GRUP RING

Aisjah Julianti Noor dan Na'imah Hijriati
Program Studi Matematika
Universitas Lambung Mangkurat
Jl. Jend. A. Yani km. 36 Kampus Unlam Banjarbaru
Email: imah_math@yahoo.co.id

ABSTRAK

Grup ring *RG* merupakan himpunan yang dibentuk dari grup *G* dibawah operasi pergandaan yang elemennya berhingga dan ring komutatif.*R* dengan unsur satuan. Jika didefinisikan operasi penjumlahan dan operasi pergandaan pada *RG* berturut-turut $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) + \left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) = \sum_{i\in I}(a_i + b_i)g_i$ dan $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i}(a_j b_k)\right) g_i$ untuk setiap $\sum_{i\in I} a_i g_i, \sum_{i\in I} b_i g_i \in RG$ maka *RG* merupakan ring.

Berdasarkan pendefinisian *RG* yang dibentuk dari dua buah struktur yang mempunyai sifat-sifat tertentu, maka sifat-sifat dari *RG* sangat bergantung pada *R* dan *G* yang membentukknya, yaitu :

a. Setiap elemen di *R* komutatif dengan setiap elemen di *RG* dan unsur satuan di *R* merupakan unsur satuan di *RG*
b. Setiap elemen di *G* mempunyai invers pergandaan di *RG*
c. *RG* komutatif jika dan hanya jika *G* komutatif
d. Jika *S* subring dari *R* dan *H* subgrup dari *G*, maka *SG* dan *RH* merupakan subring-subring dari *RG*.

Kata Kunci: *Grup*, *Ring*, *Grup Ring*.

1. PENDAHULUAN

Suatu himpunan *G* yang dilengkapi satu operasi biner $*$ disebut grup jika memenuhi sifat assosiatif, terdapat elemen identitas dan setiap elemennya mempunyai elemen invers. Sedangkan suatu himpunan *R* yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu operasi penjumlahan "+" dan operasi pergandaan "**.**", disebut ring jika *R* dibawah operasi penjumlahan merupakan grup komutatif dan dibawah operasi pergandaan berlaku sifat assosiatif, serta memenuhi sifat distributif operasi pergandaan terhadap operasi penjumlahan.

Diketahui pada umumnya grup dan ring merupakan dua buah struktur aljabar yang merupakan dasar dari struktur-struktur aljabar yang lain, seperti daerah integral dan lapangan. Jika didefinisikan himpunan $RG = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i g_i \middle| r_i \in R \text{ dan } g_i \in G \right\}$ dengan *G* merupakan grup yang berhingga dibawah operasi pergandaan dan *R* merupakan ring dengan unsur satuan, maka muncul pertanyaan apakah himpunan *RG* merupakan struktur aljabar grup atau ring, jika didefinisikan suatu operasi biner? Selanjutya himpunan *RG* disebut dengan grup ring.

Oleh karana itu pada penelitian ini, peneliti akan mencoba menunjukkan bahwa *RG* merupakan suatu ring dan mempelajari beberapa sifat yang berlaku pada *RG*.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Grup

Definisi 2.1.1 (Fraleigh, 2000)

Grup $(G, *)$ *adalah himpunan G yang tertutup dibawah operasi biner* $*$, *sedemikian sehingga memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini :*

1. *untuk setiap a,b,c* $\in$ *G berlaku :* $(a * b) * c = a * (b * c)$
2. *terdapat elemen e* $\in$ *G sedemikian sehingga untuk setiap a* $\in$ *G berlaku:*

$$e * a = a * e = a$$

3. *untuk setiap a* $\in$ *G terdapat* $a^{-1} \in G$ *sedemikian sehingga berlaku* :

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Selanjutnya *e* disebut elemen identitas *G* dan a^{-1} disebut elemen invers dari *a*.

