_2)	Number of Stand Alone to Expand (X_3)	Annual Returns	The Number of Jobs Created
1	4	5	0	\$ 965,000	121
2	4	0	3	\$ 865,000	141
3	3	4	1	\$ 930,000	130

Dari Tabel 4 dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan n fungsi objektif maka akan ada satu dari dua fungsi objektif yang terkalahkan, seperti pada solusi 1 yang hanya mengoptimalkan nilai *annual returns* sebesar \$ 965,000, sedangkan pada solusi 2 hanya mengoptimalkan *the number of jobs created* sebanyak 141 pekerjaan.

Akan tetapi, dengan adanya fungsi *Minimax* variabel *Q* yang berupa % deviasi dari masing-masing nilai target yang diperoleh dari nilai optimal masing-masing fungsi objektifnya, akan memberikan solusi optimal yang diharapkan dan memberikan prioritas solusi yang sama pada kedua fungsi objektif tersebut. Dalam hal ini perusahaan *Chick'n-Pick'n* memprioritaskan nilai *annual returns* sebesar tiga kali lebih besar daripada nilai *the number of jobs created*, sehingga diperoleh nilai optimal *annual returns* sebesar \$ 930,000 dan *the number of jobs* sebanyak 130 pekerjaan dengan pendirian *lunch counter*, *mall*, dan *stand-alone* masing-masing sebanyak 3 lokasi, 4 lokasi dan 1 lokasi.

Untuk menentukan apakah hasil ini memuaskan atau tidak tentu saja semuanya bergantung kepada pihak perusahaan yang bersangkutan. Mereka dapat mengganti nilai bobot setiap fungsi objektifnya untuk mendapatkan hasil yang optimal menurut tingkat keutamaannya.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dari hasil dan pembahasan, diperoleh suatu kesimpulan sebagai berikut:

Penentuan solusi optimal untuk masalah pemrograman linier dengan n fungsi objektif menggunakan *Solver* metode simpleks dapat dilakukan melalui beberapa tahapan, yaitu:

1. Pengidentifikasian dan pemahaman masalah.
2. Penentuan variabel keputusan X_i , fungsi objektif $f_i(X_i)$, dan fungsi kendalanya $g_i(X_i)$.
3. Pembentukan formulasi model matematika dari variabel keputusan, fungsi objektif, dan fungsi kendalanya pada aplikasi *spreadsheet MS. Excel*.
4. Penyelesaian nilai optimal untuk setiap fungsi objektifnya menggunakan metode simpleks melalui *Solver Parameters*.
5. Penentuan nilai optimal untuk fungsi objektif ke- i sebagai nilai target ke- i .
6. Penentuan fungsi deviasi untuk setiap fungsi objektifnya.
7. Pemberian bobot w_i untuk fungsi deviasi setiap fungsi objektifnya. Nilai bobot ini bersifat *arbitrary*, yaitu dapat dirubah sesuai dengan harapan yang diinginkan oleh pemegang keputusan (*decison makers*).
8. Penentuan nilai maksimum dari fungsi deviasi yang mungkin dari fungsi objektif (variabel Q) yang didefinisikan pada langkah 7.
9. Meminimumkan variabel Q sedemikian sehingga diperoleh solusi optimal untuk penyelesaian masalah pemrograman linier dengan n fungsi objektif yang diharapkan.
10. Pengambilan keputusan terbaik ditentukan oleh *decison makers*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Hanum, F., & Supriyo, P.T., 2002. *Optimasi: Pemrograman Linier dan Tak Linier*. "Pelatihan Pemodelan Matematika Pengembangan dan Implentasinya dalam Komputer, 29 Juli – 10 Agustus 2002". Jurusan Matematika – FMIPA IPB. Bogor.
- [2]. Ragsdale, C.T., 2007. *Spreadsheet Modelling and Decision Analysis: A Practical Introduction to Management Science*, 5e. Springer, Verlag, New York.
- [3]. Kim, N.T.B., & Thien, N.T., 2007. *Generating All Efficient Extreme Points in Multiple Objective Linier Programming Problem and Its Application*. Faculty of Applied Mathematics and Informatics. Hanoi University of Technology. Vietnam. http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2007/08/1759.pdf, diakses tanggal 17 Oktober 2009.