Definisi 2.1.2 (Dummit&Foote, 1999)

Grup $(G,*)$ *dikatakan grup komutatif jika untuk setiap a,b* $\in$ *G berlaku*

$$a * b = b * a$$

Definisi 2.1.3 (Fraleigh, 2000)

Misalkan G adalah grup, dan H adalah himpunan bagian yang tak kosong dari G. H disebut subgrup dari G jika H tertutup dibawah operasi biner yang sama dengan operasi biner di G dan merupakan grup dibawah operasi biner yang sama dengan dengan operasi benir di G.

Selanjutnya *H* subgrup dari *G* dinotasikan dengan $H \leq G$.

Berdasarkan definisi dari subgrup di atas, dapat diturunkan teorema berikut:

Teorema 2.1.4 (Fraleigh, 2000)

Misalkan G adalah grup dan H himpunan bagian tak kosong dari G. H disebut subgrup dari jika dan hanya jika :

1. *H tertutup dibawah operasi biner yang sama dengan operasi biner di G*
2. *elemen identitas di G termuat di dalam H*
3. *untuk setiap a* $\in$ *H berlaku* $a^{-1} \in H$

Bukti:

Jika diketahui *H* subgrup dari *G*, maka berdasarkan Definisi 2.1.3, maka *H* adalah grup dibawah operasi biner yang sama dengan operasi biner di *G*, elemen identitas di *G* termuat di *H* dan untuk setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

Sebaliknya jika diketahui *H* tertutup dibawah operasi biner yang sama dengan operasi biner di *G*, karena *H* merupakan himpunan bagian dari *G* maka sifat assosiatif berlaku atau dengan kata lain berlaku aksioma pertama dari Definisi 2.1.1, selanjutnya karena diketahui elemen identitas termuat di *H* dan invers dari setiap elemen di H termuat juga di H maka aksioma kedua dan ketiga dari Definisi 2.1.1. Jadi terbukti bahwa H grup dibawah operasi biner yang sama dengan operasi biner di G, sehingga berdasarkan Definisi 2.1.3 terbukti H subgrup dari G. ■

Berdasarkan Teorema 2.1.4, karena elemen identitas dan elemen invers dari setiap elemen dari H termuat di H, maka diperoleh teorema berikut ini:

Teorema 2.1.5 (Adkins, 1992)
Misalakan H himpunan bagian tak kosong dari grup G. H subgrup dari G jika dan hanya jika untuk setiap $a,b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$.

Bukti:
Jika diketahui H subgrup dari G maka berdasarkan Teorema 2.1.4(3), maka untuk setiap $a, b \in H$ *maka* $a, b^{-1} \in H$ sehingga berdasarkan Teorema 2.1.4(1) diperoleh $ab^{-1} \in H$.
Sebaliknya karena diketahui setiap $a,b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$, maka untuk setiap $a \in H$ berakibat $e = aa^{-1} \in H$ dengan e elemen identitas di G dengan kata lain elemen identitas dari G termuat di H. Selanjutnya karena $e,a \in H$ dan diketahui setiap $a,b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$, maka $a^{-1} = ea^{-1} \in H$. sehingga untuk sebarang $a, b^{-1} \in H$ dan diketahui setiap $a,b \in H$ berlaku $ab^{-1} \in H$ maka $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$.
Akibatnya berdasarkan Teorema 2.1.4 terbukti bahwa H subgrup dari G ■

2.2. Ring

Definisi 2.2.1 (Adkins, 1992)
Misalkan R adalah himpunan dengan dua operasi biner, yaitu operasi penjumlahan "+" *dan operasi pergandaan* "**.**". *R disebut ring jika*:

i. *R dibawah operasi penjumlahan adalah grup komutatif*
ii. *R dibawah operasi pergandaan berlaku sifat assosiatif*
iii. *untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku sifat:*

   distributif kiri : $a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$ *dan*

   distributif kanan : $(a + b) \,.\, c = a \,.\, c + b \,.\, c$

   Selanjutnya $a \,.\, b$ ditulis dengan ab.

Definisi 2.2.2 (Dummit&Foote, 1999)
Misalkan R adalah ring. R dikatakan ring komutatif jika R dibawah operasi pergandaan bersifat komutatif dan R dikatakan mempunyi elemen identitas jika terdapat $1 \in R$ *sedemikian sehingga berlaku* $1.a = a.1 = a$ *untuk setiap* $a \in R$.
Elemen $1 \in R$ yang memenuhi Definisi 2.2.2 disebut dengan unsur satuan di R.

Definisi 2.2.3 (Fraleigh, 2000)
Misalkan R adalah ring. Himpunan bagian tak kosong S dari R disebut subring jika S merupakan ring dibawah operasi penjumlahan dan operasi pergandaan yang sama dengan operasi penjumlahan dan operasi pergandaan di R.

Teorema 2.2.4 (Adkins, 1992)
Misalkan R adalah ring. Himpunan bagian tak kosong S dari R disebut subring dari R jika dan hanya jika S merupakan subgrup dibawah operasi penjumlahan yang sama dengan operasi penjumlahan di R dan tertutup dibawah operasi pergandaan yang sama dengan operasi pergandaan di R

Bukti:
Jika diketahui *S* subring dari *R* maka berdasarkan Definisi 2.3.3, *S* merupakan ring dibawah operasi penjumalahan dan pergandaan yang sama dengan *R*, sehingga diperoleh *S* tertutup dibawah operasi pergandaan yang sama dengan *R* dan *S* adalah grup komutatif dibawah operasi penjumlahan, akibatnya berdasarkan Definisi 2.1.3, maka *S* adalah subgrup dari *R* dibawah operasi penjumlahan yang sama dengan *R*.
Sebaliknya karena *S* himpunan bagian dari *R* dan sifat tertutup dibawah operasi pergandaan yang sama dengan *R* maka sifat assositif dipergandaan dan sifat ditributif berlaku atau dengan kata lain aksioma (ii) dan (iii) dari Definisi 2.2.1 berlaku. Selanjutnya karena diketahui *S* subgrup dari *R* dibawah operasi penjumlahan yang sama dengan *R*, maka berdasarkan Definisi 2.1.3, maka *S* adalah grup dibawah operasi penjumalahan yang sama dengan *R* dan karena *S* himpunan bagian dari *R* maka sifat komutatif dipenjumlahan berlaku, sehingga aksioma (i) dari Definisi 2.2.1 berlaku. Akibatnya berdasarkan Definisi 2.2.3 terbukti bahwa *S* adalah subring dari *R*. ■

Definisi 2.2.5 (Adkins, 1992)
Misalkan R adalah ring dengan unsur satuan ”1”. *Elemen* $a \in R$ *disebut unit jika terdapat* $b \in R$, *sedemikian sehingga berlaku* $ab = 1 = ba$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Grup Ring

Misalkan $G = \{g_i \mid i \in I\}$ sebarang grup pergandaan, dan misalkan *R* sebarang ring komutatif dengan unsur satuan **1** yang tak nol.

Dibentuk suatu himpunan *RG* dengan anggota-anggotanya berupa jumlah formal $\sum_{i \in I} a_i g_i$ untuk $a_i \in R$ dan $g_i \in G$, dengan $a_i = 0$, kecuali untuk berhingga i. Selanjutnya *RG* disebut dengan grup ring.

Didefinisikan operasi penjumlahan pada *RG* sebagai berikut:

$$\left(\sum_{i \in I} a_i g_i\right) + \left(\sum_{i \in I} a_i g_i\right) = \sum_{i \in I} (a_i + b_i) g_i$$

karena $(a_i + b_i) = 0$ kecuali untuk berhingga i maka $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) g_i$ termuat di dalam *RG*.

Selanjutnya akan didefinisikan operasi pergandaan pada *RG*. Langkah pertama didefinisikan $(ag_i)(bg_j) = abg_k$, dengan pergandaan ab di *R* dan pergandaan $g_i g_j = g_k$ di *G*, sehingga didefinisikan operasi pergandaan pada *RG* sebagai berikut:

$$\left(\sum_{i \in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i \in I} b_i g_i\right) = \sum_{i \in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} (a_j b_k)\right) g_i$$

karena a_i dan b_i bernilai 0 kecuali untuk berhingga i, maka penjumlahan $\sum_{g_j g_k = g_i} (a_j b_k)$ hanya memuat berhingga penjumlahan $a_j b_k \in R$ yang tak nol, sehingga $\sum_{g_j g_k = g_i} (a_j b_k)$ tidak sama dengan nol, atau dengan kata lain *RG* tertutup dibawah operasi pergandaan.

Untuk menunjukkan *RG* merupakan suatu ring, terlebih dahulu harus ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan dan operasi pergandaan di *RG* merupakan operasi biner, yang dinyatakan oleh lemma berikut ini:

Lemma 3.1.1
Operasi penjumlahan dan operasi pergandaan di *RG* merupakan operasi biner.

Bukti:
Ambil sebarang $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right), \left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right), \left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right), \left(\sum_{i\in I} d_i g_i\right) \in RG$ dengan $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) = \left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right)$ dan $\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \left(\sum_{i\in I} d_i g_i\right)$.

Jika $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) = \left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right)$ maka $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) - \left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right) = \left(\sum_{i\in I} 0 g_i\right)$
$\Leftrightarrow \left(\sum_{i\in I} (a_i - c_i) g_i\right) = \left(\sum_{i\in I} 0 g_i\right)$, sehingga $(a_i - c_i) = 0 \Leftrightarrow a_i = c_i$ untuk setiap i,
dan jika $\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \left(\sum_{i\in I} d_i g_i\right)$ maka $\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) - \left(\sum_{i\in I} d_i g_i\right) = \left(\sum_{i\in I} 0 g_i\right)$
$\Leftrightarrow \left(\sum_{i\in I} (b_i - d_i) g_i\right) = \left(\sum_{i\in I} 0 g_i\right)$, sehingga $(b_i - d_i) = 0 \Leftrightarrow (b_i = d_i)$ untuk setiap i.
Akibatnya diperoleh :

$$\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) + \left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \sum_{i\in I} (a_i + b_i) g_i = \sum_{i\in I} (c_i + d_i) g_i = \left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right) + \left(\sum_{i\in I} d_i g_i\right)$$

dan

$$\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \sum_{i\in I} \left(\sum_{g_j g_k = g_i} (a_j b_k)\right) g_i = \sum_{i\in I} \left(\sum_{g_j g_k = g_i} (c_j d_k)\right) g_i = \left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} d_i g_i\right)$$

Jadi terbukti bahwa operasi penjumlahan dan operasi pergandaan merupakan operasi biner. ■

Teorema 3.1.2
RG dibawah operasi penjumlahan dan operasi pergandaan di atas merupakan ring.

Bukti:

i. *RG* merupakan grup abelian dibawah operasi penjumlahan.
Karena *R* merupakan ring maka *R* merupakan grup abelian dibawah operasi penjumlahan, sehingga *RG* merupakan grup abelian dibawah operasi penjumlahan dengan identitas penjumlahan adalah $\sum_{i\in I} 0g_i$.

ii. Operasi pergandaan *RG* memenuhi sifat assosiatif, karena untuk sebarang $\sum_{i\in I} a_i g_i, \sum_{i\in I} b_i g_i, \sum_{i\in I} c_i g_i \in RG$, berlaku:

$$\begin{aligned}
\left[\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right)\right]\left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right) &= \left[\sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i}(a_j b_k)\right)g_i\right]\left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right) \\
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k g_h = g_i}(a_j b_k)c_h\right)g_i \\
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k g_h = g_i} a_j (b_k c_h)\right)g_i \\
&= \left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left[\left(\sum_{g_k g_h = g_i}(b_k c_h)\right)g_i\right] \\
&= \left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left[\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right)\right]
\end{aligned}$$

iii. Sifat distributi kiri dan distributif kanan di *RG* berlaku karena untuk sebarang $\sum_{i\in I} a_i g_i, \sum_{i\in I} b_i g_i, \sum_{i\in I} c_i g_i \in RG$, memenuhi:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left[\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) + \left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right)\right] &= \left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I}(b_i + c_i)g_i\right) \\
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j (b_k + c_k)\right)g_i \\
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k + a_j c_k\right)g_i \\
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k\right)g_i + \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j c_k\right)g_i \\
&= \left[\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right)\right] + \left[\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) + \left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right)\right]\left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right) &= \left(\sum_{i\in I}(a_i + b_i)g_i\right)\left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right) \\
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i}(a_j + b_j)c_k\right)g_i
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j c_k + b_j c_k\right) g_i$$

$$= \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j c_k\right) g_i + \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} b_j c_k\right) g_i$$

$$= \left[\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right)\right] + \left[\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} c_i g_i\right)\right]$$

Berdasarkan (i), (ii) dan (iii) terbukti bahwa *RG* adalah ring. ■

3.2. Sifat-sifat dari *RG*

Berdasarkan bentuk dari *RG* dapat diketahui bahwa *R* termuat di *RG*, karena setiap elemen di *R* merupakan pergandaan identitas dari *G*, sehingga dapat diperoleh sifat-sifat berikut:

Teorema 3.2.1

Setiap elemen di R komutatif dengan setiap elemen di RG dan unsur satuan di R merupakan unsur satuan di RG.

Bukti:

Misalkan *g* elemen identitas di *G* dan *r* sebarang elemen di *R*, maka $rg \in RG$ dan dapat dinyatakan dengan *r*, sehingga untuk sebarang $\sum_{i\in I} a_i g_i \in RG$ berlaku:

$$r\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) = rg\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) = \sum_{i\in I} (ra_i) gg_i$$

kerena *R* komutatif dan *g* elemen identitas di *G* maka

$$\sum_{i\in I} (ra_i) gg_i = \sum_{i\in I} (a_i r) g_i g = \left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) rg = \left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) r$$

Jadi terbukti setiap elemen di *R* komutatif dengan setiap elemen di *RG*.
Selanjutnya diketahui **1** merupakan unsur satuan di *R*, karena telah dibuktikan setiap elemen dari *R* komutatif dengan semua elemen di *RG* maka untuk setiap $\sum_{i\in I} a_i g_i \in RG$ berlaku:

$$\mathbf{1}\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbf{1}(a_i g_i) = \sum_{i\in I} (\mathbf{1}a_i) g_i = \sum_{i\in I} a_i g_i = \sum_{i\in I} (a_i \mathbf{1}) g_i = \left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\mathbf{1} \quad \blacksquare$$

Teorema 3.2.2

Grup ring RG merupakan modul atas ring R.

Bukti:

Diketahui *RG* adalah ring dengan unsur satuan, maka *RG* merupakan grup komutatif dibawah operasi penjumlahan dan karena diketahui *R* termuat di dalam *RG*, maka *RG* tertutup dibawah operasi pergandaan skalar, sehingga untuk membuktikan *RG* modul atas *R*, harus ditunjukkan memenuhi aksioma-aksioma (i), (ii), (iii) dan (iv) dari Definisi 2.3.1.

Diambil sebarang *r*, **1** $\in$ *R* dan $\sum_{i\in I} a_i g_i, \sum_{i\in I} b_i g_i \in RG$, maka:

i. $$r\left[\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)+\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right)\right] = r\left(\sum_{i\in I}(a_i + b_i)g_i\right)$$
$$= \sum_{i\in I} r(a_i + b_i)g_i$$
$$= \sum_{i\in I}(ra_i + rb_i)g_i$$
$$= \sum_{i\in I} ra_i g_i + \sum_{i\in I} rb_i g_i$$
$$= r\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) + r\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right)$$

ii. $$(r+s)\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) = \left(\sum_{i\in I}(r+s)a_i g_i\right)$$
$$= \sum_{i\in I}(ra_i + sa_i)g_i$$
$$= \sum_{i\in I}(ra_i)g_i + \sum_{i\in I}(sa_i)g_i$$
$$= r\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) + s\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)$$

iii. $$(rs)\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) = \left(\sum_{i\in I}(rs)a_i g_i\right)$$
$$= \left(\sum_{i\in I} r(sa_i)g_i\right)$$
$$= r\left(\sum_{i\in I}(sa_i)g_i\right)$$
$$= r\left[s\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\right]$$

iv. $$\mathbf{1}\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) = \sum_{i\in I}(\mathbf{1}a_i)g_i = \sum_{i\in I} a_i g_i$$

Sehingga berdasarkan (i), (ii), (iii) dan (iv) terbukti bahwa *RG* adalah modul atas ring *R*. ■

Disisi lain *G* juga termuat di *RG*, karena *g* = **1***g* untuk setiap *g* $\in$ *G*, sehingga diperoleh sifat-sifat berikut:

Teorema 3.2.3
Setiap elemen di G mempunyai invers pergandaan di RG.

Bukti:
Ambil sebarang elemen *g* $\in$ *G*, karena *G* grup dibawah operasi pergandaan maka setiap elemen di *G* mempunyai invers pergandaan, misalkan g^{-1} invers dari *g*

sedemikian sehingga $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ dengan *e* elemen identitas di *G* dan karena diketahui $g = \mathbf{1}g$ untuk setiap $g \in G$, maka $g^{-1} = \mathbf{1}g^{-1}$ atau dengan kata lain $g^{-1} \in RG$. ■

Akibat dari Teorema 3.2.3, diperoleh bahwa himpunan *G* merupakan himpunan semua unit di *RG*.

Teorema 3.2.4
RG komutatif jika dan hanya jika *G* komutatif.

Bukti:
Ambil sebarang $\sum_{i\in I} a_i g_i, \sum_{i\in I} b_i g_i \in RG$, karena diketahui *G* komutatif maka:

$$\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i}(a_j b_k)\right)g_i = \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_k g_j = g_i}(b_k a_j)\right)g_i = \left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)$$

Sebaliknya jika *RG* diketahui komutatif maka:
$\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)$ sehingga diperoleh $g_j g_k = g_i = g_k g_j$ untuk setiap $i, j, k \in I$.
Jadi terbukti *RG* komutatif jika dan hanya jika *G* komutatif ■

Diketahui setiap ring mempunyai subring dan grup mempunyai subgrup. Jika dihubungkan dengan grup ring *RG*, maka diperoleh sifat berikut:

Teorema 3.2.5
Jika S subring dari R dan H subgrup dari G, maka SG subring dari RG dan RH subring dari RG.

Bukti:
Untuk membuktikan *SR* dan *RH* adalah subring-subring dari *RG*, maka harus dibuktikan bahwa *SR* dan *RH* adalah himpunan-himpunan yang tak kosong, subgrup dari *RG* dibawah operasi penjumlahan dan tertutup dibawah operasi pergandaan di *RG*. Oleh karena itu akan dibuktikan:

i. *SR* dan *RH* himpunan tak kosong.
   Diketahui *S* subring dari *R* dan *H* subgrup dari *G* sehingga *S* dan *H* adalah himpunan tak kosong, akibatnya berdasarkan bentuk dari *RG* maka *SR* dan *RH* adalah himpunan yang tak kosong.

ii. *SR* dan *RH* merupakan subgrup dari *RG* dibawah operasi penjumlahan.
   a. ambil sebarang $\sum_{i\in I} a_i g_i, \sum_{i\in I} b_i g_i \in SG$ dengan $a_i, b_i \in S$ untuk setiap *i*,

      maka $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) - \left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \sum_{i\in I}(a_i - b_i)g_i$

Karena a_i, $b_i \in S$ untuk setiap i dan diketahui S subring dari R maka $a_i - b_i \in S$ sehingga $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) - \left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) \in SG$ atau dengan kata lain SG adalah subgrup dari RG dibawah operasi penjumlahan.

b. ambil sebarang $\sum_{i\in I} a_i g_i, \sum_{i\in I} b_i g_i \in RH$ dengan $g_i \in H$ untuk setiap i, maka

$$\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) - \left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \sum_{i\in I} (a_i - b_i) g_i$$

Karena diketahui H subgrup dari G dan a_i, $b_i \in R$ untuk setiap i maka $a_i - b_i \in R$ sehingga $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) - \left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) \in RH$ atau dengan kata lain RH subgrup dari RG dibawah operasi penjumlahan.

iii. SR dan RH tertutup dibawah operasi pergandaan yang sama dengan RG

a. ambil sebarang $\sum_{i\in I} a_i g_i, \sum_{i\in I} b_i g_i \in SG$ dengan a_i, $b_i \in S$ untuk setiap i, maka $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} (a_j b_k)\right) g_i$

Karena a_i, $b_i \in S$ untuk setiap i dan diketahui S subring dari R maka $\sum_{g_j g_k = g_i} (a_j b_k) \in S$ sehingga $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) \in SG$ atau dengan kata lain SG tertutup dibawah operasi pergandaan.

b. ambil sebarang $\sum_{i\in I} a_i g_i, \sum_{i\in I} b_i g_i \in RH$ dengan $g_i \in H$ untuk setiap i, maka

$$\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i} (a_j b_k)\right) g_i$$

Karena diketahui H subgrup dari G dibawah opersi pergandaan di G, maka $g_j g_k \in H$ untuk setiap j,k dan a_i, $b_i \in R$ untuk setiap i maka $\sum_{g_j g_k = g_i} (a_j b_k) \in R$ sehingga $\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) \in RH$ atau dengan kata lain RH tertutup dibawah operasi pergandaan.

4. KESIMPULAN

Grup ring RG merupakan himpunan dengan anggota-anggotanya berupa jumlah formal $\sum_{i\in I} a_i g_i$ untuk $a_i \in R$ dan $g_i \in G$, dengan $a_i = 0$, kecuali untuk berhingga i, dengan G merupakan grup yang berhingga dibawah operasi pergandaan dan R merupakan ring komutatif dengan unsur satuan. Jika didefinisikan operasi penjumlahan dan operasi pergandaan pada RG berturut-turut

$$\left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) + \left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right) = \sum_{i\in I}(a_i + b_i) g_i \quad \text{dan} \quad \left(\sum_{i\in I} a_i g_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i g_i\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{g_j g_k = g_i}(a_j b_k)\right) g_i$$

untuk setiap $\sum_{i\in I} a_i g_i, \sum_{i\in I} b_i g_i \in RG$, maka terbukti bahwa *RG* merupakan ring.

Selanjutnya berdasarkan pendefinisian *RG* yang dibentuk dari dua buah struktur yang mempunyai sifat-sifat tertentu, maka sifat-sifat dari *RG* sangat bergantung pada *R* dan *G* yang membentukknya, yaitu:

a. Setiap elemen di *R* komutatif dengan setiap elemen di *RG* dan unsur satuan di *R* merupakan unsur satuan di *RG.*
b. *RG* merupakan modul atas *R.*
c. Setiap elemen di *G* mempunyai invers pergandaan di *RG.*
d. *RG* komutatif jika dan hanya jika *G* komutatif.
e. Jika *S* subring dari *R* dan *H* subgrup dari *G,* maka *SG* dan *RH* merupakan subring-subring dari *RG.*

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Adkins, A.W. and S.H Weintraub, 1992, *Algebra: An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag, New York.

[2]. Dummit, D.S.&Richard M.F., 2002, *Abstract Algebra*, JhonWiley&Sons, Inc., Singapura.

[3]. Fraleigh, J.B., 2000, *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wasley, Publishing Company, New York.